

On some properties of  
Toeplitz operators

東北大 教養 吉 野 崇

$L^p$ ,  $p=2, \infty$  を、複素平面上の単位円周上の Lebesgue 可測函数の class とし、 $H^p$  を、その部分空間で負の Fourier 係数が 0 であるような函数の全体とする。 $L^\infty$  の函数  $\phi$  が inner とは、 $\phi$  は  $H^\infty$  の函数で  $|\phi|=1$  a. e. なる時である。 $\phi \in L^\infty$  に対して、 $L_\phi$  は、 $L_\phi f = \phi \cdot f$ ,  $\forall f \in L^2$  で定義される  $L^2$  上の Laurent operator を、 $T_\phi$  は、 $P$  を  $L^2$  から  $H^2$  への orthogonal projection とするとき、 $T_\phi = PL_\phi P$  で定義される  $H^2$  上の Toeplitz operator を表わすものとする。 $T_\phi$  が analytic とは、 $\phi \in H^\infty$  の場合である。

我々は、 $L_\phi$  の不変部分空間及び  $T_\phi$  の spectrum の性質を調べ、  
A. Brown<sup>+</sup> R. G. Douglas, A. Brown<sup>+</sup> P. R. Halmos, R. Goor, P. Hartman<sup>+</sup>  
A. Wintner 等によって既に知られている結果が、系として整理されることを示す。

$T_\phi$  の性質を調べる上で、次の結果に負う所が多い。

定理 1 (A. Beurling [1])  $T_\pi$  の  $\{0\}$  以外の不変部分空間  $M$  は、

$M = T_g H^2$ ,  $g$  は inner なる型で表わされる。

補助定理 1 (A. Brown<sup>4</sup> P. R. Halmos [3])  $H^2$  上の任意の有界線型作用素  $A$  が, an analytic Toeplitz operator なるための必要十分条件は,  $A$  が  $T_z$  と可換なることである。

補助定理 2  $T_z$  の不変部分空間は, 凡て, hyper-invariant, 即ち,  $T_z$  と可換な凡ての有界線型作用素の不変部分空間である。

補助定理 2 により次の結果を得る。

定理 2  $T_\phi$  が non-analytic ならば,  $H^2$  を含むような  $L_\phi$  の不変部分空間は,  $L^2$  それ自身しかない。

従って,

系 1 (A. Brown<sup>4</sup> P. R. Halmos [3])  $\phi \in L^\infty$  が non-constant ならば,  $H^2$  を含む  $L_\phi$  の reducing subspace は,  $L^2$  それ自身しかない。

特に,  $T_\phi$  が analytic ならば,  $L_\phi$  は  $T_\phi$  の normal extension だけから,

系 2  $\phi \in H^\infty$  が non-constant ならば,  $L_\phi$  は  $T_\phi$  の minimal normal extension である。

又,  $(I-P)L_\phi^*(I-P)$  を  $L^2 \ominus H^2$  上の Toeplitz operator とみなしてよいことに注意すれば, 定理 2 によって

系 3  $T_\phi$  が non-analytic ならば,  $H^2$  に含まれる  $L_\phi$  の不変部分空間は,  $\{0\}$  だけである。

系3の応用として次を得る。

定理3  $\|T_\phi\| \leq 1$  なる  $T_\phi$  に対して、 $\{f \in H^2 : \|T_\phi^n f\| = \|f\|, n=0,1,2,\dots\} \neq \{0\}$  ならば、 $\phi$  は inner である。

系4 (R. Geor [4])  $\phi \in L^\infty$  が non-constant で  $\|T_\phi\| \leq 1$  ならば、 $T_\phi$  は completely non-unitary, 即ち、unitary part を含まない。

系5 (A. Brown<sup>4</sup> P.R. Halmos [3])  $T_\phi$  が unitary ならば、 $\phi$  は、絶対値1の constant である。

系4と系5とから、我々は、次の問題に到達する。

問題 凡ての non-normal Toeplitz operator は、completely non-normal か? 即ち、normal part を含まないか?

この問題の partial answer として次を得る。

系6  $\phi \in H^\infty$  が non-constant ならば、 $T_\phi$  は completely non-normal である。

系7  $T_\phi$  が norm-achieved (i.e.,  $\exists f \in H^2, f \neq 0; \|T_\phi f\| = \|T_\phi\| \|f\|$ ) で、hyponormal (i.e.,  $T_\phi^* T_\phi \geq T_\phi T_\phi^*$ ) ならば、 $\phi$  は inner function の scalar 倍である。

系7の特別な場合として、

系8 (A. Brown<sup>4</sup> P.R. Halmos [3])  $T_\phi$  が isometric になるための必要十分条件は、 $\phi$  が inner になることである。

次に、定理1によって、次の結果が得られる。

定理4  $\phi \in L^\infty$  が non-constant ならば、 $\sigma_p(T_\phi) \cap \overline{\sigma_p(T_\phi^*)} = \emptyset$ , ここ

で、 $\sigma_p(T_\phi)$  は、 $T_\phi$  の point spectrum を、 $\overline{\sigma(T_\phi^*)}$  は、 $\sigma(T_\phi^*)$  の complex conjugate を表わすものとする。

従って、

系 9 (A. Brown & P. R. Halmos [3])  $0$  と  $I$  以外の idempotent Toeplitz operator はない。

系 10 (A. Brown & R. G. Douglas [2])  $T_\phi$  が、non-zero で、partial isometric ならば、 $\phi$  が又は  $\bar{\phi}$  が inner である。

系 11  $\phi \in L^\infty$  が non-constant で、 $T_\phi$  が hyponormal ならば、 $\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$  である。

系 11 の特別な場合として、

系 12 (P. Hartman & A. Wintner [5])  $\phi \in L^\infty$  が non-constant で  $T_\phi$  が self-adjoint ならば、 $\sigma_p(T_\phi) = \emptyset$  である。

$H^2$  上の an isometry  $W$  が、 $H^2$  上の nearly normal operator  $A$  (i.e.,  $A$  は  $A^*A$  と可換) と可換ならば、 $A = V|A|$  を  $A$  の polar 分解とすると、 $W$  は、 $V$  及び  $|A|$  と可換だから (see [7]), 補助定理 1 と系 10 とから、次を得る。

系 13 (T. Itô & T. K. Wong [6])  $T_\phi$  が、nearly normal で、analytic ならば、 $\phi$  は、inner function の scalar 倍である。

## 文 献

- [1] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81 (1949), 239 - 255.
- [2] A. Brown<sup>†</sup> R.G. Douglas, Partially isometric Toeplitz operators, Proc. A.M.S. 16-4 (1965), 681 - 682.
- [3] A. Brown<sup>†</sup> P.R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, J. Reine Angew. Math. 213 (1963), 89 - 102.
- [4] R. Goor, On Toeplitz operators which are contractions, Proc. A.M.S. 34-1 (1972), 191 - 192.
- [5] P. Hartman<sup>†</sup> A. Wintner, The spectra of Toeplitz's matrices, Amer. J. Math. 76 (1954), 867 - 882.
- [6] T. Itô<sup>†</sup> T.K. Wong, Subnormality and quasinormality of Toeplitz operators, Proc. A.M.S. 34-1 (1972), 157 - 164.
- [7] T. Yoshino, On the commuting extensions of nearly normal operators, Tôhoku Math. J. (to appear).