

群れの数理モデル

早川美德, 水口毅[†], 佐野雅己, 下山直彦, 菅原研
東北大学電気通信研究所, [†] 京都大学大学院理学研究科

1 はじめに

多くの動物に見られる「群れ」は、運動性を備えた要素から成る多体系の振る舞いとして見た場合に実に多様な集団運動を呈する [1, 2, 3, 4]. たとえば、イワシなどの小型の魚は頭軸を揃え、互いの距離を一定に保つような群れを形成するし、スズメなど小型の鳥はかなりの個体数からなる集団で迷走する場合がある. ツルやカモなどの比較的大型の鳥は、良く知られているように秩序だった V 字型飛行をするが、これと対照的に、蚊はいわゆる蚊柱を形成し限られた空間に集合するものの、集団内部に秩序構造は見いだしにくい. こうした「群れ」においては、それぞれの種の生物学的特性は言うに及ばず、動物の個体サイズや運動性などの物理的特徴にも大きな差異がある. さらに、個体間どうしの相互作用も複雑で、単純なルールによっては記述し難いと思われる. しかしながら、生物と言えども一定の物理的な制約の下に運動しているのであって、「群れ」の集団運動様式と個体サイズなどの物理的特徴との間にはなんらかの関係が存在する可能性がある.

2 モデル

「群れ」の数理モデルはこれまでにいくつか提案されており [5, 6], そのほとんどが個体を駆動力と相互作用力を有する質点と仮定している. このような単純化の下で、個体の運動はニュートンの運動方程式で記述され、動物のサイズなどの物理的特徴は質点の質量を通じてしか考慮されない. こうしたモデリングによって得られる集団運動は概ね単純で、外部パラメータとして揺らぎを導入しない限り迷走や蚊柱に相当する複雑な運動は見いだされていない. ここでは適切な内部変数を導入することにより、この種のモデルを一層現実的で多様なものに拡張する. 以下では、ある内部状態と相互作用を有し自発的に運動する素子を Motive Element (ME) と呼ぶことにしよう.

一般に生物の内部状態は高度に複雑であって、その単純な表式は見だし難い. ここでは現象論的に頭軸方向を内部変数として導入する. 滑空する鳥から想像されるように、個体の速度ベクトルと頭軸方向は必ずしも一致しなくてもよい. そこで、我々は頭軸方向を独立な自由度として

許し、重心運動とカップルするようなモデルを考案した. よって、 i 番目の個体の状態を表現する変数は、位置ベクトル $\vec{r}_i$, 速度ベクトル $\vec{v}_i$, そして頭軸方向を表す単位ベクトル $\vec{n}_i$ である.

以下では簡単のため 2 次元系のみを考えることにする. 速度ベクトル $\vec{v}_i$ とある軸 (たとえば x 軸) とのなす角を ϕ_i , 頭軸ベクトル $\vec{n}_i$ の向く角度も同様に θ_i と表記し (すなわち $\vec{v}_i = |\vec{v}_i|(\cos \phi_i, \sin \phi_i)$, $\vec{n}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$), i 番目の ME の従う運動方程式を以下で与える.

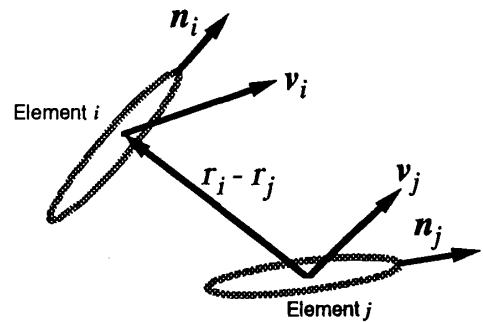


図 1: モデルの概念図

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\gamma \vec{v}_i + a \vec{n}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \vec{f}_{ij}, \quad (1)$$

$$\tau \frac{d\theta_i}{dt} = \sin(\phi_i - \theta_i) + \sum_{j \neq i} J_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2)$$

