

強く駆動されたスピン及びスピナーボゾン系におけるカオス

大野稔彦 (久留米工大)

スピナーボゾン系は2準位原子と電磁場の共鳴相互作用におけるモデルである。これは回転系と振動系の結合した系とも等価である。(1), (2) スピン系の特徴はこれが本来量子系から出てきたシステムである事である。またこれはレーザー、光と物質の相互作用の基本的な量子系である。ただしレーザーにおけるエネルギーのポンピングは簡単のため考慮しない。これに完全に対応する古典力学系はあまり知られていない。またスピナーボゾン系は人工的操作の加えられていない非可積分の系としては最も簡単なシステムである。密度行列とその行列要素に着目してスピナーボゾン系の統計力学上の性格を数値解析によって一挙にあきらかにする事を試みるが、非平衡系では密度行列の要素が時系列運動を行うので古典力学の変数と同じような運動をする。(3) この密度行列の時系列運動の相関関数、分配関数を求める。また量子系であることを考慮していわゆる量子分配関数も直接数値計算することによって統計力学の性質からみた古典力学でのカオスと量子系でのカオスの違いを調べる。

スピナーボゾン系のハミルトニアンはスピン演算子 S^z, S^+, S^- と振動子演算子 a^+, a^- によって与えられる。

$$H = \omega_a S^z + \omega_c a^+ a^- - i g a^- (S^+ + S^-) + h.c.$$

ω_a と ω_c は原子と振動子の固有角周波数である。密度行列は勿論ハイゼンベルグ方程式に従う。

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$$

密度行列は実際には適当な固有状態についての行列要素によって表される。ここではその固有状態としてスピンとボソンの固有状態を取る。結合スピン系の固有状態は回転角運動量の固有状態に等しい。振動子についてはコヒーレント状態を選ぶと行列要素の対角成分のみが現われる。スピン固有状態についてもコヒーレント状態を選んで密度行列を表示すると密度行列は古典的変数、即ちスピンについてはブロッホ空間の局座標変数 θ, ϕ の分布関数によって表される。この分布関数はフォッカー・プランク型の古典系と類似の方程式に従う。

$$\begin{aligned} \rho = \sum_{\theta, \phi, \alpha} P(\theta, \phi, \alpha) |\theta, \phi, \alpha\rangle \langle \theta, \phi, \alpha| \\ \frac{\partial P(\theta, \phi, \alpha)}{\partial t} = -\omega_c \left(\frac{\partial}{\partial E_y} E_x - \frac{\partial}{\partial E_x} E_y \right) P + 2\gamma \left(-S \cos \theta - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) P \\ - 2\Omega \frac{\cos \omega t}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \phi \sin \theta P) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi \cos \theta P) \right) \\ + 2\mu E_x \left(\frac{\sin \theta}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi P) \right) \\ - 2\mu E_x \left(\frac{\sin \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi P) \right) \\ - \mu \frac{\partial}{\partial E_x} \left((S+1) \sin \theta e^{-i\theta} + \frac{1-\cos \theta}{2} e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{1-\cos \theta}{2} e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) P \end{aligned}$$

$$+ \mu \frac{\partial}{\partial E_y} \left((S+1) \sin \theta e^{i\theta} + \frac{1-\cos \theta}{2} e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{1-\cos \theta}{2} e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) P \\ + D \left(\frac{\partial^2}{\partial E_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial E_y^2} \right) P$$

上の式をボゾン変数 E_x, E_y で積分すれば半古典スピン方程式が得られる。

このような古典-量子対応の可能なことがスピナーボゾン系の特徴でもある。この系の量子状態の特徴を示すために密度行列要素の方程式の固有値と固有ベクトルを求める。ここで言う固有値、固有ベクトルとは Schrodinger 系のものと異なり、密度行列要素を決定する線形微分方程式の固有値、固有ベクトルを言う。従って図の固有ベクトルの絶対値の表示は対応する行列要素の時間運動の周波数スペクトラムを与える。密度行列の行列要素の時系列データを以上の固有値と固有ベクトルによって線形変換似によって求める。そのデータを揺動パラメータ法によって解析し特性関数、分散関数、 $\sigma - \alpha$ 特性を求めた。その解析は半古典論によるデータについても行う。(4)

$$M_q(n) = \langle \exp(nq\alpha_n) \rangle \\ \phi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_q \\ \alpha(q) = \frac{d\phi(q)}{dq} \quad \sigma(q) = \frac{d\alpha(q)}{dq} \\ f(\alpha) = q\alpha - \phi(q)$$

