

$SU(n,1)$ ($n \geq 2$) の compact 商空間に於ける

Selberg 型 zeta 関数について

広島大 理

若山 正人

Masato Wakayama

§0. 序

R を種数 > 1 なる compact リーマン面とすると $R = SO(2) \backslash SL(2, \mathbb{R}) / \Gamma$ とかける。但し Γ は $SL(2, \mathbb{R})$ の torsion-free 有離散部分群である。A. Selberg は有名な論文 [7] で R に付随して、その零点の位置及び位数が R の位相的な情報とラプラス変換のスペクトルに関する情報を与えるような関数 ζ_R (Selberg zeta 関数) を構成した。

これは R. Gangolli により階数 1 の対称空間の compact 商空間に拡張された [1]。即ち、 G を実階数 1 の半単純リー群とし、 K をその最大の compact 部分群としたとき compact な多様体 $K \backslash G / \Gamma$ を考え $L^2(K \backslash G / \Gamma)$ に現れる G の既約ユニタリ表現に関する情報を与える Selberg 型の zeta 関数を構成し、その諸性質を調べた。その後 D. Scott は [6] で $G = SL(2, \mathbb{C})$ の

場合には, $L^2(G/\Gamma)$ に現れる $M = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \right\}$ の既約表現, 3 から誘導される G の主系列表現に関する情報を提供する Selberg 型の zeta 関数 $\zeta_{\Gamma,3}$ を構成した。

本稿の目的は, $G = \mathrm{SU}(n, 1)$ ($n \geq 2$) の場合には $L^2(G/\Gamma)$ を考え, 上記のような Selberg 型の zeta 関数を極大 compact 部分群 K の殆どすべての 1 次元表現に付随して構成し諸性質を述べることである。

§ 1. 記号並びに 1 つの補題

(i). $G = \mathrm{SU}(n, 1)$ ($n \geq 2$)。 $G = K A_{\mathbb{P}} N$ とその若沢分解とする。ここで $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$ は G の極大 compact 部分群である。更に $T \in K$ の極大 torus (G の compact Cartan 部分群), $M \in K$ に於る $A_{\mathbb{P}}$ の中心化群, $A_K \in M$ の対角行列から成る部分群とし $A = A_{\mathbb{P}} A_K$ とおく。また夫々のリー環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}_{\mathbb{P}}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}_K, \mathfrak{n}$ とする。 $\dim \mathfrak{a}_{\mathbb{P}} = 1$ であるから, $H_0 \in \mathfrak{a}_{\mathbb{P}}$ を $\beta(H_0) = 1$ となるようにとり $t \mapsto tH_0$ ($t \in \mathbb{R}$) によって $\mathbb{R}$ と $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}$ を同一視出来る。但し, β は $\{\text{制限 root}\} = \{\beta, 2\beta\}$ なるものとする。

G の任意の部分群 L に対し, L の既約ユニタリ表現の同値類の全体を $\widehat{L}$ とかく。また $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{l}$ に対し $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ 及び $\mathfrak{l}^*$ で夫々, $\mathfrak{l}$ の複素化, dual を表すものとする。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ に関する root の集合に適当な順序を

入れ正の root を定め, そのうち α_p 上消えない root の全体を P_+ で表す。 $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_+} \alpha$ とおくと $\rho(H_0) = n$ である。以後 $\rho_0 = n$ とおく。

$\nu \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \hat{M}$ に対し $(\pi_{\lambda, \nu}, H_{\lambda})$ を G の主系列表現, $\nu \in i\mathbb{R}$, $\lambda \in \hat{M}$ に対し $(\pi_{\lambda, \nu}, H_{\lambda})$ を (もしそれがユニタリ化可能ならば) 補系列表現とする。補系列表現の parameter ν は, $\nu \in i(-\rho_0, \rho_0)$ なることが知られている。

$\hat{\Gamma}$ は $i\mathbb{R}^*$ のある格子 L_T と同一視される。そこで $L_T' \in L_T$ の正則元の全体とし, L_T^+ で L_T' の Weyl 群 $W(G, T)$ に関する基本領域を表すことにすると, L_T^+ は G の離散系列の表現を unique に parametrize する。 $\lambda \in L_T^+$ に対し, これに対応する離散系列の表現を $\omega(\lambda)$ とかくことにする。

