

Relative Hopf module について

福井大学教育 土井幸雄 (Yukio Doi)

G を群, B を体 k 上の algebra で G が B 上に k -alg. autom. として作用しているとする。加群 M が (左) G 加群かつ (右) B 加群であり、

$$g \cdot (m \cdot b) = (g \cdot m) \cdot (g \cdot b), \quad \forall m \in M, g \in G, b \in B$$

をみたすとき、 M は B - G 加群と呼ばれる。特に G が k 上のアフィン代数群で、 B がアフィン環かつ M が G -有理的のときの考察は、代数群の表現や quotient の問題との関連において重要である (Voigt [10], Oberst [6], Magid [5], Donaiswamy [4], Takeuchi [9])。

我々の目的は Hopf 代数の言葉を用いて、この B - G 加群の概念を捉えなおし、その基礎理論を構築することである。これにともない Hopf 代数における重要な概念である "Integral" が一般化される状況が出現する。上にあげた先行する文献の結果は一切仮定しない。記号用語は Sweedler [8] を用いる。

§1. relative Hopf module

Doi [2] に従って, (relative) Hopf module の定義をしよう。以後、 A は体 k 上の Hopf 代数とする。commutative, cocommutative は仮定しない。 k -algebra B が さらに right A -comodule であり、構造射 $\rho_B: B \rightarrow B \otimes A$ が algebra map になるとき、 $B = (B, \rho_B)$ は right A -comodule algebra であるという。 $\Delta_A: A \rightarrow A \otimes A$ によって A 自身 right A -comodule algebra とみれる。また $k \xrightarrow{u_A} A \simeq k \otimes A$ によって基礎体 k も right A -comodule algebra となる。

(Def) M が right (A, B) -Hopf module であるとは、 M が right A -comodule (その構造射を $\rho_M: M \rightarrow M \otimes A$) かつ M が right B -module (その構造射を $\omega_M: M \otimes B \rightarrow M$) で、次の図式が可換:

$$\begin{array}{ccccc}
 M \otimes B & \xrightarrow{\omega_M} & M & \xrightarrow{\rho_M} & M \otimes A \\
 \downarrow \rho_M \otimes \rho_B & & & & \uparrow \omega_M \otimes m_A \\
 M \otimes A \otimes B \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} & & & M \otimes B \otimes A \otimes A
 \end{array}$$

(注) 上のテンサー積 $\otimes$ はすべて $\otimes_k$ の 의미。 T は twist map, m_A は A の multiplication を表す。sigma notation を用いて、 $\rho_M(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, $\rho_B(b) = \sum b_{(0)} \otimes b_{(1)}$ と表せば、

上の図式の可換性の条件は.

$$\rho_M(mb) = \sum m_{(0)}b_{(0)} \otimes m_{(1)}b_{(1)}, \quad \forall m \in M, \forall b \in B$$

と表せる.

right (A, B) -Hopf module を対象とする圏を M_B^A と書くことにする。(射は A -comodule map かつ B -module map であるものとする。) アーベル圏になる.

(Remarks)

(1) k -アフィン集合 X に右から k -アフィン代数群 G が作用しているとき. その comorphism $O(X) \longrightarrow O(X) \otimes O(G)$ により $O(X)$ は right $O(G)$ -comodule algebra となり. 序の意味の有理的 $O(X)$ - $O(G)$ module と right $(O(G), O(X))$ -Hopf module の概念は一致する.

(2) $B \in M_B^A$.

(3) "right (A, k) -Hopf module" = "right A -comodule"

(4) right (A, A) -Hopf module = "Sweedler の意味の A -Hopf module [8], p83"

(5) right A -comodule algebra B に対し. その "不変元" の作る部分環 B_0 を次のように定義する:

$$B_0 = \{ b \in B \mid \rho_B(b) = b \otimes 1 \}.$$

同様に $M \in M_B^A$ に対して.

$$M_0 = \{m \in M \mid P_m(m) = m \otimes 1\} = M \mathbb{1}_B^A(B, M)$$

と定義すると、 M_0 は M の B_0 -submodule になる。すなわち、

$M \longmapsto M_0$ は圏 $M \mathbb{1}_B^A$ から right B_0 -module の圏 $M \mathbb{1}_{B_0}$ への関手となる。この関手を $R: M \mathbb{1}_B^A \longrightarrow M \mathbb{1}_{B_0}$ と書こう。また、

