

D加群と群の表現論

東北大学理学部 谷崎俊之 (T. Tanisaki)

D加群の理論の“源流”を学ぶうえでもっとも適切な題材のひとつとして次をとりあげる。

“半単純 $\mathbb{C}$ -環の既約最高ウェイト加群の指標公式”

おおよそ Brylinski-柏原 ([BK]), Beilinson-Bernstein ([BB1]) にある Kazhdan-Lusztig 予想 ([KL1]) の証明である。

以下の内容は次のとおり。

- §1. Lie 環の表現と D加群はどのように結ぶのか?
- §2. 旗多様体上の line bundle に関する復習。
- §3. Beilinson-Bernstein category 同値
- §4. 群作用をもつ Lie 環の表現と群作用をもつ D加群
- §5. Kazhdan-Lusztig 予想とは何か?
- §6. Kazhdan-Lusztig 予想の証明

§1 ~ §3 では Beilinson-Bernstein category 同値に ついて述べる。
大雑把に 113 と

$$\{\text{半単純 Lie 環のある種の表現}\} \simeq \{\text{旗多様体上の D-加群}\} \quad \dots (0.1)$$

113 category 同値 が 成立すると 113 も の であるが、(0.1) 半単純 Lie 環の表現に関するある種の問題は D-加群に関する問題に直つて (まづ) 事になる。(0.1) の証明では D-加群についての難しい事は無い。計数幾何及び半単純群に関する常識的なことと D_X の定義がゆから 114 は十分である。

§4 では (0.1) の equivariant version について述べる。

§5, §6 では (0.1) の応用として指標計算の証明を述べるが、ここでは regular holonomic system, Riemann-Hilbert 対応等に関する深い結果が用いられる。

§1. Lie 環の表現と D-加群はどのように結ぶのか?

1.1 D-affine variety

次のことはよく知られている。

「 $X \in \text{affine algebraic variety}$, $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \in \text{その関数環}$ とするとき, abelian category の同値:

$$\{\text{有限生成 } R\text{-module}\} \simeq \{\text{coherent } \mathcal{O}_X\text{-module}\} \quad \text{--- (1.1)}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ M & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \otimes M \end{array}$$

$$\Gamma(X, M) \longleftarrow M$$

が成立する。」

そこで $\mathcal{O}_X$ を $D_X = (\text{微分作用素の環})$ に置きかえるとどうなるだろう?

$X \in \mathbb{C}$ 上の non-singular algebraic variety とするとき, ともに

2つの functor :

$$\bullet \{\text{有限生成 } \Gamma(X, D_X)\text{-module}\} \rightarrow \{\text{coherent } D_X\text{-module}\} \quad \text{--- (1.2)}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ M & \longrightarrow & D_X \otimes M \end{array}$$

$$\bullet \{\text{coherent } D_X\text{-module}\} \rightarrow \{\text{有限生成 } \Gamma(X, D_X)\text{-module}\} \quad \text{--- (1.3)}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ M & \longrightarrow & \Gamma(X, M) \end{array}$$

は定義される。こいつが互いに逆の functor となるのはどうやって

であるのか? affine variety に対して (1.1) が成立する理由は

次の事実である(と思える)。

「 $X \in \text{affine variety}$, $M \in \text{coherent } \mathcal{O}_X\text{-module}$ であるとき

$$(a) H^c(X, M) = 0 \quad (\forall c > 0)$$

(b) M は $\mathcal{O}_X$ -module として $\Gamma(X, M)$ で生成される。」

そこで,

定義 1.1 $\mathbb{C}$ 上の non-singular variety X が D -affine であるとは、
任意の coherent D_X -module $\mathcal{M}$ について次の二条件が成立することを
いふ。

$$(a) H^i(X, \mathcal{M}) = 0 \quad (\forall i > 0)$$

(b) $\mathcal{M}$ は D_X -module として $\Gamma(X, \mathcal{M})$ で生成される。」

D -affine variety たる (1.2), (1.3) は互いに D の $\otimes$ functor と
同値 category 同値が成立する。問題はどのような X が D -affine に
なるかであるが, affine variety, projective space $\mathbb{P}^n$ は D -affine に
なる事がわかってゐる。一般的に解答は (筆者は) 知らない。

§3 で次を示す。

定理 1.2 ([BB17]) 連結半単純群の旗多様体 X は D -affine
である。よって次の category 同値が成立する。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{有限生成 } \Gamma(X, D_X)\text{-module}\} & \simeq & \{\text{coherent } D_X\text{-module}\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & D_X \otimes M \\ \Gamma(X, M) & \xleftarrow{\quad \quad \quad} & M \end{array} \quad \lrcorner$$

G を $\mathbb{C}$ 上の 連結半単純代数群 とすると, G の 連結可解部分群
のうちで 極大なもの B が 共役を除いて $B \sim B'$ である。この B を G の

Borel 部分群と呼び $X = G/B$ を G の旗多様体と見る。 X は non-singular projective variety である。

例 1.3 $G = SL(m, \mathbb{C}) = \{g \in GL(m, \mathbb{C}) \mid \det g = 1\}$ とするとき,
 $B = \{T \equiv \text{上三角行列で } G \text{ に属するもの}\}$ は G の Borel 部分群である。おと

$$X = \{(V_m \supset V_{m-1} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0) \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^m \text{ の } i \text{ 次元部分空間}\}$$

が G の旗多様体となる (G の X への作用は推移的で、ある一点の安定部分群が B と一致する)。特に $G = SL(2, \mathbb{C})$ ならば $X = \mathbb{P}^1$ である。」

1.2 Lie 環と微分作用素

群 G が non-singular variety X に作用していると見る。

このとき G は X 上の関数の空間 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ に

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) \quad (g \in G, x \in X, f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

で作用する。より正確には $g : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,gx}$ が定まる。これを

微分は Lie 環の準同型

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\Phi} \Gamma(X, \mathfrak{g}_X)$$

$$((\Phi(A))(f))(x) = \frac{d}{dt} f((\exp(tA))^{-1} \cdot x) \Big|_{t=0}$$

$$(A \in \mathfrak{g}, x \in X, f \in \mathcal{O}_{X,x})$$

が得られる。ここで $\mathfrak{g} = \text{Lie } G = (G \text{ の Lie 環})$, $\mathfrak{g}_X$ は X 上の vector field

の環である。さらに $\mathfrak{g}, \oplus x$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を associative algebra の準同型

$$U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi} \Gamma(\alpha, D_x) \quad \dots (1.4)$$

が得られる。且し $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の包絡環である。

$U(\mathfrak{g})$ と親しくなるための

(i) 勝手な associative algebra は $[x, y] = xy - yx$ により Lie 環と見える。 $U(\mathfrak{g})$ は、単位元 1 を含む associative algebra であって $\mathfrak{g} \in \text{Lie}$ 部分環と包含するものとして universal なるものである。より正確には次のとおり。単位元 1 を含む associative algebra $\mathcal{A}$ と Lie 環 $\mathfrak{g}$ の準同型 $\mathfrak{g} \xrightarrow{f} \mathcal{A}$ の組 $(\mathcal{A}, f)$ を考える。このうち $(\mathcal{A}, f)$ のうちで universal なもの (あるいは他の $(\mathcal{A}', f')$ からあるとき associative algebra homomorphism $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{A}'$ で $h \circ f = f'$ なるものがただ一つ存在するもの) が同型を除いてただ一つ存在する。この $\mathcal{A} \in U(\mathfrak{g})$ と書く。

(ii) (PBW) $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ は injective。また $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{C}$ -basis $\{A_1, \dots, A_m\} \in \mathfrak{g}$ と固定するとき $\{A_1^{j_1} \cdots A_m^{j_m} \mid j_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}$ -basis になる。

(iii) 定義から明かに

$$\{\mathfrak{g} \text{ の表現} \} \simeq \{U(\mathfrak{g})\text{-module}\}$$

そこで π に戻して, 一般に (1.4) は同型ではないが, G, X が
 Σ の Σ 上の連結単純群, Σ の旗多様体のときには, (1.4) が
 正しい性質を持つことを説明する。

$U(\mathfrak{g})$ の中心 Z と書く。 Z から $\mathbb{C}$ への algebra homomorphism
 の事を central character と呼ぶ。特に

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\chi_g} & \mathbb{C} \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \leftarrow (\text{PBW}) \\ U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{g} \end{array}$$

により定まる $\chi_g \in \text{trivial central character}$ といい (その意味はあとで
 わかる (3.2))。 $U(\mathfrak{g})$ -module M に対して

$$z \cdot m = \chi(z)m \quad (\forall z \in Z, \forall m \in M)$$

とある central character χ があるとき, M は central character χ を
 持つという。 Schur の Lemma により irreducible $U(\mathfrak{g})$ -module は
 central character を持つ。

3.2 次が示される。

定理 1.4 ([BB1]) G が $\mathbb{C}$ 上の連結単純群で, X が
 その旗多様体のとき,

(i) $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi} \Gamma(X, D_X)$ は surjective.

(ii) $\text{Ker } \Phi = U(\mathfrak{g}) \text{Ker } \chi_g$ $\square$

定理 1.2, 1.4 D13

系 1.5 ([BB1]) $G, X \in$ 定理 1.4 の条件とあるとき, 次の category 同値が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trivial central character } \varepsilon \neq 1 \\ \text{有限生成 } U(\mathfrak{g})\text{-module} \end{array} \right\} \simeq \{ \text{coherent } D_X\text{-module} \}$$

注意 1.6 Trivial ではない central character $\varepsilon \neq 1$ の場合を扱うためには, D_X の代わりに $D_X \otimes U(\mathfrak{g})$ を考えればよい ([BB1, 2], §3)。

例 1.7 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, $X = \mathbb{P}^1$ とする。 $\mathbb{P}^1$ の局所座標系を次のようにとる。

$$\mathbb{P}^1 = \{(x) \mid x \in \mathbb{C}\} \cup \{(z) \mid z \in \mathbb{C}\} \quad x = \frac{1}{z}$$

G の $\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{C}^\times$ は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (x) = \left(\frac{cx+dx}{a+bx} \right) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (z) = \left(\frac{az+b}{cz+d} \right)$$

で与えられる。また

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{ A \in M(2, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} A = 0 \} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E_+ \oplus \mathbb{C}E_-$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。この場合に Φ を具体的に計算してみよう。

$$\begin{aligned}
((\Phi(H))(f))(x) &= \frac{d}{dt} f\left(\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot x\right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} f(e^{2t}x) \Big|_{t=0} \\
&= 2x \left(\frac{df}{dx}\right)(x)
\end{aligned}$$

$$\text{よって } \Phi(H) = 2x \frac{d}{dx} = -2z \frac{d}{dz} \quad (x = \frac{1}{z}, \frac{d}{dx} = -z^2 \frac{d}{dz}).$$

$$\text{同様に } \Phi(E_+) = x^2 \frac{d}{dx} = -\frac{d}{dz}$$

$$\Phi(E_-) = -\frac{d}{dx} = z^2 \frac{d}{dz}.$$

$$= a \text{ 場合 } \mathfrak{g} = \mathbb{C}[\Omega], \Omega = (H-1)^2 + 4E_+E_- = (H+1)^2 + 4E_-E_+ \text{ とする}$$

ことが知られている。 $\chi_{\mathfrak{g}}(\Omega) = 1$ であるが $\Phi(\Omega) - 1 = 0$ とするとも

おこめる。」

§2. 旗多様体上の line bundle に関する復習

この節は定理 1.2, 1.4 を証明するための準備である。

以下 $G \in \mathbb{C}$ の連結, 単連結な半単純代数群, $B \in G$ a Borel 部分群, $X = G/B = (G \text{ a 旗多様体})$ とする。単連結性と仮定するのは話を簡単にするためで本質的ではない。

2.1 G の作用をもち line bundle

$X = G/B$ 上の category 同値:

$$\begin{array}{ccc} \{ G\text{-equivariant vector bundle} \} & \simeq & \{ \text{有限次元 } B\text{-module} \} \quad \dots (2.1) \\ \text{on } X & & \downarrow \\ & \psi & \\ L & \longleftrightarrow & (L \in B \text{ の fiber}) \end{array}$$

がある。特に

$$\{ G\text{-equivariant line bundle} \} \simeq \{ 1\text{-次元 } B\text{-module} \} \quad \dots (2.2)$$

on X

である。 $U \in B$ の unipotent radical, $T \in B$ に含まれる G の極大 torus とあると $B = TU$, $T \cap U = \{1\}$, $B \triangleright U$ であるが, U は unipotent T は torus ($\mathbb{C}^\times$ の直積) となる。

$$\begin{array}{ccc} \{ B \text{ の既約表現} \} & \simeq & \{ T \text{ の既約表現} \} \\ \parallel & & \parallel \\ \{ B \text{ の } 1\text{-次元表現} \} & \simeq & \{ T \text{ の } 1\text{-次元表現} \} = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \end{array}$$