(ii) G の部分群の Haar 測度の normalization は [1] と同じものを採用する。

$f \in C_c(G)$ に対し, その Abel 変換 F_f を

$$F_f(ma_t) = e^{t\rho_0} \int_{K \times N} f(kma_tnk^{-1}) dn dk \quad (m \in M, a_t = \exp tH_0)$$

で定義する。上で定めた G の表現 $\pi_{\lambda, \nu}$ に対し, その指標を $\Theta_{\lambda, \nu}$ とすると

$$(1.1) \quad \Theta_{\lambda, \nu}(f) = \int_M \int_{\mathbb{R}} F_f(ma_t) \overline{\chi_{\lambda}(m)} e^{i t \nu} dt dm$$

が成り立ち、更に反転公式と Peter-Weyl の定理により

$$(1.2) \quad F_f(\text{mat}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}_{\lambda, \nu}(f) \overline{u_{\lambda}(m)} e^{-i\nu t} d\nu$$

が成立する。

(iii). Γ を torsion-free な G の離散部分群で G/Γ が compact なものとする。 T_{Γ} を Γ の有限次元ユニタリ表現、 $\chi = \chi_{T_{\Gamma}}$ をその指標とする。 U を T_{Γ} から誘導された G の表現とすると U は左正則表現として $L^2(G/\Gamma, T_{\Gamma})$ に作用する。 Γ の仮定により

$$U \simeq \sum_{\pi \in \hat{G}} m_{T_{\Gamma}}(\pi) \pi \quad (\text{離散直和})$$

である。ここで $m_{T_{\Gamma}}(\pi)$ は $\pi \in \hat{G}$ の U に於ける重複度である。

Γ の元 γ は、 $A = A_K A_F$ の元と共役であるからその共役元を $h(\gamma) = h_K(\gamma) h_F(\gamma)$ と記す。 $u_{\gamma} = \beta(\log h_F(\gamma))$ と定義すると $|u_{\gamma}|$ は γ へのみ依存する数である。また任意の $\gamma \in \Gamma$ ($\gamma \neq e$) は unique な primitive 元 δ の正の冪で表されることが知られているので整数 $j(\gamma)$ を $\gamma = \delta^{j(\gamma)}$ で定める。

我々の話に於ける主たる道具は Selberg の跡公式である。 $f \in$ 都合の良い関数 (admissible function と云う。定義は例えば [2] にある) とすると跡公式は次のように書ける。

$$(1.3) \quad \sum_{\pi \in \hat{G}} m_{T_{\Gamma}}(\pi) \hat{\theta}_{\pi}(f) = \chi(e) \text{vol}(G/\Gamma) f(e) + \sum_{\gamma \in G \setminus \Gamma} \chi(\gamma) |u_{\gamma}| j(\gamma)^{-1} C(h(\gamma)) F_f(h_F(\gamma))$$

ここで C_Γ は Γ の元の Γ -共役類の代表元の全体, $\oplus_\pi$ は π の指標, $C(h)$ は G の構造のみに依存する正值関数であり, $C(h(s))F_f(h_p(s))$ は s の G -共役類にのみ依存する数である。詳細は [1] にある。

(iv). $\mathcal{L}'(G)$ を Harish-Chandra の意味において integrable な急減少関数の空間とする。正確な定義は例えば [1] にある。

$\hat{K}_1$ を 1次元表現から成る $\hat{K}$ の部分集合とする。 $k = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \in K$ に対し $\tau_g(k) = \det(u)^g$ ($g \in \mathbb{Z}$) と定義すれば $\tau_g \in \hat{K}_1$ であり, $\hat{K}_1$ は $\mathbb{Z}$ で parametrized されることが判る。そこで $\mathcal{L}'(G, \tau_g) := \{ f \in \mathcal{L}'(G) \mid f(k_1 g k_2) = \tau_g(k_1) f(g) \tau_g(k_2), \forall g \in G, \forall k_1, k_2 \in K \}$ とおく。 $\mathcal{L}'(G, \tau_g)$ の元は admissible であることが知られている [2]。

さて, $f \in \mathcal{L}'(G, \tau_g)$ に対して写像 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F}(f) = (\mathcal{F}_A(f), \mathcal{F}_T(f)),$$

