

Dirac作用素のスペクトルについて

京大 理 山 田 修 宣

下記のことは、本研究集会の最後に追加講演として、発表
させていただいた内容ですが、少し変えたところもあります
。なお証明などの詳しい議論については、Publ. Res. Inst.
Math. Sci. に発表される予定の、O. Yamada, "On the principle
of limiting absorption for the Dirac operator" を見られたい
。

unperturbed Dirac 作用素

$$L_0 = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta \quad (i = \sqrt{-1})$$

と perturbed Dirac 作用素

$$L = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta + Q(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

を考えよう。ここで、 α_j, β は、 4×4 の、対称な (Hermitian)
定数行列で、 $\alpha_4 = \beta$ とおいたとき次の関係をもたすとする。

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2 \delta_{jk} I, \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

(I は 4×4 の単位行列で、 δ_{jk} はクロネッカーの記号である。) ポテンシャル $Q(x)$ は、 4×4 の対称行列値の $\mathbb{R}^3$ の関数である。我々は、この Dirac 作用素をヒルベルト空間 $\mathcal{L}^2 = (L^2(\mathbb{R}^3))^4$ で考える。そこで、 $\mathcal{L}^2$ は $\mathbb{C}^4$ ベクトル値の $\mathbb{R}^3$ の関数 $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))$ で

$$(\|u\|_{\mathcal{L}^2})^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 dx < \infty, \quad |u(x)|^2 = \sum_{j=1}^4 |u_j(x)|^2$$

をみたすものの全体である。内積は、 $u, v \in \mathcal{L}^2$ に対して

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle u(x), v(x) \rangle dx, \quad \langle u(x), v(x) \rangle = \sum_{j=1}^4 u_j(x) \overline{v_j(x)}$$

で与える。このとき L_0 は、一意的な自己共役作用素 H_0 をもち、その定義域は $\mathcal{D}_0$ に一致する、ことがわかってゐる (例えば、Kato [2])。 $\mathcal{D}_0$ は、 $\mathcal{L}^2$ の関数で、一階の distribution の意味での偏微分もすべて $\mathcal{L}^2$ であるような関数全体の作る、ヒルベルト空間である。

自己共役作用素 H_0 のスペクトルについては、次のことが知られてゐる (例えば、Mochizuki [3])。

性質 1 $|\lambda| \geq 1$ であるような実数 λ は、すべて H_0 の連続スペクトルであり、区間 $(-1, +1)$ は H_0 の resolvent 集合に含まれる。

次に、 $H = H_0 + Q$ の自己共役性について考えよう。この問題については、Prossey [4] により次の結果が得られる。

性質 2 $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$ と、 $Q_k(x) = (q_{ij}^{(k)}(x))$ ($k=1, 2$) とおく。 $Q_1(x)$ については、 $q_{ij}^{(1)}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ($i, j=1, 2, 3, 4$) がなりたつ。 $Q_2(x)$ については、ある正数 $p > 3$ があって、 $q_{ij}^{(2)}(x) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ($i, j=1, 2, 3, 4$) がみたされる、とする。 $\therefore$ $H = H_0 + Q$ は、その定義域 $\mathcal{D}(H)$ が $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0) = \mathcal{H}^1$ であるような自己共役作用素である。

さて、 H のスペクトルの性質を調べよう。まず、本質的スペクトルについては、次の事実が示される。

定理 1 ある正数 $p > 3$ があって、 $|Q(x)|$ は局所的に $L^p(\mathbb{R}^3)$ かつ、 $|Q(x)| = o(1)$ ($|x| \rightarrow \infty$)、とする。 $\therefore$ $|Q(x)|$ は $Q(x) = (q_{ij}(x))$ のとき、 $|Q(x)| = \sqrt{\sum_{i,j} |q_{ij}(x)|^2}$ で定義する。そのとき、 $H = H_0 + Q$ の本質的スペクトルは、 H_0 のそれと一致する。

次に、 $(-\infty, -1)$ 又は $(+1, +\infty)$ に、 H の固有値が存在しないための十分条件を与える。この定理は、Roze [5] の線に沿って証明される。

定理 2 $Q(x) = (q_{ij}(x))$ は定理 1 の仮定をみたし、各 $q_{ij}(x)$

は、有限個の特異点を除いて一回連続的微分可能であり、かつ正の定数 C_1 と R_0 があって

$$\sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial Q}{\partial x_k} \right| \leq C_1 \quad (|x| \geq R_0)$$

さらに

$$|x| |Q(x)| \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

とすると、 α と ε 、 $H = H_0 + Q$ は $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$ に固有値を持たない。

最近、Agmon [1] は、全空間の楕円型作用素に対して、極限吸収法とスペクトルの絶対連続性を論じているが、それを参考にすれば、Dirac 作用素に対しても同様のことがなりたつ。

定理 3 $Q(x)$ は定理 2 の仮定をみたしさらに、ある $h > 0$ があって

$$|Q(x)| \leq \frac{\text{const.}}{(1+|x|)^{1+h}} \quad (|x| \geq R_0)$$

とすると、任意の $s > \frac{1}{2}$ と $(-\infty, -1)$ または $(+1, +\infty)$ に含まれる区間 $[a, b]$ に対して、ある定数 $C_2 = C_2(s, a, b)$ があ

り、

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{-2s} \left(|u(x)|^2 + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \right|^2 \right) dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{2s} |(L-\lambda)u|^2 dx$$

が、すべての $u \in \mathcal{H}_s^1$ と、 $a \leq \text{Re } \lambda \leq b$ 、 $|\text{Im } \lambda| \leq 1$ なる、可

すべての複素数 λ に対してなりたつ。ここで、 $u \in \mathcal{H}_S^1$ とは

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^{2s} \left(|u(x)|^2 + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \right|^2 \right) dx < +\infty$$

なる関数全体である（微分は distribution の意味）。

(系) $H = H_0 + Q$ のスペクトル分解を、 $H = \int \lambda dE(\lambda)$ とおく。このとき、任意の $f \in \mathcal{L}^2$ に対して、 $(E(\lambda)f, f)$ は λ の関数として、 $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$ で絶対連続である。

REFERENCES

- 1 Agmon, S., Spectral properties of Schrödinger operators, Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, 679-683.
- 2 Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- 3 Mochizuki, K., On the perturbation of the continuous spectrum of the Dirac operator, Proc. Japan Acad., 40(1964), 707-712
- 4 Prosser, T., Relativistic potential scattering, J. Mathematical Phys., 4(1963), 1048-1054.
- 5R Roze, S. N., On the character of the spectrum of the Dirac operator, Theoretical and Mathematical Physics, 2(1970), 377-382.