となる。従って $P = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ となる。

$$\{ G\text{-equivariant invertible } \mathcal{O}_X\text{-module} \} \simeq P = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \quad \dots (2.3)$$

である。 $T \simeq (\mathbb{C}^\times)^{\dim T}$ となる。 $P \simeq \mathbb{Z}^{\dim T}$ である。 $\lambda \in P$ に対して

$$\mathcal{O}(\lambda) = \left(\begin{array}{l} \lambda \text{ に対して } G\text{-equivariant line bundle の section } s > 0 \\ G\text{-equivariant invertible } \mathcal{O}_X\text{-module} \end{array} \right)$$

となる。

2.2 root 系と Weyl 群

G の極大 torus $T \in \mathcal{C}$ とし $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\mathfrak{t} = \text{Lie } T$ とする。微分
 あることは、 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{C}^*) & \hookrightarrow & \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \\ \parallel & & \parallel \\ P & \hookrightarrow & \mathfrak{t}^* \\ \downarrow \text{SI} & & \downarrow \text{SI} \\ \mathbb{Z}^{\dim T} & & \mathbb{C}^{\dim T} \end{array}$$

が得られ、 $\mathfrak{t}^* = P \otimes \mathbb{C}$ である。視覚的に(あるいは心理的に)
 わかり易くするために $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^* = P \otimes \mathbb{R} \subset \mathfrak{t}^*$ を導入する。 P は $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$ の $\mathbb{Z}$ -
 lattice, $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{R}$ -form である。

(a) root 系

G の $\mathfrak{g}$ 上の adjoint action $\in T$ に制限して $\mathfrak{g}$ は T -module
 となる。このとき $\mathfrak{g}$ は T -module として次のように分解する
 ことが知られている。

$$\left(\begin{array}{l} \Delta \subset P - \{0\} \subset \mathfrak{t}_\mathbb{R}^* \text{ かつ } \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g} \quad (\alpha \in \Delta) \text{ が定まる} \\ \bullet \mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right) \\ \bullet \mathfrak{g}_\alpha \text{ は } T\text{-stable な 1次元 subspace で } \mathfrak{g}_\alpha \text{ 上の } T\text{-表現は } \alpha \text{ に} \\ \text{対応する} \end{array} \right.$$

$\Delta \in (G, T)$ の root 系, $P \in (G, T)$ の weight lattice とする。

(b) 内積

$\mathfrak{g}$ 上 G -不変な non-degenerate symmetric bilinear form
 が $\langle x, y \rangle = \text{Tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y))$ により定まるが, $\chi \in \text{Killing form}$
 とし $((\text{ad}(x))(z) = [x, z])$. $\langle, \rangle$ は G -不変なので 特異に T -不変。
 かつ

$$\langle \alpha, \alpha_d \rangle = 0 \quad (\alpha \in \Delta), \quad \langle \alpha_d, \alpha_{d'} \rangle = 0 \quad (\alpha, \alpha' \in \Delta, d+d' \neq 0).$$

従って $\Delta = -\Delta$ で $\langle, \rangle$ の $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $\alpha_d \times \alpha_{-d}$ ($d \in \Delta$) $\cap$ の制限は
 non-degenerate.

よって $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ は同型と見做せる。よって $\mathfrak{g}^*$ 上 non-degenerate
 symmetric bilinear form $\langle, \rangle$ が定まる。 $\langle, \rangle$ の $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ $\cap$ の制限
 は $\mathbb{R}$ -正定値 (かも正定値である。 $\chi \in \langle, \rangle$ と書く。

G は単連結と仮定して T ので, 次が知られている。

$$P = \{ \lambda \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* \mid \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha \in \Delta) \} \quad \dots (2.4)$$

(c) Weyl 群

$W = N_G(T)/T \in (G/T)$ の Weyl 群 とし。 W の T への作用
 を微分して, W の $\mathfrak{g}$ への線型な作用が定まる。 χ の反対称表現と
 して W の $\mathfrak{g}^*$ への作用が定まる。 χ の作用は全て faithful である。
 また W は $\Delta, P, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ を保ち, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ 上の内積 $(,)$ は不変になる。
 特に,

$$W \subset O(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+) \subset GL(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+) \subset GL(\mathfrak{g}^+) \quad \dots (2.5)$$

とすることが出来る。

$d \in \Delta$ に関する鏡影変換 $S_d \in O(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+)$ とする。おぼしめす

$$S_d(x) = x - \frac{z(x, d)}{(d, d)} d \quad (x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+)$$

とすると次が知られている。

$$W = \langle S_d \mid d \in \Delta \rangle \quad \dots (2.6)$$

(d) 正 root 系, 単純 root 系

Δ の部分集合 $\Pi = \{d_1, \dots, d_l\}$ で次の性質を満たすものが W -共役を除いてただ一つ定まる。

(i) Π は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+$ の $\mathbb{R}$ -basis

$$(ii) \Delta \subset \left(\sum_{i=1}^l \mathbb{Z}_{\geq 0} d_i \right) \cup \left(\sum_{i=1}^l \mathbb{Z}_{\leq 0} d_i \right)$$

この Π を単純 root 系と呼び、 $\Delta^+ = \Delta \cap \left(\sum_{i=1}^l \mathbb{Z}_{\geq 0} d_i \right)$ を正 root 系と呼ぶ。 $\Delta^- = \Delta \cap \left(\sum_{i=1}^l \mathbb{Z}_{\leq 0} d_i \right)$ とおくと $\Delta^- = -\Delta^+$, $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ である。

以下の事が知られている。

• $\mathfrak{b} = \mathfrak{g} \oplus \left(\bigoplus_{d \in \Delta^+} \mathfrak{g}_d \right)$ は G がある Borel 部分群 B の Lie 環で

$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{d \in \Delta^+} \mathfrak{g}_d$ は B の unipotent radical の Lie 環になる。

• $\mathcal{C}^+ = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+ \mid (x, d) \geq 0 \text{ } (\forall d \in \Delta^+)\}$
 $\mathcal{C}^- = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+ \mid (x, d) \leq 0 \text{ } (\forall d \in \Delta^+)\}$) は $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ による W の $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^+$ への作用

に関する基本領域。

- $S = \{s_{\alpha_i} \mid i=1, \dots, l\}$ は W を生成し, (W, S) は 11 の W の Coxeter 系 1-1 である。この S は W の生成系 1-1 の "S" 性質をみたす。

1-1 $W \in W$ 1-1 に対して $l(w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$l(w) = \min \{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists s_1, \dots, s_j \in S \text{ s.t. } w = s_1 \dots s_j\}$$

1-1 定義する。 $l(1) = 0$, $l(s) = 1$ ($s \in S$) である。 $l(w)$ の最大となる $w \in W$ は $1-1 \rightarrow$ である。 $w_0 \in W$ と w_0 は $w_0(e^+) = e^-$ 1-1 である。 $w_0(1) = 1^-$ 1-1 である。

例 2.1 $G = SL(n, \mathbb{C})$ 1-1 $T = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \mid a_1 \dots a_n = 1 \right\}$ 1-1 である。

1-1 $\dim \mathfrak{g}^+ = n-1$ である。 $\mathfrak{g} = \Delta, \Pi, \Delta^+, P, W$ は次のように思える。

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} e_i \quad \mathfrak{g}^+ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i e_i \in \mathfrak{g} \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}$$

$$\Delta = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$$

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1} \mid i=1, \dots, n-1\}$$

$$\Delta^+ = \{e_i - e_j \mid i < j\}$$

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i e_i \mid a_i - a_j \in \mathbb{Z}(\forall i, j), \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}$$

$$W = \mathbb{G}_m = (m\text{-次対称群}) \quad \alpha\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i e_{\sigma(i)}$$

$G = SL(2, \mathbb{C})$ の場合 $\dim \mathfrak{g}^+ = 1$ 。 $\Pi = \{d\}$ 1-1 $\Delta = \{1d\}$

$$P = \frac{1}{2}\mathbb{Z}d, \quad W = \{1\}$$

$G = SL(3, \mathbb{C})$ のとき

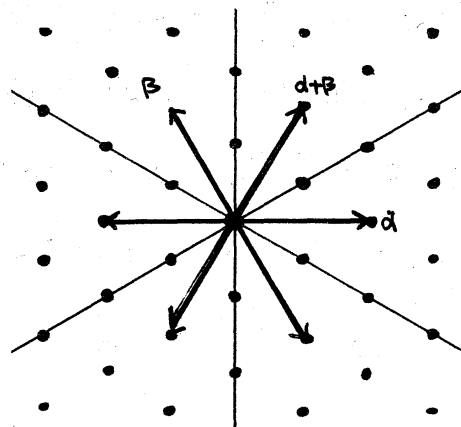
右図で

$$\Delta = \{\pm \alpha, \pm \beta, \pm(\alpha + \beta)\}$$

$$\Pi = \{\alpha, \beta\}$$

$$\Delta^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$$

$$P = \{\bullet \text{ の点 } \}$$



$\mathcal{W}$ は 3 つの超平面に属するあり返に生成される。

2.3 G の有限次元既約表現

V は G の有限次元既約表現である。 T は reductive ならば、 V は T -module として完全可約である。従って T -module として分解

$$V = \bigoplus_{\mu \in P} V(T, \mu) \quad (V(T, \mu) \text{ は } \mu \text{ に対応する既約 } T\text{-module の和})$$

がある。 $V(T, \mu) \neq 0$ なる $\mu \in P$ は V の weight と呼ばれる。また

$$\text{ch}(V) = \sum_{\mu \in P} \dim V(T, \mu) e^{\mu} \in \mathbb{Z}[P]$$

は V の指標と呼ぶ。

P 上の半順序 $\leq$ は $[\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha]$ により定める。

これは G の作用を知らずに決まる。

定理 2.2 (Cartan-Weyl の分類定理)

V を G の有限次元既約表現とすると, V の weight のうちで
(上で定義した半順序に関して) 極大なもの μ_V , 極小なもの ν_V が
それぞれただ一つだけあり $\mu_V \in P^+ := \mathcal{C}^+ \cap P$, $\nu_V \in P^- := \mathcal{C}^- \cap P$,
 $\nu_V = w_0(\mu_V)$ である。さらに

$$\begin{array}{ccc} P^- & \xrightarrow{\sim} \{G \text{ の有限次元既約表現} \} / \cong & \xrightarrow{\sim} P^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu_V & \xleftarrow{\quad} V & \xrightarrow{\quad} \mu_V \end{array}$$

である。」

記号 G の有限次元既約表現 V で $\mu_V = \mu$ となるもの $\in V^\mu$, $\nu_V = \nu$ と
なるもの $\in V_\nu$ と書く。」

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ とおくと $\frac{2(\alpha, \rho)}{(\alpha, \alpha)} = 1$ ($\forall \alpha \in \Pi$) が成り立つ。特に $\rho \in P^+$
である。

定理 2.3 (Weyl の指標公式)

$$\text{ch}(V^\mu) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\mu + \rho) - \rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})} = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\mu + \rho)}}{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w\rho}}$$

$$\text{ch}(V_\nu) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\nu - \rho) + \rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})} = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{w(\nu - \rho)}}{\sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} e^{-w\rho}} \quad \text{」}$$

2.4 Borel-Weil-Bott の定理

$\lambda \in P$ に対して $\mathcal{O}(1)$ は G -equivariant invertible $\mathcal{O}_X$ -module だったのを $\Gamma(X, \mathcal{O}(1)) = H^0(X, \mathcal{O}(1))$ は

$$(g \cdot s)(x) = g \cdot (s(g^{-1}x)) \quad (g \in G, x \in X, s \in \Gamma(X, \mathcal{O}(1)))$$

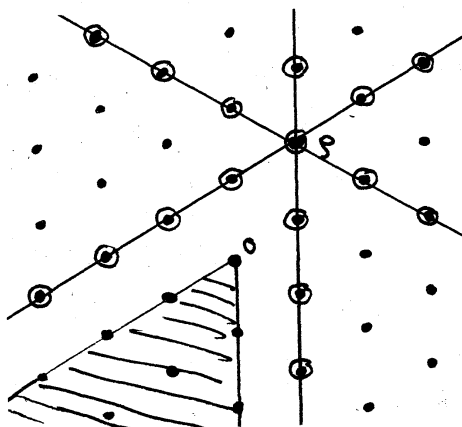
により G -module になる。同様 $H^i(X, \mathcal{O}(1))$ も G -module になる (X は projective だったので $\dim H^i(X, \mathcal{O}(1)) < \infty$)。 $H^i(X, \mathcal{O}(1))$ の G -module structure を記述するために記号の準備をする。