ここで $\mathcal{F}_A(f)(z, v) := \oplus_{z, v} (f)$ ($z \in \hat{M}, v \in \mathbb{C}$), $\mathcal{F}_T(f)(\lambda) := \oplus_{\omega(\lambda)} (f)$ ($\lambda \in L_T^+$) と定義する。

P.C. Trombi [8] によって $\mathcal{F}$ による $\mathcal{L}'(G, \tau_g)$ の像の特徴付けが行われているので, それを利用して $\mathcal{L}'(G, \tau_g)$ の中の特別な関数を選んで跡公式に適用すると次の補題が得られる。

補題 1. $\omega(\lambda)$ ($\lambda \in L_T^+$) を G の離散系列の表現とし, $d(\omega(\lambda))$ をその formal degree とする。このとき,

$0 \leq |q| \leq n$ かつ $q \equiv n \pmod{2}$ を満たす $q \in \mathbb{Z}$ が存在して $[\omega(\lambda)|_K; \tau_q] \neq 0$ ならば

$$m_{\tau_r}(\omega(\lambda)) = \chi_{\tau_r}(e) \text{vol}(G/\Gamma) d(\omega(\lambda)) \quad (*)$$

が成り立つ。

注意. K -finite な行列要素が integrable であるような離散系列の表現 $\omega(\lambda)$ に対しては、補題の仮定なしで常に等式 (*) が成立する。従ってこの補題は、integrable でない離散系列の表現に対し (*) が成り立つ為の K -type に関する一つの十分条件を与えたものである。

§2. zeta 関数

この § の前半では、我々の zeta 関数 $\zeta_{\tau, \varepsilon}$ の対数微分である $\eta_{\tau, \varepsilon}$ を定義しその諸性質を調べる。(解析接続と関数等式)。主結果は最後に述べることにする。

正数 ε_0 を一つ固定する。 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ を以下の性質を持つ実数値関数とする：(1) 偶関数, (2) 0 のある近傍で $g=0$, (3) $\{x \mid |x| \geq \varepsilon_0\}$ で $g(x) = c$ (定数), (4) $0 \leq g \leq c$ 。

このような関数は実際に存在する。 ε_0 と c の値は後で都合の良いように定めることにする。

各 $\tau_g \in \hat{K}_1$ に対し多項式 P_g を次のように定める。

$$P_g(v) := \begin{cases} v^2 & : 0 \leq |g| < n \text{ で } g \not\equiv n \pmod{2} \\ 1 & : \text{その他} \end{cases}.$$

更に $\mathbb{R}$ 上の微分作用素 D_g をその Fourier 変換が P_g となるものとして定義する。

$\forall s \in \mathbb{C}$ に対して MA_g 上の微分可能な関数 $\mathcal{G}_s$ を

$$(2.1) \quad \mathcal{G}_s(ma_t) = \tau_g^M(m^{-1}) D_g(g(|t|) \exp(p_0 - s)|t|)$$

で定義する。但し τ_g^M は τ_g の $M \wedge$ の制限とする。

いま, $H(r) = \int_0^\infty g'(x) e^{irx} dx \quad (r \in \mathbb{C})$ とおくと, $g' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ であるから古典的な Paley-Wiener 定理により次の補題が成り立つ。

補題 2. H は整関数である。更に $\forall n \geq 1$ と $\forall m \geq 0$ に対し定数 $C_{m,n} > 0$ が存在して

$$|d^m H(r)/dr^m| \leq \begin{cases} C_{m,n} \cdot |t|^{-n} & : \operatorname{Im} t > 0 \\ C_{m,n} \cdot |t|^{-n} \exp(\varepsilon_0 |\operatorname{Im} t|) & : \operatorname{Im} t < 0 \end{cases}$$

が成り立つ。

この関数 H を用いて, $\mathcal{G}_s$ の MA_g の指標 (χ_3, ν) における Fourier 変換

$$\widehat{\mathcal{G}}_s(\chi_3, \nu) = \int_{\mathbb{R} \times M} \chi_3(m) e^{i\nu t} \mathcal{G}_s(ma_t) dm dt$$

を計算すると次が得られる。

補題 3. $\operatorname{Re}(s-p_0) > 0$ ならば

$$(2.2) \quad \widehat{\mathcal{G}}_s(3, v) = \begin{cases} 0 & : 3 \neq \tau_g^M \\ p_g(v) \left\{ \frac{H(i(s-p_0)-v)}{s-p_0+iv} + \frac{H(i(s-p_0)+v)}{s-p_0+iv} \right\} & : 3 = \tau_g^M \end{cases}$$