($i = 1, 2, \dots, N$). 全ての素子は初期条件を除いて同一である。式 (1) は、粘性抵抗と推進力および 2 体相互作用を持つ質量 m の質点のニュートン方程式である。 $\gamma \vec{v}_i$ はストークスの法則に従う粘性抵抗、 $a \vec{n}_i$ は頭軸方向に働く推進力をそれぞれ表す項である。式 (1) 右辺第 3 項は、ME 間の引力・斥力相互作用を表す。魚類での観察に基づき Breder[7] は個体間にファン・デル・ワールス型分子間力でよく近似されるような相互作用力が働いていることを見いだした。そこで、まず 2 体の中心力相互作用として

$$\vec{f}_{ij} = -c \left\{ \left(\frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{r_c} \right)^{-3} - \left(\frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{r_c} \right)^{-2} \right\} \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_c} \right) \quad (3)$$

を導入する。ここで r_c は最適個体間距離である。さらにここでは相互作用の方位依存性も考慮する。個体間相互作用は視覚等の情報に大きく依存するが、一般にこれらの感受性は体軸に対して異方的である。多くの場合、前方 (つまり $\vec{n}$ 方向) により高い感度を持つと考えられる。そこで、相互作用力の方位依存性として

$$\alpha_{ij} = 1 + d \frac{\vec{n}_i \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (4)$$

($0 \leq d \leq 1$) を考え、これと中心力 $\vec{f}_{ij}$ の積で 2 体相互作用を表現する。 $d = 0$ であれば、相互作用は等方的となる。

前述のように、一般には速度ベクトルの方向と頭軸方向が一致する必要はない。しかしながら、長時間に渡って両者が食い違うような運動は不自然なので、頭軸が速度ベクトルの方向に時間 τ で緩和するようなダイナミクスを仮定した ((2) 式)。ここでの緩和時間 τ は、翼やヒレの運動に特徴的な時間と同程度と考えられる。したがって、定性的には、小型の動物ほど τ は小さいであろう。

動物によっては、運動速度が小さい、ないし 0 であっても、互いに頭軸方向を揃えようとするものがある。こうした性質も考慮し、(2) 式右辺 2 項目 no 相互作用 J_{ij} を以下のように仮定した:

$$J_{ij} = k \left(\frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{r_c} \right)^{-1}. \quad (5)$$

ただし、以下では簡単のため、特に断らない限りこの頭軸揃えの効果は考慮しない。

3 数値シミュレーション

このモデルから得られる ME の集団運動を調べるために、計算機シミュレーションを行った。式 (1) を見ると、このモデルでは粘性項が慣性項に較べて支配的な場合とその逆の場合の二つの極限が考えられる。以下では主として粘性が支配的なパラメータ領域に着目して、モデルの振る舞いを調べた。

素子間の誘因力は長距離的であるため、推進力 a が大きすぎない限りどのような配置から始めても、それぞれの素子は互いに集合し最終的に一つのクラスターを形成する。クラスターが形成された後、素子は集団として定常的な運動を始める。多くの動物の群れにおいて、個体数 N は 10 程度の場合が多い。ここでも簡単のために、素子数が 10 程度の場合での集団運動について以下に挙げる。それぞれに対応する群れのパターンとその重心の軌跡を図に示した。

- 1 行進 (marching): 素子間相互作用の異方性が比較的小さい場合に生じやすく、素子は互いの距離を一定に保ち、三角格子様の配列を取る。クラスターの速度とその方向は一定で、揺らぎは非常に小さい。このような集団運動状態を行進 (marching) と呼ぶことにする。このモデルでは、慣性項および頭軸方向の記憶効果 (式 (2)) は、いずれも運動の軌跡を滑らかにする効果を持つ。そのため $m \rightarrow 0$ かつ $\tau \rightarrow 0$ であるような極限でシミュレーションを行うと、軌跡の滑らかさが損なわれ、安定な行進は見いだせない。他方で、頭軸の向き合わせの効果を導入すると (すなわち (5) 式で $k > 0$)、行進が現れやすくなる。