W の $\mathbb{C}^*$ の new-action $\star \in W \star x = W(x \cdot s) + s$ で定義する (原点 $\in s$ にうつしたものを)。この $\star$ -action に関する鏡影面の Γ にはある P の元 $\in P_{\text{sing}}$ と書く。すなわち

$$\begin{aligned} P_{\text{sing}} &= \{ \lambda \in P \mid \frac{x(\lambda \cdot s, d)}{(d, d)} = 0 \quad (\exists d \in \Delta) \} \\ &= \{ \lambda \in P \mid s_d \star \lambda = \lambda \quad (\exists d \in \Delta) \} \\ &= \{ \lambda \in P \mid W \star \lambda = \lambda \quad (\exists W \in W, W \neq 1) \} \end{aligned}$$

また $P_{\text{reg}} = P - P_{\text{sing}}$ と書く。

例えば $G = SL(3, \mathbb{C})$ のときは、右図で
 ①の点が P_{sing} の元、②は λ_3 の点で
 P の元で、 $\star$ -action は ①の点を②に
 3本の超平面に関する鏡影面によって生成
 される。



定理 2.4 (Borel-Weil-Bott)

(i) $\lambda \in P_{\text{sing}}$ ならば $H^i(X, \mathcal{O}(\lambda)) = 0 \quad (\forall i)$

(ii) $\lambda \in P_{\text{reg}}$ ならば $\exists w \star \lambda \in P^-$ と $\exists m \in \mathbb{Z}$ が $\exists$ して

$$H^i(X, \mathcal{O}(\lambda)) = \begin{cases} \nabla_{w \star \lambda} & (i = l(w)) \\ 0 & (i \neq l(w)) \end{cases}$$

(iii) $\mathcal{O}(\lambda)$ が ample $\Leftrightarrow \lambda \in P^- - \mathcal{F} = \{ \lambda \in P \mid \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} < 0 \quad (\forall \alpha \in \Delta^+) \}$ $\downarrow$

例 2.5 $G = \text{SL}(2, \mathbb{C})$, $X = \mathbb{P}^1$ かつ $P = \mathbb{Z}\mathcal{F}$, $W = \{1, s\}$ で
 $s \star (m\mathcal{F}) = (2-m)\mathcal{F}$ 。また通常記号で $\mathcal{O}(m\mathcal{F}) = \mathcal{O}(-m)$ である。

§3. Beilinson-Bernstein category ⑩

3.1 Twisted differential operators

§2.1 で $\lambda \in P$ に対して λ は line bundle に対応させたが, λ の line bundle に作用する微分作用素の層を D_λ と書く事がある。よって
 $D_\lambda = \mathcal{O}(\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_X} D_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(-\lambda)$ である。 D_λ は $\mathbb{C}$ の層で local には D_X と同型である。 D_X のときと同様に, associative algebra の準同型が,

$$\text{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi_\lambda} \Gamma(X, D_\lambda)$$

$$((\Phi_\lambda(A))(s))(x) = \frac{d}{dt} (\exp tA) s((\exp tA)^{-1} \cdot x) \Big|_{t=0}$$

$$(A \in \mathfrak{g}, x \in X, s \in \mathcal{O}(\lambda)_x)$$

で定まる。

一般の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対しては line bundle は存在し、 D_λ は定まる。これは $\mathbb{C}_\times \ltimes U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A\mathfrak{h} - \mathfrak{h} A = (\oplus \mathbb{C} A_i)(\mathfrak{h})$ ($A \in \mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathbb{C}_\times$) に双関数に付随するある両側 ideal で切ったものであるが、その定義は省略する ([BB1, 27])。以下の議論は $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ で成り立つが、ここでは簡単のために $\lambda \in \rho$ にとりつけることにする。

3.2 central character

$U(\mathfrak{g})$ の center $\mathfrak{z}$ に関する Harish-Chandra の結果を復習する。

$$\mathfrak{m}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{m}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{と記し } \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}^+ \oplus \mathfrak{m}^- \text{ である。}$$

PBW により

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{m}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{m}^+) \quad \text{--- (3.1)}$$

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{m}^+ U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{m}^-) \quad \text{--- (3.2)}$$

と分解できる。4 は可換だから $U(\mathfrak{h}) \simeq S(\mathfrak{h})$ である。分解 (3.1), (3.2) に用いる $U(\mathfrak{h}) \simeq S(\mathfrak{h})$ の projection ε を用いて $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\beta_1} S(\mathfrak{h}), U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\beta_2} S(\mathfrak{h})$ とする。algebra $S(\mathfrak{h})$ の自己同型 $S(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\varepsilon_i} S(\mathfrak{h})$ ($i=1, 2$) は $\varepsilon_1(H) = H - \rho(H)1, \varepsilon_2(H) = H + \rho(H)1$ ($H \in \mathfrak{h}$) で定まる。このとき次のことが知られている。

($\varepsilon_1 \circ \beta_1, \varepsilon_2 \circ \beta_2$ の $\mathfrak{g}$ の制限は一致して ε の $S(\mathfrak{h})$ 上の制限 $S(\mathfrak{h})^W$ になる。
 これは $\mathfrak{z}$ 上の algebra isomorphism $\mathfrak{z} \xrightarrow{\chi} S(\mathfrak{h})^W$ が定まる。

$\mathfrak{z} \xrightarrow{\chi_\lambda} \mathbb{C}$ は $\chi_\lambda(z) = \langle \chi(z), \lambda \rangle$ で定まる。このとき

$$\begin{cases} \text{central character} \} = \{ \chi_\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{q}^* \} \\ \chi_\lambda = \chi_\mu \iff \mu = w(\lambda) \quad (\exists w \in W) \end{cases}$$

である。また (Trivial central character) $= \chi_\rho = \chi_{-\rho}$ 。

3.3 3.3 で証明ある定理を述べよう。おなじ定理 1.2, 1.4 の拡張である 3.3 の次の 2 つの定理である。

定理 3.1 ([BB1]) $\lambda \in P$ とすると

(i) $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Phi_\lambda} \Gamma(X, D_\lambda)$ は surjective.

(ii) $\text{Ker } \Phi_\lambda = U(\mathfrak{g}) \text{Ker } \chi_{\lambda-\rho}$. ┘

定理 3.2 ([BB1]) $\lambda \in P^-$ とすると任意の coherent D_λ -module

$\mathcal{M}$ に対して次の成立する。

(i) $H^i(X, \mathcal{M}) = 0 \quad (\forall i > 0)$.

(ii) $\mathcal{M}$ は D_λ -module として $\Gamma(X, \mathcal{M})$ で生成される。 ┘

従って次のわかる。

系 3.3 ([BB1]) $\lambda \in P^-$ とすると次の category 同値が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{central character } \chi_{\lambda-\rho} \text{ を持つ} \\ \text{有限生成 } U(\mathfrak{g})\text{-module} \end{array} \right\} \sim \{ \text{coherent } D_\lambda\text{-module} \}$$
┘

3.4 定理3.1 の証明

基本的な idea は次のとおり。

" $U(\mathfrak{g})$, D_X とは非可換なものに直接扱うかわりに, 可換環との対応する結果を示す。(ここでは通常の計数幾何学が使える。)
 そこから非可換なときの情報をとる。 "

Step 1 $U(\mathfrak{g})$, D_X の可換版

$U(\mathfrak{g})$ および D_X の order に応じた filtration $\{U(\mathfrak{g})_m\}_{m \geq 0}$
 $\{D_{X,m}\}_{m \geq 0}$ とする。 可換版

$$U(\mathfrak{g})_m = (\mathfrak{g} \text{ の } m \text{ 個以下の積で生成される } \mathbb{C}\text{-subspace})$$

$$D_{X,m} = (\mathcal{O}_X \text{ の } m \text{ 個以下の積で生成される } \mathcal{O}_X\text{-submodule})$$

$U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}$, $D_{X,0} = \mathcal{O}_X$ また $m < 0$ ならば $U(\mathfrak{g})_m = 0$, $D_{X,m} = 0$ とする。

この filtration は次の性質を満たす。

$$U(\mathfrak{g})_{m_1} U(\mathfrak{g})_{m_2} \subset U(\mathfrak{g})_{m_1+m_2}, \quad D_{X,m_1} D_{X,m_2} \subset D_{X,m_1+m_2}$$

$$[U(\mathfrak{g})_{m_1}, U(\mathfrak{g})_{m_2}] \subset U(\mathfrak{g})_{m_1+m_2-1}, \quad [D_{X,m_1}, D_{X,m_2}] \subset D_{X,m_1+m_2-1}$$

よって $\mathrm{gr}_m U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})_m / U(\mathfrak{g})_{m-1}$, $\mathrm{gr}_m D_X = D_{X,m} / D_{X,m-1}$ とおくと

$$\mathrm{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathrm{gr}_m U(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{gr} D_X = \bigoplus_{m \geq 0} \mathrm{gr}_m D_X \text{ は可換な } \mathbb{C}\text{-}$$

algebra 及び可換な $\mathcal{O}_X$ -algebra である。PBW により $\mathrm{gr} U(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g})$

また $T^*X \xrightarrow{p} X$ は cotangent bundle であるとき $\mathrm{gr} D_X = p_* \mathcal{O}_{T^*X}$ である。

$\lambda \in P$ かつ $\lambda \in D_{\lambda,m} = \mathcal{O}_X \otimes D_{X,m} \otimes \mathbb{C}(\lambda)$ であり、同様の事が成立して

$\mathrm{gr} D_\lambda = \bigoplus_x \mathrm{gr} D_x \cong \mathrm{gr} D_X \cong P_* \mathcal{O}_{T^*X}$ である。自然な morphism $\sigma_m: U(\mathfrak{g})_m \rightarrow \mathrm{gr}_m U(\mathfrak{g})$, $\sigma_m: D_{\lambda, m} \rightarrow \mathrm{gr}_m D_\lambda$ が定まる。

Step 2 $\mathrm{Ker} \chi_{1-\rho}$ の可換版

$\mathbb{G}$ adjoint action で $U(\mathfrak{g})$ に作用しているが、 $\mathbb{G}$ の $\mathbb{G}$ -不変元全体 $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{G}}$ があることに一致する。よって $\mathrm{Ker} \chi_{1-\rho}$ の可換版は

$$S(\mathfrak{g})_+^{\mathbb{G}} = S(\mathfrak{g})^{\mathbb{G}} \wedge \left(\bigoplus_{m \geq 0} S(\mathfrak{g})_m \right)$$

と見える。ここで $S(\mathfrak{g})_m$ は m -次 symmetric tensor の全体である。

Step 3 定理 3.1 の可換版

$U(\mathfrak{g})$ の可換版は $\mathrm{gr} U(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathfrak{g}^*, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*})$ であり、 $\Gamma(X, D_\lambda)$ の可換版は $\Gamma(X, \mathrm{gr} D_\lambda) \cong \Gamma(X, P_* \mathcal{O}_{T^*X}) = \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$ である。

$\Phi_\lambda(U(\mathfrak{g})_m) \subset \Gamma(X, D_{\lambda, m})$ と exact sequence

$$0 \rightarrow \Gamma(X, D_{\lambda, m-1}) \rightarrow \Gamma(X, D_{\lambda, m}) \rightarrow \Gamma(X, \mathrm{gr}_m D_\lambda)$$

により $\mathrm{gr} U(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, \mathrm{gr} D_\lambda)$ が得られる

$$\Gamma(\mathfrak{g}^*, \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*}) \longrightarrow \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X}) \quad \dots (3.3)$$

が定まる。この写像は次のように解釈できる。 $\mathbb{G}$ が X に作用しているので自然な morphism $T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ が定まる (moment map)。 X は projective 仮定より ρ は projective morphism である。このとき (3.3) は ρ による引き戻し ρ^* と一致する。

以上の考察から 定理 3.1 の可換図式 (13) なる命題に達する。

Lemma 3.4

(i) $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}^+}, \mathcal{O}_{\mathcal{Q}^+}) \xrightarrow{\delta^+} \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$ は surjective.

(ii) $\text{Ker } \delta^+ = S(\mathfrak{g}) S(\mathfrak{g})_+^{\mathfrak{g}} \subset S(\mathfrak{g}) \cong \Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}^+}, \mathcal{O}_{\mathcal{Q}^+})$. $\downarrow$

そこでこれを用いて示す。Kostant による次の事実を用いる。

(a) δ の像 $\mathcal{N}$ は normal variety.

(b) $T^*X \rightarrow \mathcal{N}$ は projective, birational.