$\hat{G}'$ は §1. (注 2) の意味での integrable な離散系列からなる $\hat{G}$ の部分集合とする。 $(L_T^+)^0 := \{ \lambda \in L_T^+ \mid \omega(\lambda) \notin \hat{G}' \}$,

$L_T^+(\tau_g) := \{ \lambda \in L_T^+ \mid [\omega(\lambda)|_K : \tau_g] \neq 0 \}$ とおく。また,

$\hat{K}_0 := \{ \tau_g \in \hat{K}_1 \mid (L_T^+)^0 \cap L_T^+(\tau_g) = \emptyset \text{ 或いは } 0 \leq |\mathfrak{g}| \leq n \}$

とおく。Trombi [8] の結果により次を得る。

補題 4. $\operatorname{Re} s > 2\rho_0$ とする。 $\tau_g \in \hat{K}_0$ ならば

$\oplus_{3,v} ({}_g g_s) = \widehat{\mathcal{G}}_s(3, v) \quad (\forall 3 \in \hat{M}), \quad \oplus_{\omega(\lambda)} ({}_g g_s) = 0 \quad (\forall \lambda \in L_T^+)$
を満す $\mathcal{L}'(G, \tau_g)$ の関数 ${}_g g_s$ が存在する。

この補題と (1, 2) により次が分る。

$$(2.3) \quad F_{{}_g g_s} = {}_g g_s$$

我々の Γ の性質より $\{ |u_r| \mid r \in C_T \setminus \{e\} \}$ は最小値を持つことが知られているので 先の $\varepsilon_0 (> 0)$ はこの最小値より小さい数にとると

$$(2.4) \quad g(|u_r|) = c \quad (r \in C_T \setminus \{e\})$$

である。さて、先の関数 g を $\{ t \mid |t| \geq \varepsilon_0 \}$ に制限して考

えらと、 $g(t) = c$ であるから直接計算により

$$(2.5) \quad D_g(g(t) \exp(p_0 - s)|t|) = c P_g(i(p_0 - s)) \exp(p_0 - s)|t|$$

が確かめられる。

G の表現 $\pi_{\tau_q, v}$ を簡単の爲 $\pi_{q, v}$ とおく。 $q \not\equiv n \pmod{2}$ のとき $\pi_{q, 0}$ は既約であるが $q \equiv n \pmod{2}$ のときは $\pi_{q, 0}$ は既約でない。この既約でない場合、 $q \neq 0$ ならば $\pi_{q, 0} \simeq \pi_{q, 0}^+ \oplus \pi_{q, 0}^-$ となる。ここで $\pi_{q, 0}^\pm$ は所謂離散系列の極限と呼ばれる表現で $[\pi_{q, 0}^+|_k : \tau_q] = 0$ ($q < 0$ のとき), $[\pi_{q, 0}^-|_k : \tau_q] = 0$ ($q > 0$ のとき) を満たすものである。そこで便宜的に $\pi_{q, 0}$ の定義を次のように変える; 『 $q > 0$ のとき $\pi_{q, 0} := \pi_{q, 0}^+$ とし $q < 0$ のとき $\pi_{q, 0} := \pi_{q, 0}^-$ とする』このようにしておけば、 $m_{\tau_r}(\pi_{q, 0})$ が意味を持ちまた、

$$m_{\tau_r}(\pi_{q, 0}^+) \oplus_{q, 0}^+(qg_s) + m_{\tau_r}(\pi_{q, 0}^-) \oplus_{q, 0}^-(qg_s) = m_{\tau_r}(\pi_{q, 0}) \oplus_{q, 0}(qg_s)$$

が成り立つ。

$q = 0$, 即ち τ_q が k の自明な表現のときは $[\]$ の結果に含まれるので以後 $q \neq 0$ として話を進めることにする。

$Q_q := \{ \pi \in \hat{G} \mid \pi \in L^2(G/\Gamma, \tau_r), \oplus_{\pi}(qg_s) \neq 0 \}$ とおく。更に $\mathbb{C}$ の部分集合 Q_q^1, Q_q^2 を

$$Q_q^1 := \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \pi_{q, \lambda} \in \hat{G}, \pi_{q, \lambda} \in L^2(G/\Gamma, \tau_r) \}$$

$$Q_q^2 := \{ \lambda \in i\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \mid \pi_{q, \lambda} \in \hat{G}, \pi_{q, \lambda} \in L^2(G/\Gamma, \tau_r) \}$$