$L: M \mathbb{1}_{B_0} \longrightarrow M \mathbb{1}_B^A$ を $L(V) = V \otimes_{B_0} B$ とすることにより、 R と L は互いに adjoint になることが容易に確かめられる。すなわち、 $M \mathbb{1}_B^A(L(V), M) \cong M \mathbb{1}_{B_0}(V, R(M))$ 。

adjunction Ψ_M, Φ_V は次のとおり:

$$\Psi_M: LR(M) = M_0 \otimes_{B_0} B \longrightarrow M, \quad m \otimes b \longmapsto mb$$

$$\Phi_V: V \longrightarrow RL(V) = (V \otimes_{B_0} B)_0, \quad v \longmapsto v \otimes_{B_0} 1$$

ただし、 $L(V) = V \otimes_{B_0} B$ の A -comodule 構造は $v \otimes b \longmapsto \sum v \otimes b_{(0)} \otimes b_{(1)}$, B -module 構造は $(v \otimes b)b' = v \otimes bb'$ とする。

$$(6) \quad B \otimes A \in M \mathbb{1}_B^A \quad \text{via} \quad \begin{cases} b \otimes a \longmapsto \sum b \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)} \\ (b \otimes a)b' = (b \otimes a)P(b') = \sum b b'_{(0)} \otimes a b'_{(1)} \end{cases}$$

adjunction $\Psi_{B \otimes A}: (B \otimes A)_0 \otimes_{B_0} B \longrightarrow B \otimes A$ を具体的に調べよう。 $(B \otimes A)_0$ と B は同型だから、 $(B \otimes A)_0 \otimes_{B_0} B$ と $B \otimes_{B_0} B$ を同一視すれば、 $\Psi_{B \otimes A}$ は次の β と一致する:

$$\beta: B \otimes_{B_0} B \longrightarrow B \otimes A, \quad b \otimes_{B_0} b' \longmapsto \sum b b'_{(0)} \otimes b'_{(1)}$$

この map β は Hopf Galois 理論や代数群の quotient 問題を考察する時に登場する重要な写像である。 B が可換のとき、 β は algebra map になる。

§2. injective comodule

一般に coalgebra C 上の comodule V が injective であるとは、任意の単射な C -comodule map $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ および任意の C -comodule map $V_1 \xrightarrow{g} V$ に対して、 V_2 から V への C -comodule map φ で $\varphi \circ f = g$ をみたすものが

存在することである。(すなわち、

C -comodule の圏における injective 対象!)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ & & \downarrow g & \nearrow \exists \varphi & \\ & & V & & \end{array}$$

これは射影加群の双対概念で、comodule の中で基本的役割を持つ。(この辺の事情については例えば Doi [1] を参照)

Hopf 代数 A に対して、Sweedler は [8], LEMMA.14.0.2 で、
 “任意の A -comodule が injective $\iff A$ が cosemisimple
 $\iff$ left integral $\chi: A \rightarrow k$ で $\chi(1)=1$ をみたすものが
 存在する” を示した。次の定理はこの結果を一般化したものである。

定理 1. A を体 k 上の Hopf 代数, B を right A -comodule algebra とするとき、次の (1) ~ (4) は同値である:

- (1) 任意の $M \in \mathbf{M}_B^A$ は A -comodule として injective
- (2) B は injective A -comodule
- (3) right A -comodule map $\phi: A \rightarrow B$ で $\phi(1_A) = 1_B$ なるものがある
- (4) right A -comodule map $\phi: A \rightarrow B$ で $\phi(1_A) \in U(B)$ なるものがある

(注意) right A -comodule map $\phi: A \rightarrow B$ とは.

$$\rho_B \phi = (\phi \otimes 1) \Delta_A \quad \text{i.e.} \quad \sum \phi(a_{(1)}) \otimes \phi(a_{(2)}) = \sum \phi(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}.$$

条件(4)の $U(B)$ は B の単元全体の集合を表す

(定理1の略証) $B \in \mathcal{M}_B^A$ より (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか. (2) $\Rightarrow$ (3) は. 図式

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & k \xrightarrow{u_A} A \\ & & \downarrow u_B \\ & & B \end{array}$$

を考えればよい. (4) $\Rightarrow$ (3) は.