$\mathcal{N}$ は $\mathcal{Q}^+$ の closed G -stable subvariety であるが,

(c) $\mathcal{N}$ の $\mathcal{Q}^+$ での定義 ideal は $S(\mathfrak{g})_+^{\mathfrak{g}}$ で生成される。

(d) $\mathcal{N}$ は open dense に G -orbit を含む。

$\delta \in T^*X \xrightarrow{\delta''} \mathcal{N} \xrightarrow{\delta'} \mathcal{Q}^+$ とかけて可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}^+}, \mathcal{O}_{\mathcal{Q}^+}) & \xrightarrow{\delta^+} & \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X}) \\ \delta'^+ \searrow & & \nearrow \delta''^+ \\ & \Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}) & \end{array}$$

を得る。(a), (b) により δ''^+ は同型写像。また $\mathcal{N}$ は $\mathcal{Q}^+$ の closed

subvariety であるので δ'^+ は surjective であり、その kernel は (c) により $S(\mathfrak{g}) S(\mathfrak{g})_+^{\mathfrak{g}}$

と一致する。以上から Lemma 3.4 は明らか。

Step 4 center of $S_F(A)$

Lemma 3.5 $\lambda \in D$ に対して $\Phi_\lambda(z) = \chi_{\lambda-\rho}(z) \text{id}$ ($\forall z \in Z$)

(証明) $z \in Z = U(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ に対して $\Phi_\lambda(z) \in \Gamma(X, D_\lambda)^\mathfrak{g}$ である。

すなわち, Lemma 3.4 の証明中の (d) により $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ であるから, δ'' は同型写像であるから $\Gamma(X, \mathfrak{g}(D_\lambda))^\mathfrak{g} = \Gamma(X^*, \mathcal{O}_{X^*})^\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ 。よって

$$\Gamma(X, \mathfrak{g}(D_\lambda))^\mathfrak{g} = \begin{cases} \mathbb{C} & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

とある。exact sequence

$$0 \rightarrow \Gamma(X, D_{\lambda, m-1}) \rightarrow \Gamma(X, D_{\lambda, m}) \rightarrow \Gamma(X, \mathfrak{g}(D_\lambda))$$

から結局 $\Gamma(X, D_{\lambda, m})^\mathfrak{g} = \Gamma(X, D_{\lambda, 0})^\mathfrak{g} = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ ($\forall m \geq 0$)。

(X は projective に対して $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$) よって

$$\Gamma(X, D_\lambda)^\mathfrak{g} = \mathbb{C}$$

がわかる。よって $\Phi_\lambda(z) = C_\lambda(z) \text{id}$ ($\forall z \in Z$) により C_λ が定まる。

よって $C_\lambda = \chi_{\lambda-\rho}$ である。

D_λ は $\mathcal{O}(1)$ に $S_F(A)$ (213) である, $\mathcal{O}(1)$ のある non-zero section s に対して $(\Phi_\lambda(z)) \cdot s = \chi_{\lambda-\rho}(z)s$ とおくと $\chi_{\lambda-\rho}$ である。 $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_d$ に対応する G の部分群 N^- とすると, $N^- \rightarrow X = G/B$ ($u \mapsto uB$) は open immersion である。 $\mathcal{O}(1)$ の eB 上の fiber は λ に対応する B -module である。 $\mathcal{O}(1)$ の eB 上の fiber の non-zero element v_0 によって N^-B/B 上の

$\mathcal{O}(\lambda)$ の section $S \in \mathcal{S}(UB) = U \cdot V$ ($\forall u \in N^-$) に $\mathcal{F}$ に定める。定義から

$$\Phi_\lambda(Y) \cdot S = 0 \quad (\forall Y \in \mathfrak{m}^-) \quad \dots (3.5)$$

$$\Phi_\lambda(H) \cdot S = \lambda(H) S \quad (\forall H \in \mathfrak{q}) \quad \dots (3.6)$$

$\pm \mathcal{S}$ に $S' \in \mathcal{O}(\lambda)$, $\mu \in P$ により

$$\Phi_\lambda(H) S' = \mu(H) S' \Rightarrow \left(\Phi_\lambda(H) \Phi_\lambda(Y_d) S' = (\mu + d)(H) \Phi_\lambda(Y_d) S' \dots (3.7) \right. \\ \left. (\forall H \in \mathfrak{q}, \forall Y_d \in \mathfrak{g}_d) \right)$$

$= \mu$ は $H Y_d = Y_d H + [H, Y_d] = Y_d (H + d(H))$ により成る。

$\pm \mathcal{S}$ PBW に $\mathcal{F}$ $\mathfrak{m}^+ = \bigoplus_{d \in \mathcal{A}^+} \mathfrak{g}_d$ と表せる

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{q}) \oplus (\mathfrak{m}^+ U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{m}^-) = U(\mathfrak{q}) \oplus \mathfrak{m}^+ U(\mathfrak{m}^+) U(\mathfrak{q}) \oplus U(\mathfrak{g}) \mathfrak{m}^-$$

と分解できる。 $z \in \mathcal{S}$ $z = u_1 + u_2 + u_3$ ($u_1 \in U(\mathfrak{q})$, $u_2 \in \mathfrak{m}^+ U(\mathfrak{m}^+) U(\mathfrak{q})$,

$u_3 \in U(\mathfrak{g}) \mathfrak{m}^-$) とかける。 (3.5) から $\Phi_\lambda(z) S = \Phi_\lambda(u_1) S + \Phi_\lambda(u_2) S$

と $\mathcal{F}$ により $\Phi_\lambda(z)$ は constant である (3.6), (3.7) から $\Phi_\lambda(z) S = \Phi_\lambda(u_1) S$

$= \langle u_1, \lambda \rangle S = \langle \beta_2(z), \lambda \rangle S = \langle \psi(z), \lambda - \rho \rangle S = \chi_{\lambda - \rho}(z) S$ 。以上より $\pi \pm \psi F$ 。

Steps 定理 3.1 の証明

$$\left(\begin{array}{l} I_m = \text{Ker } \chi_{\lambda - \rho} \cap U(\mathfrak{g})_m \\ J_m = \bigoplus_{l+l=m} U(\mathfrak{g})_l I_l \\ K_m = S(\mathfrak{g}) S(\mathfrak{g})_+^{\mathfrak{q}} \cap S(\mathfrak{g})_m = \bigoplus_{\substack{l+l=m \\ l > 0}} S(\mathfrak{g})_l S(\mathfrak{g})_l^{\mathfrak{q}} \end{array} \right.$$

と表せる ($I_0 = 0$ に注意)。

定理 3.1 より強く示す。

$$(*) \left[J_m \longrightarrow U(\mathfrak{g})_m \longrightarrow \Gamma(X, D_{\lambda, m}) \longrightarrow 0 \text{ is exact } (\forall m \geq 0) \right]$$

Lemma 3.5 より, π が complex に τ なる π は明らか。 (*) は induction で示す。 $m=0$ は明らか ($J_0=0, U(\mathfrak{g})_0=\mathbb{C}, \Gamma(X, D_{\lambda, 0})=\mathbb{C}$)。
 $m>0$ で $m-1$ まで正しいと仮定。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ J_{m-1} & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})_{m-1} & \longrightarrow & \Gamma(X, D_{\lambda, m-1}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ J_m & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})_m & \longrightarrow & \Gamma(X, D_{\lambda, m}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_m & \longrightarrow & S(\mathfrak{g})_m & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathfrak{g}_m D_{\lambda}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

可換性は明らか。各行, 各列が complex に τ なる π は明らか。右端の列が exact τ なることは $0 \rightarrow D_{\lambda, m-1} \rightarrow D_{\lambda, m} \rightarrow \mathfrak{g}_m D_{\lambda}$ の exactness により示す。真中の列が exact τ なることは induction の仮定。下0行が exact τ なることは Lemma 3.4 の帰結。

$J_m \rightarrow K_m$ が surjective であることは示す。 $I_l \rightarrow S(\mathfrak{g})_l^{\mathfrak{g}}$ ($l>0$) の surjectivity を示す。まず $\exists \cap U(\mathfrak{g})_l = U(\mathfrak{g})_l^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sigma_l} S(\mathfrak{g})_l^{\mathfrak{g}}$ の surjectivity を示す。 $U(\mathfrak{g})_l \rightarrow S(\mathfrak{g})_l$ は G -equivariant surjective であるが, G は semisimple なる S 任意の有限次元 G -module は完全可約。よって示す。 $\tau = \tau' \quad a \in S(\mathfrak{g})_l^{\mathfrak{g}}$ とすると $\sigma_l(\tau') = a$ とする $\tau' \in \exists \cap U(\mathfrak{g})_l$ が

ある。 $z = z' - \chi_{1-g}(z')1$ とあると明らか $z \in I_2$, $\alpha_2(z) = 0$ 。 ρ_2 は $\mathbb{Z}/2$ 作用。

これは diagram chase で証明が完了する。

3.5 定理 3.2 の証明

$\nu \in P^-$ のとき G -module として $\Gamma(X, \mathcal{O}(\nu)) \simeq V_\nu$ である (3.2.4)。

よって自然な $\mathcal{O}_X$ -homomorphism

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X \otimes V_\nu & \xrightarrow{p_\nu} & \mathcal{O}(\nu) \quad \dots\dots (3.8) \\ \mathcal{O}_X & \xrightarrow{i_\nu} & \mathcal{O}(\nu) \otimes V^{-\nu} \quad \dots\dots (3.9) \end{array} \right.$$

が定まる ((3.9) は (3.8) の dual に $\mathcal{O}(\nu) \in \text{Tensor}(T \otimes \mathcal{O}_0(V_\nu)^* \simeq V^{-\nu})$)。

p_ν, i_ν は G -equivariant な $\mathcal{O}_X$ -homomorphism で p_ν は surjective, i_ν は injective である。

$\pm \lambda \in P^-$ として, $M \in \text{coherent } D_\lambda\text{-module}$ である。 (3.8), (3.9) に

$M \in \text{Tensor}$ として

$$\left(\begin{array}{ccc} M \otimes V_\nu & \xrightarrow{\bar{p}_\nu} & M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \quad \dots\dots (3.10) \\ M & \xrightarrow{\bar{i}_\nu} & M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \otimes V^{-\nu} \quad \dots\dots (3.11) \end{array} \right.$$

が定まる。 これは $U(\mathfrak{g})$ -equivariant で, $\bar{p}_\nu$ は surjective, $\bar{i}_\nu$ は injective である。

Lemma 3.6 (Key lemma)

上の記号のもとで $\overline{P}_Y, \overline{c}_Y$ は split する。これは $\mathcal{U}(\mathcal{O}_Y)$ -homomorphism

$$\begin{cases} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \xrightarrow{\overline{\delta}_Y} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}_Y \\ \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(\nu) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}_Y^{-\nu} \xrightarrow{\overline{\delta}_Y} \mathcal{M} \end{cases}$$

で $\overline{P}_Y \circ \overline{\delta}_Y = \text{id}$, $\overline{\delta}_Y \circ \overline{c}_Y = \text{id}$ となるものがある。

Lemma 3.6 は 2 つの事実を認めて、二つ目の定理 3.2 の導出が出来る事を示す。

$H^c(X, \mathcal{M}) = 0$ ($\forall c > 0$) の証明

$\mathcal{D}_X$ は $\mathcal{O}_X$ -module として locally free である。 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_X$ -module として quasi-coherent。 $\mathcal{F}$ は coherent $\mathcal{O}_X$ -submodule $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ の union になる。 (quasi-coherent $\mathcal{O}_X$ -module or coherent $\mathcal{O}_X$ -submodule $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ の union になることは EGA である)。従って

$$H^c(X, \mathcal{M}) = \varinjlim_{\mathcal{M}_0} H^c(X, \mathcal{M}_0)$$

($\mathcal{M}_0$ は coherent $\mathcal{O}_X$ -submodule の全体 $\mathcal{S} = \mathcal{C}$)

よって任意の coherent $\mathcal{O}_X$ -submodule $\mathcal{M}_0$ に対して

$$H^c(X, \mathcal{M}_0) \rightarrow H^c(X, \mathcal{M})$$

が zero map である事を示せばよい。定理 2.4 (iii) によりある $\nu \in P^-$

が存在して $H^c(X, M_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V)) = 0$ ($\forall c > 0$) と仮定。 $\Sigma = \Sigma'$ diagram

$$\begin{array}{ccc} H^c(X, M_0) & \longrightarrow & H^c(X, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^c(X, M_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X} V^{-V}) & \longrightarrow & H^c(X, M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X} V^{-V}) \end{array}$$

を考えると $H^c(X, M_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X} V^{-V}) = H^c(X, M_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V)) \otimes_{\mathcal{O}_X} V^V = 0$ ($c > 0$),

また key lemma により $H^c(X, M) \rightarrow H^c(X, M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X} V^{-V})$ は injective.