で定めると、 τ_q の定義により $\pi_{q, v}$ と $\pi_{q, -v}$ は同値だから

Q_g は $Q_g^1 \cup Q_g^2$ で parametrize される。以後 Q_g と $Q_g^1 \cup Q_g^2$ を同一視する。

さて、以上の準備のもとに

$$(2.6) \quad A_g(s) = \sum_{\lambda \in Q_g} m(g, \lambda) \hat{g}_g(s)(\tau_g^M, \lambda)$$

但し、 $m(g, \lambda) := m_{Tr}(\pi_g, \lambda)$ 、とおく。補題3を用いて次が得られる。

補題5. $A_g(s)$ は全平面に有理型に拡張出来る。その極はすべて一位であり、極の位置と留数は次の通りである。

$$\text{極} : s = \rho_0 \pm i\lambda \quad (\lambda \in Q_g)$$

$$\text{留数} : m(g, \lambda) P_g(\lambda) H(0)$$

但し、 $P_g(0) = 0$ ならば、 $s = \rho_0$ は極ではないと解釈する。

g_g の定義により $\operatorname{Re} s > 2\rho_0$ のとき、 g_g は admissible 故 (2.3), (2.4), (2.5) に注意すると跡公式 (1.3) により

$$(2.7) \quad A_g(s) = \chi(e) \operatorname{vol}(G/\Gamma) g_g(s)(e) \\ = c P_g(i(\rho_0 - s)) \sum_{r \in G \backslash \Gamma e} \chi(r) |u_0|_j(r)^{-1} C(h(r)) \tau_g^M(h_k(r))^{-1} \exp(\rho_0 - s) |u_0|$$

が分る。 $\operatorname{Re} s > 2\rho_0$ のとき (2.7) の右辺を $\tilde{\eta}_g(s) = \tilde{\eta}_{Tr, \tau_g}(s)$ とおく。 g_g が admissible であることにより、この和は半平面 $\operatorname{Re} s > 2\rho_0 + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$) で絶対かつ一様収束することが分るので $\tilde{\eta}_g(s)$ は $\operatorname{Re} s > 2\rho_0$ で正則な函数である。(2.7) の左辺

を用いて $\hat{\eta}_q(s)$ を全平面に解析接続するのであるが、その為には Plancherel の定理を使うので以下に Plancherel 測度 μ_q とその極及び留数を表に上げておく。

$$\mu_q(v) = \mu_{\tau_q^M}(v) = (C_q(v) C_q(-v))^{-1} . \quad \text{ここで } C_q(v) \text{ は}$$

$$C_q(v) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(iv/2) \Gamma(iv/2 + \frac{1}{2})}{2^{n-1} (n-1)! \Gamma((n+iv+q)/2) \Gamma((n+iv-q)/2)}$$

で与えられる。 $\Gamma(\cdot)$ は gamma 関数。 [5]

$r_k = r_{q,k}$; the pole of μ_q

$d_k = d_{q,k}$; the residue of μ_q at the pole r_k

($k \in \mathbb{Z}$)

$$\rho_0 = n$$

	r_k	d_k
$ q \leq n$	$r_k = i(\rho_0 + q + 2k)$ ($k \geq 0$)	$id_k = \frac{(-1)^n}{2^{2n-2}} (n + q + 2k) \binom{n + q + k - 1}{n-1} \binom{n+k-1}{n-1}$
$ q > n$ $q \equiv n$ (mod. 2)	$r_k = 2i(k+1)$ ($0 \leq k \leq (q - n)/2 - 1$)	$id_k = -\frac{k+1}{2^{2n-3}} \binom{(q + n)/2 + k}{n-1} \binom{(q + n)/2 - k - 2}{n-1}$
	$r_{k+(q -n)/2}$ $= i(\rho_0 + q + 2k)$ ($k \geq 0$)	$id_{k+(q -n)/2} = \begin{pmatrix} id_k \\ \text{in the case } q \leq n \end{pmatrix}$
$ q > n$ $q \not\equiv n$ (mod. 2)	$r_k = i(2k+1)$ ($0 \leq k \leq (q - n - 1)/2$)	$id_k = \frac{k(k+\frac{1}{2})}{2^{2n-3}} \binom{(q + n - 1)/2 + k}{n-1} \binom{(q + n - 1)/2 - k - 1}{n-1}$
	$r_{k+(q -n+1)/2}$ $= i(\rho_0 + q + 2k)$ ($k \geq 0$)	$id_{k+(q -n+1)/2} = \begin{pmatrix} id_k \\ \text{in the case } q \leq n \end{pmatrix}$