- 2 振動 (oscillating): 振動を伴う集団運動は、見かけ上いくつか大別できる。計算機シミュレーションでは (i) 直線的に添って波打つような軌跡を描いて運動する場合 (wavy motion), (ii) クラスタ外部のある中心点の周りを旋回する場合 (circling motion), (iii) クラスタ内部の中心点の周りを旋回しするうず巻き状の運動 (spiral motion), が見られた。振動状態にあるクラスタは行進状態に比べ摂動に対する安定性が弱く、波状運動や旋回・うず巻きは同じパラメータで共存することがある。
- 3 迷走状態 (wandering): 相互作用に異方性がある場合に多く見られ、クラスタは比較的秩序だった配列を取るものの、集団としての軌跡は不規則に振る舞う。集団の運動方向は間欠的に変化し、それと同期してクラスタ内部の素子の配列も変化する。集団の先頭にある素子にも入れ替わりが生じる。
- 4 蚊柱 (swarming): 迷走よりさらに乱れた状態で、クラスタ内部の秩序も見いだしにくくなる。迷走に較べて、それぞれの素子の速度ベクトルと頭軸の向きがばらつき、集団としての移動度が小さい。

集団運動の規則性という点からは、行進と振動状態は規則的運動、迷走と蚊柱状態は不規則運動とみなせる。以下で「行進-迷走転移」という場合には、規則的運動 (行進・振動) の不規則な運動形態 (迷走・蚊柱) への転移を意味する。

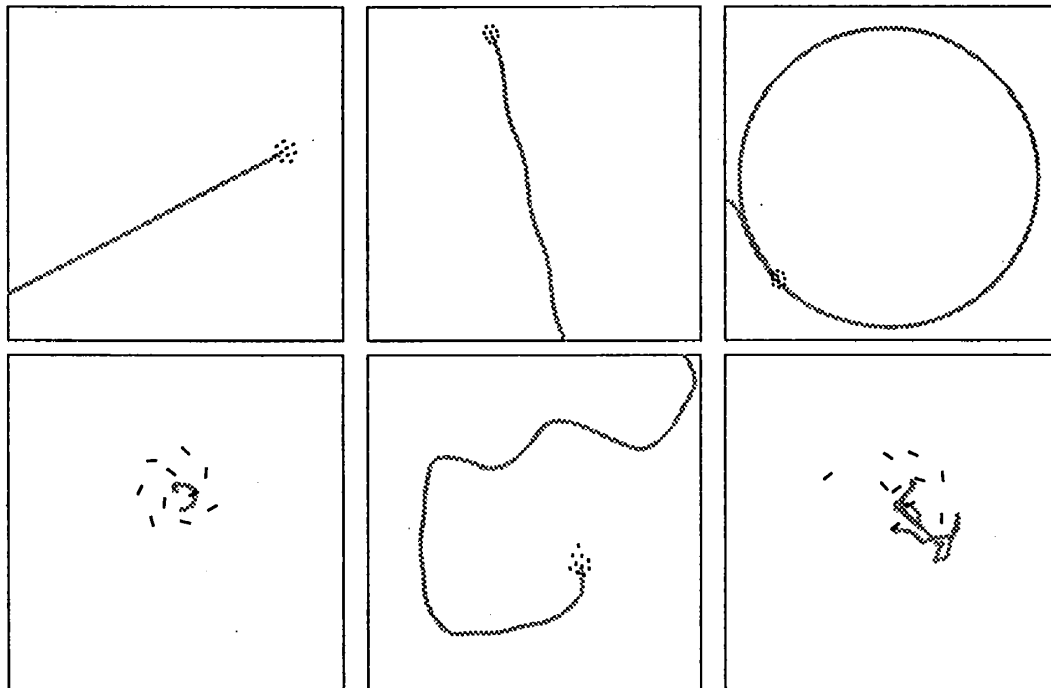


図 2: 粘性領域で見られる特徴的な集団運動。行進 (左上), 振動 i (中上), 振動 ii (右上), 振動 iii (左下), 迷走 (中下), 蚊柱 (右下)。短い実線は要素を, 灰色線は重心の軌跡を表す。

慣性項が重要となるようなパラメータ領域では、秩序だったクラスタ構造は見いだしにくくなる。異方性パラメータ d が十分 0 に近い場合に限り行進状態が得られるが、定常状態に至るのに要する時間は粘性領域での行進に較べて非常に長い。現在までのところ、特徴的な慣性領域に特徴的な集団運動は以下の 2 種類を見い出した。

- 5 慣性的行進: クラスターの速度は一定で, 安定しているが, クラスター内の素子の配列は不規則であるような行進状態. ただし, 素子の頭軸の向きは揃っている. 頭軸向き揃えの緩和時間 τ が大きい場合に現れやすい.
- 6 慣性的蚊柱: 頭軸方向, 素子間の位置関係ともに秩序はない. 素子間の平均距離は, f_{ij} で決まる最適距離 r_c の数倍以上大きく, クラスター内の密度は低い. 粘性領域での蚊柱状態と同様に, クラスター全体の移動度は小さい.