量子分配関数はある演算子 ρ についていかのトレース公式によって求めることができるが、この場合の密度行列の行列要素はコヒーレント表示を用いず粒子数表示に依るのが一般的である。

$$\phi(q)/q = 1/q \operatorname{Tr}(\rho \exp(-qH)) \\ = \sum_n \sum_{n'} \rho_{n, n'} \langle \exp(-qH) \rangle_{n, n'}$$

また指数関数演算子は q 変数の虚数時間における運動方程式に従うのでこれに依って求めることができる。求められた分配関数は密度行列の時間運動に従って大きく変動する。それに対して時系列運動のデータから求められた分配関数は全時間について計算されまた平均操作が加わっているために 0 点付近での時間変動は当然現れない。比較のため kicked spin 系のスピン演算子について同様に時系列データおよび量子分配関数による結果を示す。(5) Kicked系では規格が不統一のため数量的一致は得られないがそのたは同様の結果を与える。

References

- (1) R. Graham and H. Hohnerbach: Phys. Lett. A A101 (1986) 61.
- (2) L. Muller, J. Stolze, H. Leschke and P. Nagel: Phys. Rev. A 44 (1991) 1022.
- (3) A. R. Kolovsky: Phys. Lett. A A148 (1990) 72.

- (4) H. Fujisaka: Prog.Theor.Phys.71 (1984) 513; H.Fujisaka and M.Inoue: ibid. 77 (1987) 1334.
 (5) T.Geisel: Phys.Rev.A 41 (1990) 2989.

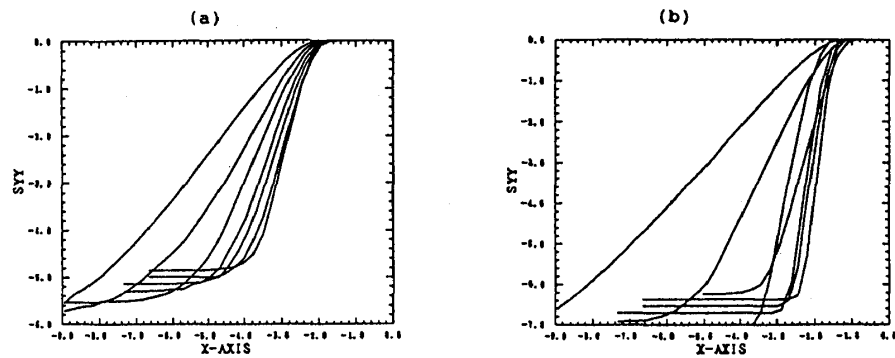


Fig.1 Log-Log plot of correlation function $C(r)$ versus r for $\text{Re}[\rho_{1,2}]$. $\omega_c = 17711/28657$, $g=0.5$, sampled by 128 data, (a) $\gamma=0.001$, (b) $\gamma=0.0$.