さて, Plancherel の定理より

$$g_s(e) = \frac{1}{4\pi} \sum_{z \in \hat{H}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}_z(g_s) \mu_z(v) dv$$

であるが, (2.2) と P_g, μ_g が偶関数であることから

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} P_g(v) \frac{H(i(s-p_0)+v)}{s-p_0-iv} \mu_g(v) dv$$

となる。そこで積分路を都合のよいように shift してやる。留数定理により

$$(2.8) \quad g_s(e) = i \sum_{k \geq 0} \frac{H(i(s-p_0)+r_k)}{s-p_0-ir_k} P_g(r_k) dk \quad (\operatorname{Re} s > 2p_0)$$

となる。補題 2 を用いると次が証明できる。

補題 6. (2.8) の右辺の級数は, $\{p_0 + ir_k\}$ を含まない任意の compact 集合上で絶対かつ一様収束し, 従って s に関して全平面で有理型の関数を定義する。この関数は $p_0 + ir_k$ ($k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$) で一位の極を持ち他には極は持たない。また $s = p_0 + ir_k$ における留数は $iH(0) P_g(r_k) dk$ である。

上の表より dk は純虚数であるから, $i\chi(e) \operatorname{vol}(G/\Gamma) H(0) \times P_g(r_k) dk$ は実数である。我々の測度の normalization の元
に於て, $\operatorname{vol}(G/\Gamma)$ は多様体 $K \backslash G/\Gamma$ の Euler-Poincaré
特性数 E の有理数倍である [1]。また表からすぐに判る

ように idk は有理数であるから, 補題 6 により S の関数 $\chi(e) \text{vol}(G/\Gamma) g_s(e)$ の留数の分母を k ($k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$) に依存しないてとることが出来る。よって, ある正の整数 $\tilde{K}$ が存在して $i \cdot \text{vol}(G/\Gamma) dk = e_k E / \tilde{K}$ が成り立つ。但し, $e_k = e_{k,g}$ は整数である。ここで idk と $e_k E$ の付号は等しい。

関数 $\eta_g(s)$ の定義の中に定数 c が入っていたが, いま c として上記の $\tilde{K}$ をとると $|t| \geq \varepsilon_0$ ならば $g(t) = \tilde{K}$ であるから $H(0) = \tilde{K}$ が判る。また $P_g(r_k)$ は, すべて整数であるから 関数 $\chi(e) \text{vol}(G/\Gamma) g_s(e)$ の留数はすべて整数である。

補題 5, 6. 及び $\tilde{\eta}_g(s)$ の定義によって次の補題が得られる。

補題 7. 各 $\tau_g \in \hat{K}_0$ に対し, $\tilde{\eta}_g(s)$ は, 関係式

$\tilde{\eta}_g(s) = A_g(s) - \chi(e) \text{vol}(G/\Gamma) g_s(e)$ により, 全平面に有理型関数として解析接続出来る。 $\tilde{\eta}_g(s)$ の極は, すべて一位であり, それは以下の通りである。

極	留数
$s = p_0 \pm i\lambda$	$\tilde{K} m(g, \lambda) P_g(\lambda) \quad (\lambda \in Q_g)$
$s = p_0 + i\tau_k$	$-e_k \cdot E \cdot \chi(e) P_g(\tau_k) \quad (k \geq 0, k \in \mathbb{Z})$

但し, ある $\lambda \in Q_g$ に対して $\lambda = \tau_k$ なる k が存在した場合には

$p_0 + ir_k$ における留数は $(k m(g, r_k) - e_k \chi(e)) P_g(r_k)$ であるとする。また $\lambda = 0 \in Q_g$ ならば、この極での留数は $2k m(g, 0) P_g(0)$ とする。もちろん $P_g(0) = 0$ ならば、 $s = p_0$ は極でない。