4 集団運動の解析

以上に述べた集団運動を定量的にクラス分けするためにモデル方程式を無次元化する. ここでは, 系に特徴的な量として長さ $L_0 \equiv r_c$, 素子に定常速度 $V_0 \equiv a/\gamma$, 時間 $T_0 \equiv L_0/V_0 = r_c\gamma/a$ を導入する. 種々の動物での観察事実から, 素子間距離 r_c は個体サイズと同程度であることが知られている [2, 8]. そこで, 無次元変数 v', t', r' を $v = V_0 v', t = T_0 t'$ and $r = L_0 r'$ によって導入すると, 式 (1) と (2) は

$$\frac{d\vec{v}'_i}{dt'} = \frac{1}{R} \left(-\vec{v}'_i + \vec{n}_i + \frac{1}{Q} \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \vec{f}_{ij} \right), \quad (6)$$

$$\frac{1}{P} \frac{d\theta_i}{dt'} = \sin(\phi_i - \theta_i) + \sum_{j \neq i} J_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (7)$$

と書き直せる. ここで P, Q, R は以下で定義される無次元パラメータである:

$$P \equiv \frac{r_c \gamma}{a \tau}, \quad (8)$$

$$Q \equiv \frac{a}{c}, \quad (9)$$

$$R \equiv \frac{ma}{\gamma^2 r_c} \quad (10)$$

パラメータ P は, 頭軸方向の緩和時間 τ と素子の「平均自由時間」 $r_c\gamma/a$ との比であり, Q は推進力と誘因力の比である. R は粘性力と慣性力の比であって, これは流体力学で使われるレイノルズ数に相当する量と言える. つまり $R \ll 1$ であれば系は粘性領域, $R \gg 1$ は慣性領域であるとみなせる. さらに, 相互作用の異方性の大きさ d と素子数 N も重要な無次元パラメータである.

次に, 行進-迷走転移に特に注目しつつ, シミュレーションの結果を整理する. 簡単のため, ここで議論は粘性領域に限る. 事実, 計算機シミュレーションは $R < 0.05$ を満足するパラメータに対して行われた.

素子数 N と異方性パラメータ d を固定し, 他のパラメータのうちの2つを独立に設定して多数回のシミュレーションを行うと, 行進-迷走転移を与える境界は経験的に $\gamma^* \sim \tau^*$, $a^* \sim \tau^{*-1/2}$, $c^* \sim \tau^*$, および $r_c^* \sim \tau^*$ を満足することが分かった. ここで $*$ は転移線を表す. 新たに導入した無次元パラメータ P, Q を使うと, これらの関係は簡単に $G^* \equiv P^*/Q^* = \text{const.}$ で与えられることが分かった. すなわち, 粘性領域でのシミュレーション結果を $P-Q$ 平面にプロットすると, 図 3(左) で示したように独立な試行結果に対して同じ位置に転移線が重なる.

この新しいコントロールパラメータ G は, d と N には依存してもよいから, 結局, 行進-迷走転移は $R \ll 1$ の場合

$$G = G_N^*(d) \quad (11)$$

で表現される線上で起こる.

図3(右)には $G-d$ 面にプロットした相図を示した。ここでも行進-迷走の境界が明らかに見えるが、迷走領域の中にも部分的に振動状態が埋め込まれている。この図から、迷走を得るには異方性パラメータ d が重要であることが分かる。 $\tau \rightarrow 0$ において $G \rightarrow \infty$ であるような条件であって、迷走は d が一定以上の大きさでないと見られず、 $d = 0$ では行進状態のみが得られた。こうした転移の詳細や、 N 依存性については今後の研究課題である。