以上より明らか。

M が $\Gamma(X, M)$ で生成されることの証明

$\Gamma(X, M)$ で生成される M の D_X -submodule $E M'$ とし

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

により N を定める。 $H^c(X, M') = 0$ ($\forall c > 0$) 従って $\Sigma = \Sigma'$

$$0 \rightarrow \Gamma(X, M') \rightarrow \Gamma(X, M) \rightarrow \Gamma(X, N) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

M' の定義から $\Gamma(X, N) = 0$ 。 $N \neq 0$ と仮定すると N の coherent

$\mathcal{O}_X$ -submodule $N_0 \neq 0$ がある。定理 2.4 (iii) から $V \in P^+$ で

$\Gamma(X, N_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V)) \neq 0$ と仮定する。すると $\Gamma(X, N \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V)) \neq 0$ 。

Key lemma により $\Gamma(X, N) \otimes_{\mathcal{O}_X} V^V = \Gamma(X, N \otimes_{\mathcal{O}_X} V^V) \rightarrow \Gamma(X, N \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(V))$ は

surjective。すると $\Gamma(X, N) \neq 0$ と仮定矛盾。

Lemma 3.6 の証明に帰す。

Lemma 3.7 $\chi_1, \dots, \chi_r \in$ 相異なる central character とする。

N が $U(\mathfrak{g})$ -module (の層) で $R_1, \dots, R_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\prod_{i=1}^r (z - \chi_i(z))^{R_i} \cdot N = (0)$$

が成り立つならば, $U(\mathfrak{g})$ -module として直和分解

$$N = \bigoplus_{i=1}^r N^{(i)}$$

$$N^{(i)} = \{m \in N \mid (z - \chi_i(z))^{R_i} m = 0\}$$

がある。

否定は

(証明) N は有限生成 $\mathbb{C}[z]$ 上の可換環 $\mathbb{C}[z]$ 上の N は $\mathbb{C}[z]$ -module として locally finite. 任意の $m \in N$ に対して $\mathbb{C}[z] \cdot m$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元である。よって
 明らか ■

すなわち V_ν は B -module として $\mathbb{C}[z]$ 上の filtration である。

$$\left(\begin{array}{l} V_\nu = V^{(1)} \supset V^{(2)} \supset \dots \supset V^{(n)} = 0 \\ V^{(i)} / V^{(i+1)} \text{ は 1次元で } \mu_i \in P \text{ に対応する既約 } B\text{-module に同型} \\ \mu_i < \mu_j \Leftrightarrow i < j \\ \mu_i = \nu \Leftrightarrow i = 1 \end{array} \right.$$

§2.1 により $\mathbb{C}_x \otimes V_\nu$ は G -equivariant $\mathbb{C}_x$ -module として $\mathbb{C}[z]$ 上の filtration G -equivariant filtration である。

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{C}_x \otimes V_\nu = V^{(1)} \supset V^{(2)} \supset \dots \supset V^{(n)} = 0 \\ V^{(i)} / V^{(i+1)} \simeq \mathbb{C}(\mu_i) \end{array} \right. \quad \dots (3.12)$$

また $\mathbb{C}(\nu) \otimes V^{-\nu} \in \mathbb{C}[z]$ 上の filtration G -equivariant filtration である。

$$\begin{cases} \mathcal{O}(V) \otimes V^{-\nu} = U^{(r-1)} \supset U^{(r-2)} \supset \dots \supset U^{(0)} = 0 \\ U^{(i)} / U^{(i-1)} \simeq \mathcal{O}(V - \mu_i) \end{cases} \quad \dots (3.13)$$

そこで $M \otimes V_\nu$ 及び $M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(V) \otimes V^{-\nu}$ は $\mathcal{R}_n$ 上の $V(\eta)$ -equivariant filtration Σ を

$$\begin{cases} M \otimes V_\nu = \bar{V}^{(1)} \supset \bar{V}^{(2)} \supset \dots \supset \bar{V}^{(r)} = 0 \\ \bar{V}^{(i)} / \bar{V}^{(i+1)} \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(\mu_i) \end{cases} \quad \dots (3.14)$$

$$\begin{cases} M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(V) \otimes V^{-\nu} = \bar{U}^{(r-1)} \supset \bar{U}^{(r-2)} \supset \dots \supset \bar{U}^{(0)} = 0 \\ \bar{U}^{(i)} / \bar{U}^{(i-1)} \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(V - \mu_i) \end{cases} \quad \dots (3.15)$$

$\bar{V}_\nu, \bar{U}_\nu$ はそれぞれ $\bar{V}^{(1)} \rightarrow \bar{V}^{(1)} / \bar{V}^{(2)}, \bar{U}^{(1)} \rightarrow \bar{U}^{(1)} / \bar{U}^{(2)}$ と一致する。

一般に $\mu \in P$ かつ $M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(\mu)$ は $D_{\lambda+\mu}$ -module である (Lemma 3.5)

から $(z - \chi_{\lambda+\mu-\rho}(z)) \cdot (M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(\mu)) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C})$ 。 (3.14),

(3.15) から

$$\prod_{i=1}^{r-1} (z - \chi_{\lambda+\mu_i-\rho}(z)) \cdot (M \otimes V_\nu) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

$$\prod_{i=1}^{r-1} (z - \chi_{\lambda+\nu-\mu_i-\rho}(z)) \cdot (M \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}(V) \otimes V^{-\nu}) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

そこで Lemma 3.7 により $\mathcal{R}_n \supset \Sigma$ である。

$$\chi_{\lambda+\mu_i-\rho} = \chi_{\lambda+\nu-\rho} \Rightarrow i=1 \quad \dots (3.16)$$

$$\chi_{\lambda+\nu-\mu_i-\rho} = \chi_{\lambda-\rho} \Rightarrow i=1 \quad \dots (3.17)$$

まず (3.16) を見る。 $\chi_{\lambda+\mu_i-\rho} = \chi_{\lambda+\nu-\rho}$ であるから 3.2 から ある $w \in W$ が

存在して $\lambda+\nu-\rho = w(\lambda+\mu_i-\rho)$ 。 すると $(w(\lambda-\rho) - (\lambda-\rho)) + (w\mu_i - \nu) = 0$ 。

$\lambda \in P^-$ であるから $\lambda-\rho \in P^-$ 。 すると $w(\lambda-\rho) - (\lambda-\rho) \geq 0$ 。 かつ $w\mu_i$ は V_ν の

weight であるから $w\mu_i - \nu \geq 0$ 。 したがって $w(\lambda-\rho) = (\lambda-\rho)$ かつ $w\mu_i = \nu$ 。

よって $W=1$, $\mu_i=\nu$ となり結局 $c=1$.

次に (3.17) を示す. $\chi_{\lambda+\nu-\mu_i-\rho} = \chi_{\lambda-\rho}$ とすると $W(\lambda-\rho) = \lambda+\nu-\mu_i-\rho$ となる $w \in W$ が存在する. よって $(\mu_i-\nu) + (W(\lambda-\rho) - (\lambda-\rho)) = 0$. 同様の議論から $\mu_i=\nu$ となりやはり $c=1$.

以上で 定理 3.2 を示した.

§4. 群作用 $\mathfrak{g}$ 上の Lie 環の表現と群作用 $\mathfrak{g}$ 上の D-群

4.1 群作用 $\mathfrak{g}$ 上の Lie 環の表現

$G \in \mathbb{C}$ の連結半単純 S -群, $K \in G$ (Zariski Topology にあたる) の部分群として $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\mathfrak{k} = \text{Lie } K$ とする.

定義 4.1 $\mathbb{C}$ -vector space M に $U(\mathfrak{g})$ -module structure と K -module structure が与えらることで, 次の条件が満たされるときは M は $(\mathfrak{g}, K)$ -module とする.

(i) K が M への作用は locally finite, algebraic. すなわち, 任意の $m_0 \in M$ に対して, M が K -stable 有限次元部分空間 M_0 であって

$$\begin{cases} m_0 \in M_0 \\ K \rightarrow \text{GL}(M_0) \text{ は } S\text{-群の準同型} \end{cases}$$

なるものが存在する.

(ii) (i) により K が M への作用は微分できて M は $U(\mathfrak{k})$ -module と

思えるが、これは $\mathfrak{g}$ 上の $U(\mathfrak{g})$ -module structure を制限して $\mathfrak{k}$ の作用と一致する。

$$(iii) \quad \mathfrak{k} \cdot (A \cdot m) = (Ad(\mathfrak{k}) A) \cdot (\mathfrak{k} \cdot m) \quad (\forall \mathfrak{k} \in \mathfrak{k}, \forall A \in \mathfrak{g}, \forall m \in M)$$

つまり、 $U(\mathfrak{g})$ -module であって $\mathfrak{g}$ の作用と compatible な $\mathfrak{k}$ の作用をもつものは $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ -module といい、category $M(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を

$$M(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{g}, \mathfrak{k})\text{-module であって } U(\mathfrak{g})\text{-module として有限生成} \\ \text{かつ trivial central character をもつもの} \end{array} \right\}$$

により定義する。表現論で重要なものは次の2つの場合である。

(a) $\mathfrak{k} = \mathfrak{B}$ (Borel 部分群)

(b) $\mathfrak{k} = \mathfrak{G}^\theta = \{g \in \mathfrak{G} \mid \theta(g) = g\}$ 且 θ は $\mathfrak{G}$ の involutive automorphism

(a) の場合は §5, §6 で考える highest weight module に対応する。(b) の場合は 実半単純 Lie 群の admissible 表現に対応する。

4.2 群作用をもつ D 加群

$Y \in \mathbb{C}^n$ は non-singular algebraic variety, $K \in \mathbb{C}^n$ は SL_n の行列群として K の Y 上の (algebraic) 作用が与えられると仮定する。

$K \times Y \xrightarrow{p_2} Y, K \times Y \xrightarrow{\sigma} Y, K \times K \xrightarrow{m} K$ 且 $p_2(p_1, y) = y, \sigma(p_1, y) = p_1 y, m(p_1, p_2) = p_1 p_2$ で定める。

定義 4.2 $M \in D_Y$ -module とする。 $D_{K \times Y}$ -module と (この同型 $p_2^+ M \xrightarrow{\sim} \sigma^+ M$ を) cocycle condition を満たすものを加えれば、 $M \in (D_Y, K)$ -module とする。 $\Rightarrow$ "cocycle condition" は $\mathbb{R}$ の diagram の可換性である。

$$\begin{array}{ccc}
 S_1^+ M & = p_{23}^+ p_2^+ M \xrightarrow{\sim p_3^+ g} p_{23}^+ \sigma^+ M = S_2^+ M \\
 \parallel & & \parallel \\
 (m \times 1_Y)^+ p_2^+ M & & (1_K \times \sigma)^+ p_2^+ M \\
 \downarrow (m \times 1_Y)^+ g & & \swarrow (1_K \times \sigma)^+ g \\
 (m \times 1_Y)^+ \sigma^+ M & & \\
 \parallel & & \\
 S_3^+ M = (1_K \times \sigma)^+ \sigma^+ M & &
 \end{array}$$

$$S_i: K \times K \times Y \longrightarrow Y \quad (i=1,2,3)$$

$$S_1(R_1, R_2, y) = y, \quad S_2(R_1, R_2, y) = R_2 y, \quad S_3(R_1, R_2, y) = R_1 R_2 y \quad \lrcorner$$

(D_Y, K) -module として, D_Y -module として coherent となるものを $\text{category } \mathcal{MCD}_Y(K)$ とする。

Lemma 4.3 Y 上の K -orbit の数が有限個であるとすると、 $M \in \mathcal{MCD}_Y(K)$ ならば, M は D_Y -module として regular holonomic になる。

筆者はこの事実を柏原升に教わった。証明はさほど難しくはない
(例えば [T4] を参照)。なお analytic category では成立しない事に
注意しなければならない (holonomic であることはいいえる)。

証明にさして簡単に説明する。

Step 1 $Y = K$ のとき $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_Y$ の何個かの直和になることがわかる。

おて OK。

Step 2 Y が G の orbit になるとき smooth morphism

$K \xrightarrow{p} Y = K/K_1$ に対して $p^*\mathcal{M}$ が regular holonomic ならば $\mathcal{M}$ は
regular holonomic。

Step 3 一般の場合 $\mathcal{M}$ は各 orbit 上の regular holonomic system として

"こまけ" 得られる。おて OK。

analytic category での regularity は無限遠点での regularity を含む
ので, Step 3 で "こまける" ときは orbit の closure での挙動が問題になる
証明がうまくいかないのである。