関数 $\Phi_g(v)$ を

$$\Phi_g(v) = \tilde{\kappa} \cdot \chi(e) \operatorname{vol}(G/\Gamma) P_g(iv) \mu_g(iv)$$

で定義する。 μ_g の極と留数の表と補題 7 により、関数

$$g_g(s) := \tilde{\eta}_g(s) + \tilde{\eta}_g(2p_0 - s) + \Phi_g(s - p_0)$$

は整関数であることが判る。そこで再度 Selberg の跡公式を利用すると $\mathbb{R}$ 上で恒等的に $g_g(s) = 0$ が言えるので、次の関数等式が証明出来る。

補題 8. $\tau_g \in \hat{K}_0$ に対して

$$(2.9) \quad \tilde{\eta}_g(s) + \tilde{\eta}_g(2p_0 - s) + \Phi_g(s - p_0) = 0$$

が成り立つ。

関数 $\eta_g^0(s)$ と $\phi_g(s)$ を次で定める。

$$\eta_g^0(s) := \tilde{\eta}_g(s) (P_g(i(s-p_0)))^{-1}$$

$$\phi_g(s) := -\Phi_g(s-p_0) (P_g(i(s-p_0)))^{-1}$$

$$= -\kappa \chi(e) \operatorname{vol}(G/\Gamma) \mu_g(i(s-p_0)) .$$

いま $\tau_g \in \hat{K}_0$ を $0 < |g| < n$ と $g \not\equiv n \pmod{2}$ を満たすものとする。 $P_g(i(s-p_0)) = -(s-p_0)^2$ である。この場合補題7の最後の注意にあるように $s=p_0$ は $\tilde{\eta}_g(s)$ の極ではない。よって $\eta_g^0(s)$ は $s=p_0$ において高々2位の極をもつことがその定義から直ちに分る。 $\kappa=3$ が関数等式 $\eta_g^0(s) + \eta_g^0(2p_0-s) = \phi_g(s)$ により $\eta_g^0(s)$ は奇数位の極しか持たないことが判るので、結局 $\eta_g^0(s)$ は高々1位の極しか持たない。

そこで、 $g \neq 0$ なる任意の $\tau_g \in \hat{K}_0$ に対し、数 $\tilde{r}_g = \tilde{r}_{\tau_g}$ を次のように定義する。

$$\tilde{r}_g = \begin{cases} 0 < |g| < n, \ g \not\equiv n \pmod{2} \text{ であり, } s=p_0 \text{ において} \\ \eta_g^0(s) \text{ が極をもつときは, その留数} \\ \\ \text{その他の場合は } 0 \end{cases}$$

更に関数 $\eta_g(s)$ を次で定義する。

$$\eta_g(s) = \eta_g^0(s) - \tilde{r}_g / (s - p_0) .$$

今迄の結果をまとめることにする。

補題 9. $\tau_g \in \hat{K}_0$ ($g \neq 0$) に対して, $\eta_g(s)$ は一位の極のみを持つ有理型関数であり, その極の位置と留数は次の通りである;

極	留数	
$s = p_0 \pm i\lambda$	$\kappa m(g, \lambda)$	$(\lambda \in Q_g)$ (下記の注を参照)
$s = p_0 + i r_k$	$-\chi(e) e_k E$	$(k \geq 0, k \in \mathbb{Z})$.

更に関数等式を持つ;

$$\eta_g(s) + \eta_g(2p_0 - s) = \phi_g(s) .$$

注意. $0 < |g| < n$, $g \not\equiv n \pmod{2}$ の場合. たとえ $0 \in Q_g$ であっても $\eta_g(s)$ は $s = p_0$ で極を持たない。

$\eta_g(s) = \eta_{\tau, \tau_g}(s)$ は上で見たように, その極はすべて一位で, 留数はすべて整数であるから, $(d/ds)(\log \xi_g(s)) = \eta_g(s)$ を満たす有理型関数 $\xi_g(s) = \xi_{\tau, \tau_g}(s)$ が定数倍を除いて unique に存在する。そこで $\operatorname{Re} s_0 > 2p_0$ であるような $s_0 \in \mathbb{C}$ を選ぶ

$$Z_g(s) = c_0 \cdot \exp\left(\int_{s_0}^s \eta_g(z) dz\right)$$

とおく。但し c_0 は Z_g を適当に normalize する定数であるとする。本稿の主な結果は次のようである。

定理 10. 各 $\tau_g \in \hat{K}_0$ ($g \neq 0$) に対して、関数 Z_g は以下の性質を持つ。

(A). Z_g は 半平面 $\operatorname{Re} s > 2p_0$ で正則で、更に全平面に有理型関数として解析接続出来る。

(B). 次の関数等式を満たす。

$$Z_g(2p_0 - s) = c_1 \cdot \exp\left\{\tilde{\kappa} \operatorname{vol}(G/\Gamma) \chi_{\tau_g}(e) \int_{s_0}^s \mu_g(i(z - p_0)) dz\right\} \cdot Z_g(s)$$