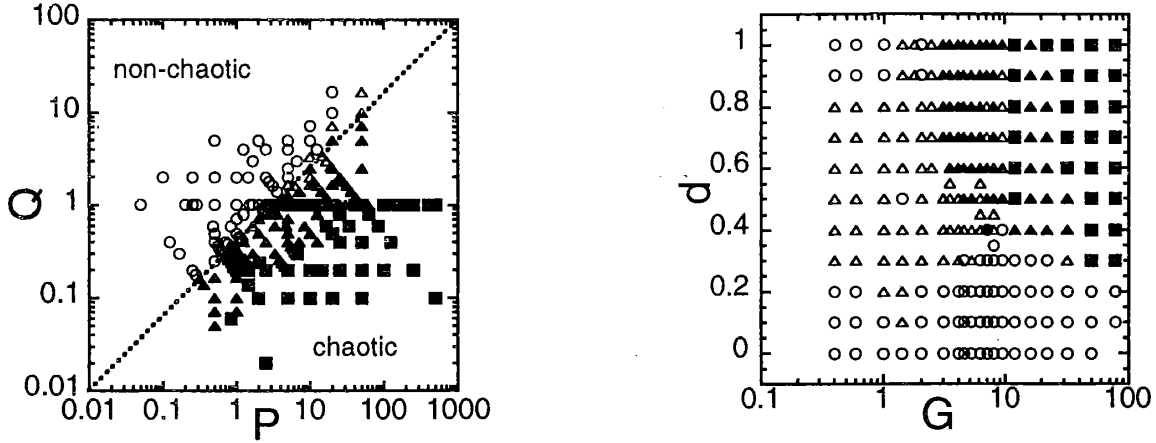


図3: 相図。パラメータ $P-Q$ 上での相図(左), パラメータ $G-d$ 上での相図(右)。図中の記号はそれぞれ ○: 行進, △: 振動, ▲: 迷走, ■: 蚊柱 を表す。

5 集団運動の解析

以上の異なる集団運動を定量的に特徴付けるためのよい量は何であろうか。一般に、秩序だったクラスターでは、各素子の速度空間での分散は小さく、例えば行進状態では全ての素子が同じ速度ベクトルを持つ。それに対して、迷走運動では速度空間での分散が大きく、さらに時間的にも速度は変動する。時刻 t での集団の平均速度を

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i(t),$$

とすると、各素子の平均速度からの平均二乗偏差は

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{N} \sum_i |\vec{v}_i(t) - \vec{V}(t)|^2 \right\rangle_t. \quad (12)$$

と書ける。

集団速度 $V(t)$ の時間揺らぎも同様にして定義できる:

$$\langle (\Delta V)^2 \rangle \equiv \langle |\vec{V}(t) - \langle \vec{V}(t) \rangle_t|^2 \rangle_t. \quad (13)$$

定義から、これらの平均量は秩序状態では0を与えその他の状態で正值を取ることから、これらを集団運動の無秩序パラメータとして採用する。

行進-迷走転移の近傍で、無秩序パラメータのパラメータ G 依存性を調べた結果を図4に示す。

ここで、データはいずれもクラスターの平均速度 $\langle V^2 \rangle^{1/2}$ で規格化されている。図では秩序-無秩序転移が明確で、これらの量はいずれも転移を特徴づけるに適切であることが分かる。

転移点を大きく越えると、クラスターの速度揺らぎクラスター平均速度と同程度になるため、両者の比 $\langle (\Delta V)^2 \rangle^{1/2} / \langle V^2 \rangle^{1/2}$ は一定値に収束する。他方で、クラスター内の個体の速度揺らぎは G とともに単調に増大する。数値計算の結果と合わせると、蚊柱は $\frac{\langle (\Delta v)^2 \rangle}{\langle V^2 \rangle} \gg 1$ であるような状態と考えられ、迷走状態から連続的に遷移している。

次に ME の集団運動のリアプノフスペクトルについて述べる。それぞれの要素は5つの自由度 (x, y, v_x, v_y, θ) を持つが、相互作用がない単独の要素はそのうちの3つ(位置の並進対称性と速度ベクトルの向きの任意性)は中立モードとなる。一方 N 体での行進においては、グループとしては独立した1要素のように振る舞うわけであるから、 $5N$ 自由度のうち3つは中立のままである。それ以外の $5N - 3$ 個のモードは負のリアプノフ指数を持ち、行進の安定性を表す。集団運動が乱れだすような条件では、これら中立モードが不安定化し迷走や蚊柱状態が見られる。