$A \ni a \longmapsto \phi(1)^{-1} \phi(a) \in B$ ととりなおせばよい. よって, あと (3) $\Rightarrow$ (1) を示せば, 定理の証明は終る.

$M \otimes A \ni m \otimes a \longmapsto \sum m \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ により right A -comodule とみると, $M \otimes A$ は injective になることはよく知られている. M の comodule structure map $\rho_M: M \rightarrow M \otimes A$ は A -comodule map になる. $\lambda: M \otimes A \rightarrow M$ を

$$\lambda(m \otimes a) = \sum m_{(1)} \phi(S(m_{(2)})a)$$

で定義すると, λ は A -comodule map かつ $\lambda \rho_M = 1$ となる. よって, M は $M \otimes A$ の直和因子だから, M も injective. ■

この定理の応用として, Doi [2], Th.2 では, surjective Hopf algebra map $A' \xrightarrow{f} A \rightarrow 0$ の coflat 性と faithfully coflat 性が一致することが示されている. また Doi [3], §2 では, right A -comodule map $\phi: A \rightarrow B$ (これを generalized

integral と呼んでもいいだろう) の存在が、一種の平均作用素の議論を自然に引き起こすことが解説されている。

(双対化) いままでの議論はすべて双対化される。 A を Hopf 代数とし、 C を right A -module coalgebra (すなわち、 C は coalgebra かつ right A -module で $\Delta(c \cdot a) = \sum c_{(1)} a_{(1)} \otimes c_{(2)} a_{(2)}$, $\varepsilon(ca) = \varepsilon(c) \varepsilon(a)$) とする。 N が right $[C, A]$ -Hopf module であるとは、 N が right C -comodule かつ right A -module で、 $p_N(n \cdot a) = \sum n_{(1)} a_{(1)} \otimes n_{(2)} a_{(2)}$ ($\forall n \in N, \forall a \in A$) を満たすもののことである。定理 1 の双対化として次の事実がなりたつ:

定理 1' 次の (1) ~ (4) は同値である:

- (1) 任意の right $[C, A]$ -Hopf module は A -module として projective.
- (2) C は projective A -module.
- (3) right A -module map $\psi: C \rightarrow A$ で $\varepsilon_A \psi = \varepsilon_C$ なるものがある.
- (4) right A -module map $\psi: C \rightarrow A$ で $\varepsilon_A \psi \in U(C^*)$ なるものがある.

(注意) $\varepsilon_A, \varepsilon_C$ はそれぞれ A, C の augmentation map を表す。(4) の $U(C^*)$ は C の dual algebra C^* の単元全体の集合を表す。 $C = k$ のとき、(3) の ψ に対し $\psi(1) = x (x \in A)$ とすれば、 $xa = \varepsilon(a)x$, $\forall a \in A$ かつ $\varepsilon(x) = 1$ となり、Sweedler

[8], THEOREM 5.1.8. が導かれる。

§3. Cleft comodule algebra

有名な Hopf module の構造定理というのは、 $M_A^A \supset M$ に
対して、 $M_0 \otimes A \simeq M$ が成立することといえる。([8],
THEOREM 4.1.1) 一般の A -comodule algebra B および
 $M_B^A \supset M$ に対して、§1 の Remark (5) の中の射 Ψ_M ,

$$\Psi_M: M_0 \otimes_B B \longrightarrow M, \quad m \otimes b \longmapsto mb$$

はめならずしも同型射にならない。どんな条件の下で Ψ_M が
同型射になるか? [2], Theorem 3 で、 A から B への
algebra map ϕ に対しては right A -comodule map になるもの
が存在すれば十分であることを示した。この節ではこの条件
をさらに弱められることを示す。

A から B への k -linear map 全体の k -space $\text{Hom}_k(A, B)$
は、convolution 積 $f * g = m_B(f \otimes g) \Delta_A$ によって k -algebra
とみる。単位元は $u_B \varepsilon_A$ である。この algebra の単位全体の
集合 $U(\text{Hom}_k(A, B))$ を、[7] に従って $\text{Reg}(A, B)$ と書く
ことにしよう。 $\text{Reg}(A, B) \ni \phi$ に対し、 ϕ の積 * に関する
逆元を ϕ^{-1} で表す: $m_B(\phi \otimes \phi^{-1}) \Delta = u_B \varepsilon_A = m_B(\phi^{-1} \otimes \phi) \Delta$.