但し $c_1 = Z_g(2p_0 - s_0) Z_g(s_0)^{-1}$ 。

(C). Z_g の non-trivial な零点は、有限個の例外を除けばすべて線分 $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = p_0\}$ 上にある。有限個の例外は(もしあるとすればそれらは)実数で区間 $[0, 2p_0]$ に p_0 に関して対称な位置にある。更に、 Z_g の non-trivial な零点 $s = p_0 \pm i\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{Q}_f$) の位数は $\tilde{\kappa} \cdot m_{\tau_g}(g, \lambda)$ で与えられる。

(D). 下の表にあるように、 Z_g は $s = p_0 + i r_k$ ($k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$) で位数が $e_{k,g} \cdot E \cdot \chi_{\tau_g}(e) = i d_{k,g} \cdot \chi_{\tau_g}(e) \operatorname{vol}(G/\Gamma) \tilde{\kappa}$ の極あるいは零点を持つ。(自明な極あるいは零点とい

7.)

τ_q		$\rho_0 + ir_k$; the location of pole or zero
$ q \leq n$	n ; even	pole
	n ; odd	zero
$ q > n$	n ; even	$0 \leq k \leq (q - n - 1)/2$; zero
		$k \geq (q - n)/2$; pole
	n ; odd	zero

(E). $\operatorname{Re} s > 2\rho_0$ で Z_q は無限種表示を持つ。即ち、0でない定数 C が存在して

$$Z_q(s) = C(s - \rho_0)^{-\tilde{r}_q} \prod_{S \in \text{Prim.}} \prod_{\lambda \in L} (\det(I - T_r(s) \tau_q^M(h_k(s))^{-1/2} \lambda(h(s))^{-1} e^{-su_s})^{m_\lambda \tilde{k}}$$

ここで Prim. は Γ の primitive な元全体。 $P_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ とするとき $L := \{\lambda = \sum_{i=1}^t m_i \alpha_i \mid m_i \in \mathbb{Z}, m_i \geq 0\}$ で、 m_λ は λ を $\lambda = \sum_{i=1}^t m_i \alpha_i$ と表したときの表し方の数とする。また 3_λ は λ に対応する A の指標とする。

□

以上に関する詳しいことは preprint があるので参照して下さい。

文 献

- [1]. Gangolli, R. Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. 21, 1~41 (1977)
- [2]. Gangolli, R., Warner, G. On Selberg's trace formula. J. Math. Soc. Japan 27, 328~343 (1973)
- [3]. Knapp, A.W., Okamoto, K. Limits of holomorphic discrete series. J. Func. Analysis 9, 375-409 (1972)
- [4]. Knapp, A.W., Stein, E.M. Intertwining operators for semi-simple groups, II. Invent. Math. 60, 9-84 (1980)
- [5]. Muta, Y. On the spherical functions with one dimensional K -types and Paley-Wiener type theorem on some simple Lie groups. Rep. Fac. Sci. & Eng., Saga Univ. 9, 31~59 (1981)
- [6]. Scott, D. Selberg type zeta functions for the group of complex two by two matrices of determinant one. Math. Ann. 253, 177~194 (1980)
- [7]. Selberg, A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20, 47~87 (1956)

- [8]. Trombi, P.C. Harmonic analysis of $C^p(G.F)$ ($1 \leq p < 2$).
J. Func. Analysis. 40, 84 ~ 125 (1981)
- [9]. Wallach, N.R. On the Selberg trace formula in the
case of compact quotient. Bull. Amer. Math. Soc.
82, 191 ~ 195 (1976).
- [10]. Wakayama, M. Zeta functions of Selberg's type for
compact quotient of $SU(n,1)$ ($n \geq 2$). preprint.