簡単な考察から、単一の要素ではリアプノフ数は大きい順に $(0, 0, 0, -\gamma/m, -(\gamma/m + 1/\tau))$ となるが、一般に $N > 1$ 体でのリアプノフスペクトルは数値計算によって求める他ない[9, 10]。数値計算によれば、単一個体での最小リアプノフ指数 $-(\gamma/m + 1/\tau)$ は N 個体の場合の下限値を与えている。以下に特徴的な集団運動とリアプノフスペクトルの関係をまとめる:

1. 行進および振動: 正の指数はなく、3ないし4の中立モードとそれ以外の安定モードからなる。特に相互作用が等方的に近い場合にはスペクトルに平らな部分が現れ、個体数 N にほぼ比例してその幅も広がる。
2. 迷走: 1つ以上の正の指数が現れ、3個程度の0とそれに続く負の指数からなるスペクトルとなる。スペクトルの平坦部分は消え、なめらかな曲線となる。
3. 蚊柱: 正の指数が個体数 N 程度に増加する。

集団運動の乱れの度合いを定量化するために、リアプノフスペクトルをもとにリアプノフ次元を求めた。図7では異方性パラメータを $d = 1$ に固定した場合の、次元のパラメータ G 依存性を示した。行進状態では中立モードの数を反映して $D_L = 3$ である。行進-迷走転移の後では、 G の増加とともにリアプノフ次元は連続的に増加しており、蚊柱状態は $D_L \simeq N$ であるような状態と見なせる。

6 考察

パラメータ G は少なくとも粘性領域においては集団運動をよく分類できる量であることが明らかとなった。ここで、現実の動物では G がどの程度の大きさであるかを大まかに見積もってみたい。 r_c が個

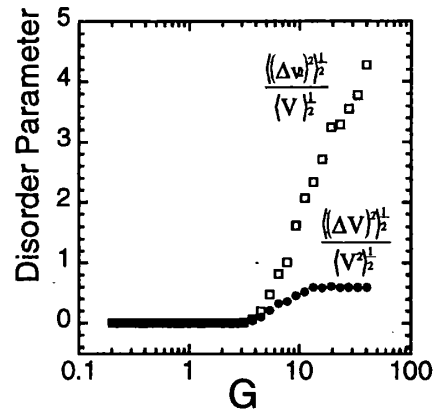


図 4: 無秩序パラメータの G 依存性

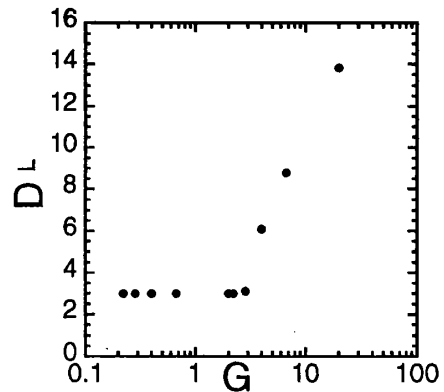


図 5: リアプノフ次元のパラメータ G 依存性。

体の特徴的な長さ L 程度であるとし、 a/γ が個体の移動速度 V であることを使って、パラメータ G を

$$G = \frac{cr_c\gamma}{a^2\tau} = \left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{L}{V\tau}\right). \quad (14)$$

と書き直してみる。ここで、頭軸の緩和時間 τ は、実際の動物にあつては羽ばたきの周期程度の時間スケールであろうと予想される。推進力と個体間引力の比に相当する量 $Q = a/c$ は、実験的に決定する事が難しい。しかしながら、個体が群れとして振る舞うためには引力と推進力が同程度であることが必要であるため、 Q は 1 のオーダーであろうと予想される。これらの仮定の下に、Crane, Sparrow, Mosquito についての特徴的な物理量の文献値は以下のとおりである [11].

- Crane: $M \sim 10^4$ [g], $\tau \sim 1$ [sec], $L \sim 10^2$ [cm], $V \sim 10^3$ [cm/sec].
- Sparrow: $M \sim 10^2$ [g], $\tau \sim 0.1$ [sec], $L \sim 10$ [cm], $V \sim 10^2$ [cm/sec].
- Mosquito: $M \sim 10^{-3}$ [g], $\tau \sim 10^{-3}$ [sec], $L \sim 10^{-1}$ [cm], $V \sim 1$ [cm/sec].