4.3 equivariant version of Beilinson-Bernstein correspondence

G は $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群, $K \in G$ の部分群, $X \in G$ の
旗多様体とする。

Lemma 4.4 Beilinson-Bernstein 対応 (系 1.5) により 次の
category 同値:

ちがうことに注意。

$\Gamma(K, \mathbb{O}_K)$ の作用は $\mathbb{O}^+ \mathbb{S} \mathbb{S}^*$ も同じである, $D_{K \times X}$ -module の isomorphism $P_{\mathbb{O}^+} \mathcal{M} \xrightarrow{\vartheta} \mathcal{O}^+ \mathcal{M}$ を与えることは

$$\tilde{\vartheta} \in \text{End}_{\Gamma(K, \mathbb{O}_K)} (\Gamma(K, \mathbb{O}_K) \otimes \Gamma(X, \mathcal{M}))$$

で $\mathcal{O}^+$ 上 $U(\mathfrak{g})$ の作用及び $U(\mathbb{R})$ の作用に関する compatibility condition (== $\mathcal{O}^+$ は書き下す) $\left(\begin{array}{c} \text{とみたときの} \\ \text{とみたときの} \end{array} \right)$ を与えることと同値になる ($U(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, D_X)$, $\Gamma(K, D_K) \cong \Gamma(K, \mathbb{O}_K) \otimes U(\mathbb{R})$)。

さて ϑ が同型で cocycle condition をみたすことは, $\Gamma(X, \mathcal{M})$ の K -module structure で 定義 4.1 (i) をみたすものか

$$k \cdot m = \sum_i f_i(k) m_i \quad \text{if} \quad \vartheta(1 \otimes m) = \sum_i f_i \otimes m_i$$

に δ 1) なる事と同値である。このとき, $U(\mathfrak{g})$ の作用に関する compatibility condition は 定義 4.1 (iii) と同値, また $U(\mathbb{R})$ の作用に関する compatibility condition は 定義 4.1 (ii) と同値。以上で示す。以上で示す。

さて表現論で重要な場合 (3.4.1 a (a), (b) のとき) には X 上の K -orbit の数は有限である事が知られている。 (a) のときは δ 知られた Bruhat 分解, (b) のときは 松本 A の結果。従って Lemma 4.3, 4.4 に δ 1),

「表現論で重要な $U(\mathfrak{g})$ -module に対応する D_X -module は regular holonomic である。」

よって regular holonomic D -module に関する強力な一般論を用いて表現論の研究を行うことができる訳である。

§5. Kazhdan-Lusztig 予想とは何か?

[5.1] Verma module とその simple quotient

$G \in \mathbb{C}$ 上の単純半単純代数群, $B \in G$ の Borel 部分群, $T \in B$ に含まれる G の極大 torus とし G, B, T の Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}$ とする。 (G, T) の正根系を Φ^+ とし $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha)$ とする (すなわち), $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$, $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ とおく。

定義 5.1 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して $U(\mathfrak{g})$ -module $M(\lambda)$ を

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+ + \sum_{H \in \mathfrak{t}} U(\mathfrak{g})(H - (\lambda - \rho)(H))1)$$

により定義して, λ を highest weight $\lambda - \rho$ である Verma module とし。

以下 Verma module に関する基本的性質を挙げる。

(1) $M(\lambda)$ の non-zero quotient が既約なものだけである。

(この λ は $L(\lambda)$ とおく)

(2) $M(\lambda), L(\lambda)$ は $\mathfrak{g}$ -module として semisimple $\mathfrak{b}$ -module として locally finite.

(3) $M(\lambda), L(\lambda)$ は central character $\chi_\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(4) $M(\lambda)$ は有限の組成系 $E \neq \emptyset$, 各組成因子は ある $w \in W$ に対して $L(w\lambda)$ と同型.

$M(\lambda), L(\lambda)$ を持つ $\mathfrak{g}$ に手頃な category $\mathcal{E}$ を定義 (83). central character $\chi \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$A_\chi = \left\{ \begin{array}{l} \text{central character } \chi \in \mathfrak{h}^* \text{ 有限生成 } U(\mathfrak{g})\text{-module } \mathcal{E} \\ \mathfrak{g}\text{-module として semisimple, } \mathfrak{b}\text{-module として locally finite} \end{array} \right\}$$

とある。 $M(\lambda), L(\lambda)$ は A_χ の object であるか? 51

(5) $K(A_\chi) = (A_\chi \text{ の Grothendieck 群})$

$$= \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \chi_\lambda = \chi}} \mathbb{Z}[M(\lambda)] = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \chi_\lambda = \chi}} \mathbb{Z}[L(\lambda)]$$

$$\chi = \chi''$$

問題 5.2 $K(A_\chi)$ の $\mathbb{Z}$ の basis $\{[M(\lambda)] \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*, \chi_\lambda = \chi\},$
 $\{[L(\lambda)] \mid \lambda \in \mathfrak{h}^*, \chi_\lambda = \chi\}$ の関係は? 52

この問題は $M(\lambda)$ の組成列に $L(\lambda)$ が何回でてくるかを求める事と同値である。また指標を考える立場からは次のような見方もできる。

$M = A_X$ に対して その指標を

$$\text{ch}(M) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^+} \dim M(\mathfrak{q}, \mu) e^\mu$$

$$\text{ただし } M(\mathfrak{q}, \mu) = \{m \in M \mid H \cdot m = \mu(H)m \text{ (} \forall H \in \mathfrak{q} \text{)}\}$$

で定義する。定義からただちに

$$\text{ch}(M(\lambda)) = \frac{e^{\lambda-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-e^{-\alpha})} = e^{\lambda-\rho} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1+e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}+e^{-3\alpha}+\dots)$$

がわかる。さて $K(A_X)$ 中で

$$[L(\lambda)] = \sum_{\mu} a_{\mu, \lambda} [M(\mu)] \quad (a_{\mu, \lambda} \in \mathbb{Z})$$

と書けるとすると,

$$\text{ch}(L(\lambda)) = \frac{\sum_{\mu} a_{\mu, \lambda} e^{\mu-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-e^{-\alpha})}$$

とある。従って問題 5.2 は $\text{ch}(L(\lambda))$ を求めるという問題と等価である。

$\mu \in P^+$ のとき $V^\mu = L(\mu+\rho)$ であるが (32.3), Weyl の指標公式 (定理 2.3) から

$$\text{ch}(\nabla^\mu) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})},$$

よって

$$[L(\mu+\rho)] = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} [M(w(\mu+\rho))] \quad (\mu \in P^+)$$

となるので、Weyl の指標公式は 問題 5.2 の 部分的解答 として
 いる。言い換えると、我々の問題は Weyl の指標公式の一般化を
 求めるという事である。

$$\pm \lambda \in \Delta^+ \Rightarrow \frac{z(\lambda, d)}{(d, d)} \in \mathbb{Z} \text{ となる } d \in \Delta \text{ が存在するとは } M(\lambda) = L(\lambda)$$

となり問題は trivial。 $\frac{z(\lambda, d)}{(d, d)} \in \mathbb{Z}$ となる d が 増えれば 増えるほど

問題は複雑になる。一番面倒なのは $\lambda \in P$ のときであるが、この場合は

Translation principle といふものに依り、 $\chi = (\text{trivial central character})$

$= \chi_\rho = \chi_{-\rho}$ のときに帰着できる。よって $\chi = \chi_\rho$ のときを考える。

このとき §4.1 の記号で

$$A_{\chi_\rho} = M(\mathfrak{g}, B)$$

となることがわかる。また $M_w = M(-w\rho)$, $L_w = L(-w\rho)$ とおくと、

$$K(M(\mathfrak{g}, B)) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[M_w] = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[L_w]$$

となる。 $y, w \in W$ に対して $a_{y,w} \in \mathbb{Z}$ と

$$[L_w] = \sum_{y \in W} a_{y,w} [M_y]$$

で定まる。この $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}_0}$ を求めるのが我々の問題である。

例 5.3 $G = SL(2, \mathbb{C})$ のとき。例 1.7 の記号を用いる。

$\mathfrak{h} = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E_+$, $\mathfrak{g} = \mathbb{C}H$, $\mathfrak{m}^+ = \mathbb{C}E_+$ と定まる。 $\mathcal{W} = \{1, s\}$ で

$$M_e = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / (\mathcal{U}(\mathfrak{g})E_+ + \mathcal{U}(\mathfrak{g})(H+2))$$

$$M_s = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / (\mathcal{U}(\mathfrak{g})E_+ + \mathcal{U}(\mathfrak{g})H)$$

と定まる。よって

$$M_e = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\leq -1}} \mathbb{C}v_j \quad (v_j \neq 0)$$

$$M_s = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\leq 0}} \mathbb{C}u_j \quad (u_j \neq 0)$$

で

$$H \cdot v_j = 2j v_j, \quad E_- \cdot v_j = 0, \quad E_+ \cdot v_j = -j(j+1) v_{j+1}$$

$$H \cdot u_j = 2j u_j, \quad E_- \cdot u_j = u_{j-1}, \quad E_+ \cdot u_j = -j(j+1) u_{j+1}$$

と書ける。従って $N = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\leq -1}} \mathbb{C}u_j$ とおくと、 N は M_s の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -submodule である。

M_e と同型になる。また $M_s/N \cong \mathbb{C}$ (trivial $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module) である。

M_e の既約性も簡単にわかる。

$$L_e = M_e, \quad L_s = M_s/N \cong \mathbb{C}$$

となる。従って

$$[L_e] = [M_e], \quad [L_s] = [M_s] - [M_e]$$

がわかった。」

ここで問題の解答を書いておこう。

定理 5.4 ([BK], [BB1], Kazhdan-Lusztig 予想 [KL1])

$$a_{y,w} = (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1) \quad \square$$

証明は §6 で示す。 $P_{y,w}$ の定義は §5.2 で与える。

5.2 Kazhdan-Lusztig 多項式

Weyl 群 W は S を生成系とする Coxeter 群なので S の Hecke 代数 $H(W)$ が定義される。これは Laurent polynomial ring $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ の algebra であって $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ の free basis $\{T_w \mid w \in W\}$ を持つ。次の関係式が成り立つものである。

$$\begin{cases} (T_s + 1)(T_s - s) = 0 & (s \in S) \\ T_{w_1} T_{w_2} = T_{w_1 w_2} & (\ell(w_1) + \ell(w_2) = \ell(w_1 w_2)) \end{cases}$$

W の半順序 (Bruhat order) を次で定義する。 $w \in W, \ell(w) = k$ のとき $w = s_1 \cdots s_k$ ($s_i \in S$) とかける。このとき

$$y \leq w \iff \begin{cases} 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq k \text{ で} \\ y = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_r} \text{ と表せるものがあ} \end{cases}$$

これは $w \in S$ の k 個の元の積で表せるものに限られる。

Lemma 5.5 ([KL17])

$y, w \in W$ に対して $P_{y,w}(z) \in \mathbb{Z}[z]$ で次を満たすものが
唯一に定まる。

$$\left(\begin{array}{l} P_{y,w}(z) = 0 \quad (y \neq w) \\ P_{w,w}(z) = 1 \\ \deg P_{y,w}(z) \leq \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1) \quad (y < w) \\ \sum_{y \in W} P_{y,w}(z) T_y = z^{\ell(w)} \sum_{y \in W} P_{yw}(z^{-1}) T_{y^{-1}} \end{array} \right) \quad \downarrow$$

すなわち $P_{y,w}(z) \in \text{Kazhdan-Lusztig 多項式}$ となる。

例 5.6 $W = \{e, s\}$ の $G = \text{SL}(2, \mathbb{C})$ の Weyl 群 $a \in \mathbb{Z}$

$$P_{e,e}(z) = P_{s,s}(z) = P_{e,s}(z) = 1 \quad P_{s,e}(z) = 0 \quad \downarrow$$

次に Kazhdan-Lusztig 多項式の幾何学的意味を述べる。

Bruhat 分解 $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ に対し、旗多様体 $X = G/B$ は

$X = \bigsqcup_{w \in W} X_w$ ($X_w = BwB/B$) なる B -orbit の分解を成す。さらに
次のことが知られている。

$$\left(\begin{array}{l} X_w \text{ は次元 } \ell(w) \text{ の affine space } \mathbb{C}^{\ell(w)} \text{ と同型} \\ \overline{X_w} \supset X_y \iff w \geq y \end{array} \right)$$

$X_w \in \text{Schubert cell}$, $\overline{X_w} \in \text{Schubert variety}$ と呼ぶ。 $\mathcal{I} \subset X_w$ 上の
constant sheaf $\mathbb{C}_{X_w}$ の $\overline{X_w}$ 上の minimal extension $\pi^* \mathbb{C}_{X_w}$ と呼ぶ。