(Def) right A -comodule algebra B は, right A -comodule map $\phi: A \rightarrow B$ で $\phi \in \text{Reg}(A, B)$ なるものが存在するとき, cleft であるという。

(Remark) ① B が cleft ならば, §1, 定理1の条件(4)をみたすことは明らかである。 A が irreducible ならこの逆も成立する ([8], LEMMA 9.2.3 参照)

(2) 一般の Hopf 代数 A に対し, $\text{id}_A \in \text{Reg}(A, A)$ ($(\text{id}_A)^{-1} = "A$ の antipode") だから, A 自身 right A -comodule algebra として cleft である。

補題. $\phi: A \rightarrow B$ を right A -comodule map かつ $\phi \in \text{Reg}(A, B)$ なるものとする。 $\phi^{-1}: A \rightarrow B$ は次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\phi^{-1}} & B & \xrightarrow{\rho_B} & B \otimes A \\ \downarrow \Delta & & & & \uparrow \phi^{-1} \otimes S \\ A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & & & A \otimes A \end{array}$$

すなわち, $\rho_B \phi^{-1} = (\phi^{-1} \otimes S) \tau \Delta$.

(ここで $S: A \rightarrow A$ は A の antipode を表す)

定理2. right A -comodule algebra B が cleft ならば,

$$\Psi_M: M_0 \otimes_B B \xrightarrow{\sim} M \quad (\forall M \in \mathcal{M}_B^A)$$

(略証) 補題の等式は convolution algebra $\text{Hom}_k(A, B \otimes A)$ の中で $\rho_B \phi = (\phi \otimes 1) \Delta$ と $(\phi^{-1} \otimes S) T \Delta$ が互いに逆の関係にあることを示すことで求まる。重 M の逆写像は

$$M \longrightarrow M_0 \otimes_{B_0} B, \quad m \longmapsto \sum m_{(1)} \phi^{-1}(m_{(2)}) \otimes_{B_0} \phi(m_{(2)})$$

で与えられることを、上の補題を用いて直接計算すればよい。これらの議論は、Sweedler [7], §8 の内容に負う所が多い。■

系 1. B が cleft なら $\beta: B \otimes_{B_0} B \longrightarrow B \otimes A, \beta(b \otimes c) = \sum b c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ は lin. isom. である。 (B が commutative なら β は alg. isom.)

系 2. B が cleft なら $M \otimes_B^A \forall M$ は A -comodule として “free” になる。すなわち、

$$\begin{array}{ccc} M_0 \otimes A & \xrightarrow{\sim} & M \quad (\text{as an } A\text{-comodule}) \\ \downarrow & & \\ m \otimes a & \longmapsto & m \phi(a) \\ \sum m_{(1)} \phi^{-1}(m_{(2)}) \otimes m_{(2)} & \longleftarrow & m \end{array}$$

系 3. B が cleft かつ B_0 上 left faithfully flat なら、

圏 $M \otimes_B^A$ と圏 $M \otimes_{B_0}$ は同値である

定理 2' (双対化). C が right A -module coalgebra で、

$\text{Reg}(C, A) \cap \text{Hom}_A(C, A) \neq \emptyset$ ならば、任意の right $[C, A]$ -

Hopf module N に対し

$$N \simeq N/NA^+ \square_{C/CA^+} C \quad (\text{as a } [C, A]\text{-Hopf module})$$

§4. Smash product

B を right A -comodule algebra とする。vector space $\text{Hom}_k(A, B)$ は次のような積に関して associative algebra になる: $f, g: A \rightarrow B$ に対し, $f \# g: A \rightarrow B$ を

$$(f \# g)(a) = \sum f(g(a_{(2)})_{(1)} a_{(1)}) g(a_{(2)})_{(0)}, \quad \forall a \in A$$

と定義する, 単位元は $1_B \in A$.