これらの値を用いて G を見積もると $G_{\text{crane}} \sim 0.1$, $G_{\text{sparrow}} \sim 1$, $G_{\text{mosq.}} \sim 10$. が得られる。

Crane などの大型鳥は秩序だった群れを形成し直線的に移動するのに比べ、Sparrow などの渡りをしない小型鳥は、大きな群れで迷走する。Mosquito は蚊柱を形成し、群れとしては殆ど移動しない。こうした経験的な事実と、行進-迷走転移は $G \sim 1$ 程度で生ずる計算機シミュレーションとの結果とは、定性的に一致していると考えられる。ただし、鳥程度の動物は非常に高いレイノルズ数の下で運動しているため、粘性領域での計算機シミュレーションをそのまま当てはめることは必ずしも正しくない。しかしながら、大型の動物ほど秩序だった群れ行動をしやすいという性質はレイノルズ数によらず一般的な傾向であろうと考えられる。

モデルをさらに単純化し、 $\tau = 0, d = 0$ の場合の系の振る舞いを考えると、(1) 式で相互作用項が $\sum \vec{f}_{ij} = -\nabla_{\vec{r}_i} \Phi(\{\vec{r}_j - \vec{r}_i\})$ と書けることから、この場合には時間と共に単調減少するリアプノフ関数が存在することが簡単に示せる。すなわち、このような条件の下では定常状態は単純な運動形態に限られる。異方性効果や頭軸のダイナミクスを導入すると系の振る舞いは自明ではなく、カオスとなる可能性がある。では、 $P \rightarrow \infty$ あるいは $R \rightarrow 0$ であるような極限での振る舞いはどうであろうか。

計算機シミュレーションによって、 $P \rightarrow \infty$ の場合にも $d \neq 0$ であれば迷走状態が得られた。しかし、このとき行進-迷走転移は不連続的であって、転移近傍では素子がクラスター内部で同期的に脈動するなど、特徴的な振る舞いを示す。

一方の極限 $R \rightarrow 0$ は、完全な粘性優位の状態であって、バクテリアなどの微小動物に対して妥当な条件と考えられる [12, 13, 14, 15]。慣性を全く考慮しない場合においても、これまでに述べたような迷走を含む多様な運動形態を得る事ができる。ただし、これまでのシミュレーションでは慣性領域に特徴的ないくつかの集団運動も観察されているため、 R が大きい系での振る舞いについても今後系統的に調べなければならない。

7 まとめ

種々の動物の群れにみられる集団運動を理解するため、比較的単純な数理モデルを提案し解析した。生物にも見られるような多様な振る舞いを再現することができ、運動形態と物理的パラメータとの関係を考察した。現象論的に導入した頭軸の向き揃えのダイナミクスと相互作用の異方性は、群の秩序構造形成にとって重要な役割をはたすことを示した。

参考文献

- [1] L. Edelstein-Keshet, in *Lecture Notes in Biomathematics*, **89** ed. by W. Alt and G. Hoffmann, (Berlin, Springer, 1990), pp.528 and reference there in.
- [2] 井上実, 魚群 – その行動 – (海洋出版, 1981).
- [3] B. L. Partridge, *Sci. Am.* **246** (1982) 90.
- [4] E. O. Wilson, *Sociobiology*, (Harvard, 1975).
- [5] H. Niwa, *J. Theor. Biol.* **171** (1994) 123.
- [6] M. Ali Doustari and N. Sannomiya, *Trans. ISCIE*, **5** (1992) 521; *Trans. Soc. Inst. Control Eng.* **29** (1993) 1388.
- [7] C. M. Breder, *Ecology*, **35** (1954) 361; *Fish. Bull.* **74** (1976) 471.
- [8] E. Shaw, *FAO Fish Rep. No.62* (1969) 217.
- [9] I. Shimada and T. Nagashima, *Prog. Theor. Phys.* **61** (1979) 1605.
- [10] J. P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617.
- [11] A. Azuma, *The biokinetics of flying and swimming* (Springer-Verlag, Tokyo, 1992).
- [12] E. O. Budrene and H. C. Berg, *Nature* **349** (1991) 630.
- [13] T. Matsuyama, R. M. Harshey and M Matsushita, *Fractals* **1** (1993) 302.
- [14] A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet, preprint (1995).
- [15] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1226.