これは $\mathbb{C}_{X_w}$ -module の bounded complex (正確には derived category の object) である。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}^i(\pi \mathbb{C}_{X_w})|_{X_w} = \begin{cases} \mathbb{C}_{X_w} & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} & D(\pi \mathbb{C}_{X_w}) \cong \pi \mathbb{C}_{X_w}[\dim \bar{X}_w] \\ \mathcal{H}^i(\pi \mathbb{C}_{X_w}) = 0 & (i < 0) & \text{すなわち } D(\pi \mathbb{C}_{X_w}) \text{ は } \pi \mathbb{C}_{X_w} \text{ の Verdier dual} \\ \mathcal{H}^i(\pi \mathbb{C}_{X_w}) \text{ は constructible} & \\ (\mathcal{H}^i(\pi \mathbb{C}_{X_w}) \text{ の support の次元}) < \dim \bar{X}_w - i & (i > 0) \end{array} \right.$$

また δ も n として特徴づけられる。 $\bar{X}_w = \bigsqcup_{y \leq w} X_y$ は $\bar{X}_w$ の Whitney stratification である。 $\mathcal{H}^i(\pi \mathbb{C}_{X_w})|_{X_y}$ は任意の i と任意の $y \leq w$ に対して locally constant である。

定理 5.7 ([KL2]) $y \leq w$ のとき

$$\sum_j \dim \mathcal{H}^j(\pi \mathbb{C}_{X_w})_{yB} \delta^{\frac{j}{2}} = P_{y,w}(\delta)。$$

特に $\mathcal{H}^j(\pi \mathbb{C}_{X_w}) = 0$ (j : odd)。また

$$\sum_j (-1)^j \dim \mathcal{H}^j(\pi \mathbb{C}_{X_w})_{yB} = P_{y,w}(1) \quad \square$$

定理の証明は次のように行われる。 G, X 等は有限体 $\mathbb{F}_q$ での対応物をもつので、有限体 $\mathbb{F}_q$ で $\mathbb{Q}_\ell$ -sheaf に関する対応する結果を示せばよい。これは Weil 予想等の Deligne による $\mathbb{Q}_\ell$ -sheaf の weight に関する深い定理を用いて示される。

なお Deligne-Gabber-Beilinson-Bernstein の分解定理を認めれば $\mathbb{C}$ での簡明な証明を与えることもできるが ([Sp]), 分解定理の証明

自体はやはり有限体にもって行って行われる。また青藤盛彦 A の Hodge module の理論を使えば完全に $\mathbb{C}$ で証明もできる。

11 箇所に 13 箇所の大道具を用いる必要がある。

例 5.8 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, $X = \mathbb{P}^1$ のとき。 $B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} a \in \mathbb{C}^\times \\ b \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\}$ とすると

例 1.7 の記号で

$$X = X_e \sqcup X_s$$

$$X_e = \{x=0\} = \{z=\infty\} = (\text{1 点})$$

$$X_s = X - X_e \cong \mathbb{C}$$

この場合 $\pi^* \mathbb{C}_{X_e} = \mathbb{C}_{X_e}$, $\pi^* \mathbb{C}_{X_s} = \mathbb{C}_X$ となる。 G が $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 以外のときは

Schubert variety の singularity は必ず簡単ではないので $\pi^* \mathbb{C}_w$ はこの

簡単には行かない。」

36. Kazhdan-Lusztig 予想の証明

6.1 Beilinson-Bernstein category 同値 (系 1.5) で M_w, L_w に対応する D_X -module $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w$ とする。すなわち

$$\mathcal{M}_w = D_X \otimes M_w \quad \mathcal{L}_w = D_X \otimes L_w.$$

$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}, B))$ の 2 つの basis $\{[M_w] \mid w \in W\}$, $\{[L_w] \mid w \in W\}$ の変換行列を求めるのが目標であった。 Lemma 4.4 により $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, B) \simeq \mathcal{M}(D_X, B)$

$\mathcal{B}$ の $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ は $K(MD_X, \mathcal{B})$ の $\mathcal{B}$ の basis $\{[\mathcal{M}_w] \mid w \in W\}$,
 $\{[\mathcal{L}_w] \mid w \in W\}$ の変換行列を定める事と同じである。この問題を
 考えるには $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w$ がどのような D_X -module であるかを知る必要が
 ある。Lemma 4.3 により $\mathcal{B}$ は regular Frobenius であることがわかって
 いる。

例 6.1 $G = SL(2, \mathbb{C})$, $X = \mathbb{P}^1$ に対して $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w$ を求めてみる。

例 5.3 により

$$\mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = \mathcal{O}(q) / (\mathcal{O}(q)E^+ + \mathcal{O}(q)(H+2))$$

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{O}(q) / (\mathcal{O}(q)E^+ + \mathcal{O}(q)H)$$

$$\mathcal{L}_s = \mathcal{O}(q) / (\mathcal{O}(q)E^+ + \mathcal{O}(q)H + \mathcal{O}(q)E^-)$$

$\mathcal{B}$

$$\mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X / (D_X \oplus (E^+) + D_X (\oplus (H) + 2))$$

$$\mathcal{M}_s = D_X / (D_X \oplus (E^+) + D_X \oplus (H))$$

$$\mathcal{L}_s = D_X / (D_X \oplus (E^+) + D_X \oplus (H) + D_X \oplus (E^-))$$

例 1.7 により, x -座標では

$$\mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X / (D_X x^2 \frac{\partial}{\partial x} + D_X (x \frac{\partial}{\partial x} + 1)) = D_X / D_X x$$

$$\mathcal{M}_s = D_X / D_X x \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\mathcal{L}_s = D_X / D_X x \frac{\partial}{\partial x}$$

z -座標では

$$\mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X / (D_X z \frac{\partial}{\partial z} + D_X (z \frac{\partial}{\partial z} - 1)) = 0$$

$$\mathcal{M}_S = D_X / D_X \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathcal{L}_S = D_X / D_X \frac{\partial}{\partial z}$$

と表す。さて

$$\begin{cases} \mathcal{M}_e = \mathcal{L}_e = D_X \delta & (\delta \text{ は } x=0 \text{ 上 support 有限な } \mathbb{T}^n \text{ の関数}) \\ \mathcal{L}_S = \mathcal{O}_X \\ \mathcal{M}_S = D_X Y & (Y \text{ は } \frac{\partial}{\partial z} Y = \delta \text{ と表す } \wedge \text{ 値-ガウス関数}) \end{cases}$$

がわかる。

6.2 $\mathcal{N}_w$ について

$\mathcal{N}_w = \mathcal{H}_{X_w}^{\text{codim } X_w}(\mathcal{O}_X)$ とおく。 $\mathcal{O}_X \in M(D_X, B)$, X_w は B -stable なる $\mathcal{N}_w \in M(\mathcal{O}_X, B)$ である。 $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w \in \mathcal{H}$ なる E への補助として, $\mathcal{N}_w$ の性質を示す。

$$\mathcal{M}_w = \bigoplus_{d \in w(a^-)} \mathcal{G}_d, \quad \mathcal{M}_w^\perp = \bigoplus_{d \in w(a^-) \cap a^+} \mathcal{G}_d \quad \text{さて } V_w = \exp(\mathcal{M}_w) wB/B \subset X$$

とおく。 V_w は X の affine open subset である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_w & \xrightarrow{\sim} & V_w \\ \uparrow & \cup & \uparrow \\ \mathcal{M}_w^\perp & \xrightarrow{\sim} & X_w \end{array} \quad \mathcal{G}(E) = \exp(E) wB \quad \dots (6.1)$$

と表す。これは知られている。

Lemma 6.2

$$(i) \mathcal{H}_{X_w}^c(\mathcal{O}_X) = 0 \quad (c \neq \text{codim } X_w).$$

$$(i) \mathcal{H}_{\partial X_M}^i(X_M) = 0 \quad (\forall i) \quad \text{ただし } \partial X_M = \overline{X_M} - X_M$$

$$(ii) \operatorname{ch}(\Gamma(X, \mathcal{L}_M)) = \operatorname{ch}(M_M) \quad \square$$

(証明) (i) Beilinson-Bernstein category 同値は derived category となるから、 $H^i(X, R\Gamma_{X_M}(\mathcal{O}_X)) = 0 \quad (i \neq \operatorname{codim} X_M)$ である。また、

$$\begin{aligned} H^i(X, R\Gamma_{X_M}(\mathcal{O}_X)) &= H^i(R\Gamma(X, R\Gamma_{X_M}(\mathcal{O}_X))) \\ &= H^i(R\Gamma_{X_M}(X, \mathcal{O}_X)) \\ &= H^i(R\Gamma_{X_M}(T_M, \mathcal{O}_{T_M})) \\ &= H_{X_M}^i(T_M, \mathcal{O}_{T_M}) \end{aligned}$$

よって (6.1) 成立する。

$$(ii) (i) \text{ より } R\Gamma_{\partial X_M}(X_M) = R\Gamma_{\partial X_M} R\Gamma_{X_M}(\mathcal{O}_X) = 0 \quad (\partial X_M \cap X_M = \emptyset).$$

よって成立する。

(iii) (i) の証明より $\Gamma(X, \mathcal{L}_M) = H_{X_M}^{\operatorname{codim} X_M}(T_M, \mathcal{O}_{T_M})$ 。 $\operatorname{ch} \Gamma(X, \mathcal{L}_M)$ であることは $\Gamma(X, \mathcal{L}_M)$ の T -module としての構造から得られる。 (6.1) の $\mathfrak{g}$ は T -equivariant であるから T -module $H_{m_M}^{\operatorname{codim} X_M}(m_M, \mathcal{O}_{m_M})$ である。 $m(\Delta^+) = \{d_1, \dots, d_m\}$, $m(\Delta^+) \cap \Delta^+ = \{d_1, \dots, d_r\}$ として $E_{d_i} \in \mathfrak{g}_{d_i} - (0)$ を固定する。 Killing form により $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^+$ は同型である。

$$\begin{cases} A = \Gamma(m_M, \mathcal{O}_{m_M}) = \mathbb{C}[E_{d_1}, \dots, E_{d_m}] \\ m_M^+ = \{x \in \mathfrak{A}_M \mid E_{d_j}(x) = 0, (j=1, \dots, r)\} \end{cases}$$

と仮定。 $\mathfrak{g}$ は T -module として

$$\Gamma(X, \mathcal{N}_W) \cong A_{E_{d_1} \dots E_{d_R}} / \sum_{j=1}^R A_{E_{d_1} \dots \hat{E}_{d_j} \dots E_{d_R}}$$

$$\cong \frac{\bigoplus_{\substack{j_p \in \mathbb{Z} \\ c_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathbb{C} E_{d_1}^{j_1} \dots E_{d_R}^{j_R} E_{d_{R+1}}^{c_{R+1}} \dots E_{d_m}^{c_m}}{\bigoplus_{\substack{j_p \in \mathbb{Z} \\ c_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \exists p \text{ s.t. } j_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathbb{C} E_{d_1}^{j_1} \dots E_{d_R}^{j_R} E_{d_{R+1}}^{c_{R+1}} \dots E_{d_m}^{c_m}}$$

$$\cong \bigoplus_{\substack{j_p \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \\ c_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathbb{C} E_{d_1}^{j_1} \dots E_{d_R}^{j_R} E_{d_{R+1}}^{c_{R+1}} \dots E_{d_m}^{c_m}$$

$$\text{よって } W\mathfrak{g} + \mathfrak{g} = \frac{1}{2} \left(\sum_{d \in \Delta^+} Wd + \sum_{d \in \Delta^+} d \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{d \in W\Delta \cap \Delta^+} d + \sum_{d \in W\Delta \cap \Delta^+} d + \sum_{d \in W\Delta \cap \Delta^+} d + \sum_{d \in W\Delta \cap \Delta^+} d \right)$$

$$= \sum_{d \in W\Delta \cap \Delta^+} d$$

$$= d_1 + d_2 + \dots + d_R$$

$$\text{よって } \text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_W)) = \frac{e^{-(d_1 + \dots + d_R)}}{\prod_{i=1}^R (1 - e^{-d_i}) \prod_{i=R+1}^m (1 - e^{-d_i})}$$

$$= \frac{e^{-W\mathfrak{g} + \mathfrak{g}}}{\prod_{d \in \Delta^+ \cap W\Delta} (1 - e^{-d}) \prod_{d \in \Delta^+ \cap W\Delta} (1 - e^{-d})}$$

$$= \frac{e^{-W\mathfrak{g} + \mathfrak{g}}}{\prod_{d \in \Delta^+} (1 - e^{-d})}$$

$$= \text{ch}(\mathcal{M}_W)$$

□

□

6.3 $\mathcal{M}_w, \mathcal{L}_w$ について

定理 6.3

i) $\mathcal{L}_w \simeq \mathcal{L}(X, X_w)$

ii) $\mathcal{M}_w \simeq \mathcal{N}_w^\vee$

ここで $\mathcal{L}(X, X_w), \mathcal{N}_w^\vee$ について簡単に説明しておく。

$\mathcal{L}(X, X_w)$ は $\mathcal{H}_{X_w}^{\text{codim } X_w}(\mathcal{O}_{X-\partial X_w})$ — これは $X-\partial X_w$ 上の regular holonomic system — の X 全体への minimal extension である。すなわち,