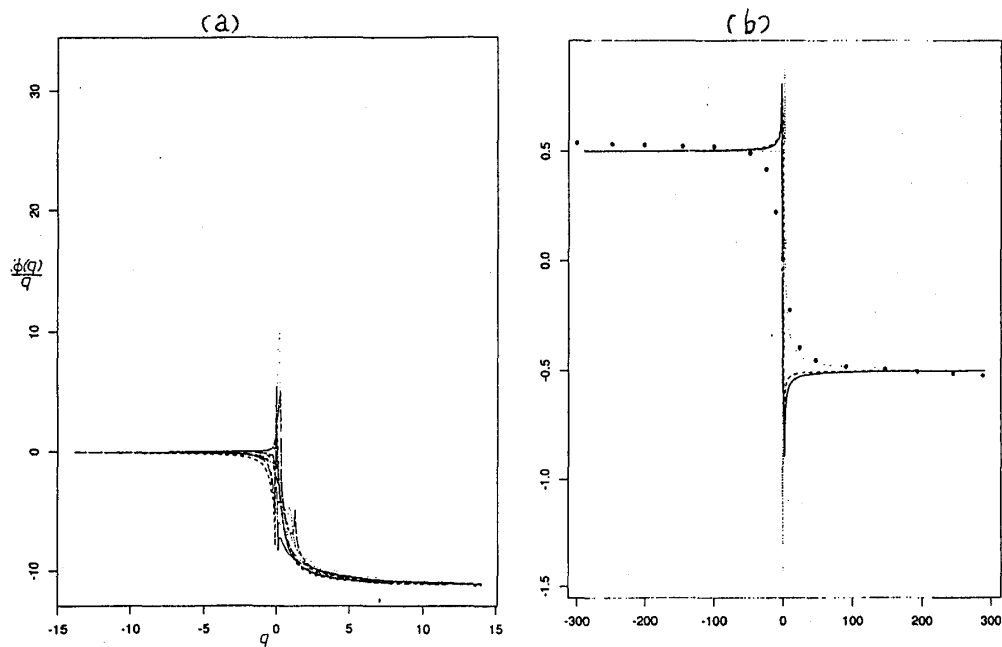


Fig.2 Quantum partition function of (a) hamiltonian, and (b) S_z , at the time $t=2\pi*100, 4\pi*100, \dots, 16\pi*100$. classical data plotted by $\bigcirc$.

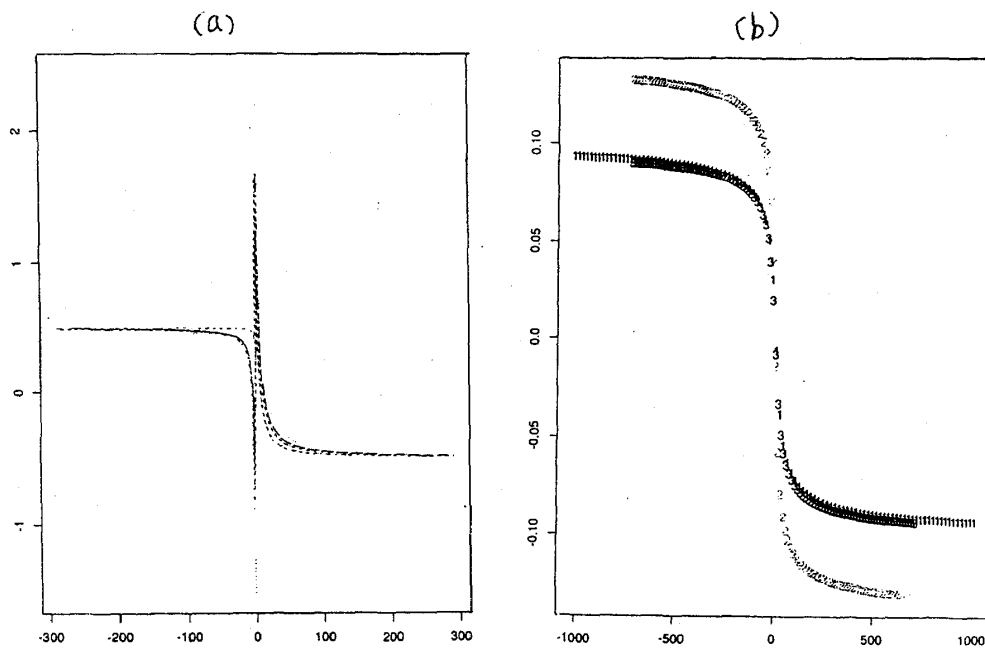


Fig.3 (a) Quantum partition function and (b) classical ones of S_x , S_y and S_z for the kicked spin system, for the same case as Fig.1 and 2.