この algebra を我々は B の A による smash product と呼ぶ, $\#(A, B)$ で表すことにする。

(注意) (1) B 上の A -comodule 構造が自明のとき (すなわち $\rho_B(b) = b \otimes 1, \forall b \in B$), $\#(A, B)$ は普通の convolution 積に関する algebra $\text{Hom}_k(A, B)$ と一致する。

(2) A が k 上有限次元のとき, can. isom. $\text{Hom}_k(A, B) \simeq B \otimes A^*$ は alg. isom. $\#(A, B) \simeq B \# A^*$ を引き起す。ただし, $B \# A^*$ は B を left A^* -module algebra とみたときの smash product (従来の意味) を表すとする。

以下, $\#(A, B)$ に関する基本的性質を列挙しよう。

(1) B および u dual algebra A^* は、 $b \mapsto (a \mapsto \varepsilon(a)b)$, $a^* \mapsto (a \mapsto a^*(a)1_B)$ によって $\#(A, B)$ の subalgebra とみれる。

(2) $a \in A$, $f \in \#(A, B)$ に対し、 $a \rightarrow f \in \#(A, B)$ を

$$(a \rightarrow f)(d) = f(da), \quad \forall d \in A$$

で定義することにより、 $\#(A, B)$ は left A -module algebra となり、その A 不変元全体は B と一致する。あるいは、

$$\{f \in \#(A, B) \mid a \rightarrow f = \varepsilon(a)f, \forall a \in A\} = B$$

(3) $\#(A, B) \ni f$, $B \ni b$ に対し、 $f \rightarrow b \in B$ を

$$f \rightarrow b = \sum f(b_{(0)})b_{(1)}$$

で定義することにより、 B は left $\#(A, B)$ -module となる。

従って次の algebra map π が引き起される：

$$\begin{aligned} \pi: \#(A, B) &\longrightarrow \text{End}_{B_0}^r(B) = "B \text{ から } B \text{ への right } B_0\text{-mod. map}" \\ f &\longmapsto (b \mapsto \sum f(b_{(0)})b_{(1)}) \end{aligned}$$

(4) $B \supset I$ が left $\#(A, B)$ -submodule

$$\iff I \text{ は left ideal of } B \text{ かつ } \rho_B(I) \subset I \otimes A$$

(5) $B \otimes_{B_0} B$ から $B \otimes A$ への写像 $b \otimes_{B_0} c \mapsto \sum b_{(0)}c \otimes b_{(1)}$ を β' で表すと、 β' は right B -module map (ただし、 $B \otimes A$ は $(b \otimes a)b' = bb' \otimes a$ により right B -module とみる) になり、

次の図式を可換にする： $\#(A, B) \xrightarrow{\pi} \text{End}_{B_0}^r(B)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \uparrow \\ \text{Hom}_B^r(B \otimes A, B) & \xrightarrow{\beta'^*} & \text{Hom}_B(B \otimes_{B_0} B, B) \end{array}$$

(Yokogawa [11] 参照)

(6) B は cleft かつ A の antipode S が $S^2 = 1$ のとき.

$$\begin{array}{ccc}
 B \otimes_B B & \xrightarrow{\beta'} & B \otimes A \\
 \beta \downarrow & \curvearrowright & \uparrow \theta \\
 B \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes S} & B \otimes A
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{ただし} \\
 \theta(b \otimes a) = \sum b_{(0)} \otimes b_{(1)} a \\
 \theta^{-1}(b \otimes a) = \sum b_{(0)} \otimes S(b_{(1)}) a
 \end{array}$$

となり、 β' も isom. となる。よって (5) より π も isom である。

参考文献

- [1] Y. Doi: Homological coalgebra, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 35-50.
- [2] Y. Doi: On the structure of relative Hopf modules, Comm. in Algebra, (to appear)
- [3] Y. Doi: Cleft comodule algebras and Hopf modules, (to appear)
- [4] I. Doraiswamy: Projectivity of modules over rings with suitable group action, Comm. in Alg. 10 (1982), 787-795.
- [5] A. R. Magid: Picard groups of rings of invariants, J. Pure Appl. Algebra 17 (1980), 305-311.
- [6] U. Oberst: Affine Quotientenschemata nach affinen, algebraischen Gruppen und induzierte Darstellungen, J. Algebra 44 (1977), 503-538.
- [7] M. E. Sweedler: Cohomology of algebras over Hopf algebras, Trans. A. M. S. 133 (1968), 205-239.
- [8] M. E. Sweedler: Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.
- [9] M. Takeuchi: Relative Hopf modules—Equivalences and freeness criteria, J. Algebra 60 (1979), 452-471.
- [10] D. Voigt: Endliche Hopfalgebren, Math. Z. 134 (1973), 189-203.
- [11] K. Yokogawa: Non-commutative Hopf Galois extensions, Osaka J. Math. 18 (1981), 63-73.