$\mathcal{L}(X, X_w)$ は regular holonomic D_X -module であり,

$$\left(\begin{array}{l} \bullet \mathcal{L}(X, X_w)|_{X-\partial X_w} \cong \mathcal{H}_{X_w}^{\text{codim } X_w}(\mathcal{O}_{X-\partial X_w}) \\ \bullet \mathcal{L}(X, X_w) \text{ は } \partial X_w \text{ に support を持つ coherent quotient,} \\ \text{coherent submodule を持つ。} \end{array} \right.$$

で特徴づけられる。

$\mathcal{N}_w^\vee$ は $\mathcal{N}_w$ の dual であり、 $\mathcal{N}_w^\vee = \text{Ext}_{D_X}^{\dim X}(\mathcal{N}_w, D_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}$ 。ここで Ω_X は 最高次の微分形式の層、 Ω_X^{-1} はその $\mathcal{O}_X$ -dual。 D_X -module $\mathcal{N}$ の dual とは思えば $\mathcal{H}\text{om}_{D_X}(\mathcal{N}, D_X)$ であるが、derived category で考えたほうがよいので $\text{R}\mathcal{H}\text{om}_{D_X}(\mathcal{N}, D_X)$ と考える。これは D_X -module の complex として $\mathbb{D}(\mathcal{N}) := \text{R}\mathcal{H}\text{om}_{D_X}(\mathcal{N}, D_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}$ と考える。このとき $\mathcal{N}$ が holonomic ならば $\mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\mathcal{N})) = 0$ ($i \neq \dim X$)。そして $\mathcal{H}^{\dim X}(\mathbb{D}(\mathcal{N})) = \text{Ext}_{D_X}^{\dim X}(\mathcal{N}, D_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{-1}$ は holonomic D_X -module $\mathcal{N}$ の

dual と呼ぶ $\mathcal{N}^*$ と書く。 $\mathcal{N}^* \in \text{holonomic}$, また $\mathcal{N}$ は regular holonomic ならば $\mathcal{N}^* \in \text{regular holonomic}$ である。 $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}^*$ は contravariant な exact functor になる。 さらに dual $\mathbb{E}$ とする操作は Riemann-Hilbert 対応では, constructible sheaf (の complex) の Verdier dual + shift に対応する。 また $\mathcal{N}^{**} \simeq \mathcal{N}$ である。

(定理 6.3 の証明)

(i) $\ell(w)$ に関する induction を示す。

$\ell(w) = 0$ である $w = e$ のとき $\partial X_e = \emptyset$ なる $a \in \mathbb{A}$ で $\mathcal{L}(X, X_e) \simeq \mathcal{N}_e$ である。

$\text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_e)) = \text{ch}(\mathcal{M}_e)$ である。 Verma module の一般論から $\mathcal{M}_e$ は既約で $\mathcal{M}_e = \mathbb{A}_e$ 。 および明らか。

$\ell(w) > 0$ のとき $\text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_w)) = \text{ch}(\mathcal{M}_w)$ なる Verma module の一般論から $\Gamma(X, \mathcal{N}_w)$ は組成因子として L_w を重複度 1 で含み, 他の因子は $y < w$ に対応する L_y と同型。 および induction の所定から

$$\mathcal{L}_w / X - \partial X_w \simeq \mathcal{N}_w / X - \partial X_w \simeq \mathcal{H}_{X_w}^{\text{codim } X_w}(\mathcal{O}_{X - \partial X_w})$$

L_w は既約な $\mathcal{L}_w$ は non-trivial な submodule, quotient を含む。

また Lemma 4.3 により $\mathcal{L}_w$ は regular holonomic。 および明らか。

(ii) (i) により $\text{MCD}_{X,B}$ の simple object は $\mathcal{L}_w \simeq \mathcal{L}(X, \mathcal{N}_w)$ と同型。

$\mathcal{L}(X, \mathcal{N}_w)$ は self-dual なる S 任意の $\mathcal{N} \in \text{MCD}_{X,B}$ に対して $\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}^*$ の組成因子は重複度 ε である一致する。 特に $\text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N})) = \text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}^*))$ 。

および特に $\text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_w^*)) = \text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_w)) = \text{ch}(\mathcal{M}_w)$ 。 Verma module

の一般論は

$$\begin{pmatrix} M_w \xrightarrow{\cong f_1} \Gamma(X, \mathcal{N}_w^\vee) \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\ \mathcal{N} \text{ の 組成 因子 は } y < w \text{ に対す } \mathcal{L}_y \text{ と 同型} \end{pmatrix} \quad \dots (6.2)$$

よって D_X -module に よって

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_w \xrightarrow{\cong f_2} \mathcal{N}_w^\vee \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\ \mathcal{N} \text{ の 組成 因子 は } y < w \text{ に対す } \mathcal{L}_y \text{ と 同型} \end{pmatrix} \quad \dots (6.3)$$

(i) に 対し $\text{supp } \mathcal{N} \subset \partial X_w$ 。 (6.3) の dual $\mathcal{E}$ として

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_w^\vee \xleftarrow{\cong f_3} \mathcal{N}_w^\vee \leftarrow \mathcal{N}^\vee \leftarrow 0 \quad (\text{exact}) \\ \text{supp } \mathcal{N}^\vee \subset \partial X_w \end{pmatrix} \quad \dots (6.4)$$

と 3.17 Lemma 6.2 (ii) に 対し $\mathcal{H}_{\partial X_w}^\circ(\mathcal{N}_w) = 0$ 。 よって $\mathcal{N}^\vee = 0$ 。 よって f_3 は injective。 よって f_1, f_2 は surjective。 $\text{ch}(M_w) = \text{ch}(\Gamma(X, \mathcal{N}_w^\vee))$ となる。 f_1 は 同型写像。 従って f_2 は 同型写像。 ■

6.4 定理 5.4 の証明

Riemann-Hilbert 対応 (2.1)

$$\begin{aligned} \{\text{regular holonomic } D_X\text{-modules}\} &\xrightarrow{\text{DR}} \{\text{perverse sheaf on } X\} \\ \text{DR}(\mathcal{M}) &= \text{R}\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) = \mathcal{R}_X \bigoplus_{D_X}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}[-\dim X] \end{aligned}$$

§ 6.2, § 6.3 は

$$\text{DR}(\mathcal{L}_w) = \pi \mathbb{C}_{X_w}[-\text{codim } X_w]$$

$$\text{DR}(\mathcal{N}_w) = \mathbb{C}_{X_w}[-\text{codim } X_w]$$

$$\begin{aligned} DR(\mathcal{U}_w) &= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{C}_{X_w}[-\dim X_w], \mathbb{C}_X) \\ &= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathbb{C}_{X_w}, \mathbb{C}_X)[\dim X_w] \end{aligned}$$

$\pi^* \mathbb{C}_{X_w}, \mathbb{C}_{X_w}$ は $\Sigma \cup \Sigma^c$ 上 $\overline{X}_w, X_w$ 上の complex & sheaf $\mathcal{Z}$ がある。
 外側 $\mathcal{Z}$ は zero として flat に X 上の complex & sheaf と見なす。

$\mathbb{Z}$ -linear map $f: K(M(D_X, B)) \rightarrow \mathbb{Z}[W]$ を

$$f([M]) = \sum_{y \in W} \left(\sum_i (-1)^{\dim X - i} \dim \mathcal{H}^i(DR(M))_{yB} \right) y \quad \mathcal{Z} \text{ 定める。}$$

このとき

$$\begin{aligned} f([M_w]) &= f([X_w]) \\ &= \sum_{y \in W} \left(\sum_i (-1)^{\dim X - i} \dim \mathcal{H}^i(\mathbb{C}_{X_w}[-\dim X_w])_{yB} \right) y \\ &= (-1)^{\dim X} w \end{aligned}$$

よって f は $\mathbb{Z}$ -module として同型 $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ 。一方 定理 5.7 により

$$\begin{aligned} f([L_w]) &= \sum_{y \in W} \left(\sum_i (-1)^{\dim X - i} \dim \mathcal{H}^i(\pi^* \mathbb{C}_{X_w}[-\dim X_w])_{yB} \right) y \\ &= \sum_{y \in W} (-1)^{\dim X} P_{y,w}(1) y \\ &= \sum_{y \in W} (-1)^{\dim X - \dim Y} P_{y,w}(1) f([M_y]) \end{aligned}$$

従って示した。

参考文献

まず本文と直接関係するものをあげる。

[BB1] Beilinson, A., Bernstein, J. : Localisation de $\mathfrak{g}$ -modules.
Comptes Rendus 292, 15-18 (1981)

[BK] Brylinski, J.-L., Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture
and holonomic systems. Invent. Math. 64, 387-410 (1981)

[KL1] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups
and Hecke algebras. Invent. Math. 53, 165-184 (1979)

[KL2] Kazhdan, D., Lusztig, G. : Schubert varieties and Poincaré
duality. Proc. Symp. in Pure Math. 36, 185-203 (1980)

定理3.1 の証明で用いた Kostant の結果については

[Ko] Kostant, B. : Lie group representations on polynomial rings.
Amer. J. Math. 85, 327-404 (1963)

Verma module に関する基本的な事柄については

[Ja] Jantzen, J. C. : Moduln mit einem höchsten Gewicht. Springer
Lecture Notes in Math. 750, 1979.

Hecke algebra については [KL1] の §5 に

[I] Iwahori, N. : On the structure of the Hecke ring of a
Chevalley group over a finite field. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec
1A 10, 215-236 (1964)

次に D の群の理論の表現論への応用に関する論文と

思いこきまにあげる。

- [BB2] Beilinson, A., Bernstein, J. : A generalization of Casselman's submodule theorem, Progress in Math. 40, pp.35-52, Birkhauser, 1983.
- [B] Beilinson, A. : Localisation of representations of reductive Lie algebras. Proc. International Congress of Math. Warszawa, 1983.
- [BoB] Borho, W., Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces. I. II. III. Invent. Math. 69, 437-476 (1982), preprint, Invent. Math. 80, 1-68 (1985)
- [CC] Cassian, L., Collingwood, D. : Complex geometry and the asymptotics of Harish-Chandra modules for real reductive groups. I. II. Trans. Amer. Math. Soc. to appear, Invent. Math. 86, 255-286 (1986)
- [G1] Ginsburg, V. : Characteristic varieties and vanishing cycles. Invent. Math. 84, 327-402 (1986)
- [G2] Ginsburg, V. : $\mathfrak{g}$ -modules, Springer's representations and bivariant Chern classes. Adv. Math. 61, 1-48 (1986)
- [G3] Ginsburg, V. : Lagrangean construction for representations of Hecke algebras. Adv. Math. 63, 100-112 (1987)
- [HK1] Hotta, R., Kashiwara, M. : The invariant holonomic systems on a semisimple Lie algebra. Invent. Math. 75, 327-358 (1984)
- [HK2] Hotta, R., Kashiwara, M. : Quotients of the Harish-Chandra systems by primitive ideals. Progress in Math. 60, Birkhauser, 1985.

- [KT] Kashiwara, M., Tanisaki, T. : The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold. Invent. Math. 77, 185-198 (1984)
- [LV] Lusztig, G., Vogan, D. : Singularities of closures of K -orbits on flag manifolds. Invent. Math. 71, 365-379 (1983)
- [Sp] Springer, T. A. : Quelques applications de la cohomologie d'intersection. Séminaire Bourbaki, exposé 589. Astérisque 92-93, 249-273 (1982)
- [T1] Tanisaki, T. : Holonomic systems on a flag variety associated to Harish-Chandra modules and representations of a Weyl group. Adv. St. in Pure Math. 6, 139-154 (1985)
- [T2] Tanisaki, T. : Hodge modules, equivariant K -theory and Hecke algebras. preprint.
- [T3] Tanisaki, T. : Characteristic varieties of highest weight modules and primitive quotients. Adv. St. in Pure Math. to appear
- [T4] Tanisaki, T. : Twisted differential operators and affine Weyl groups. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. to appear
- [V] Vogan, D. : Irreducible characters of semisimple Lie groups. III. Invent. Math. 71, 381-417 (1983)