

Padé 近似を用いた乱流理論の試み

電機大 理工 福湯章夫

§ 1. 序

乱流理論において、速度相関に対する方程式系から、例えば「エネルギー・スペクトルに対する閉じた方程式」を得るのに、従来種々の打ち切りの方法が考えられている。この論文では打ち切りの問題を少し違った立場から考えてみよう。流れを支配するナビエ・ストークスの方程式から、速度の n 次の相関に対する方程式を導くと、それは n 次の速度相関を含む。3 次の相関に対する式を作れば 4 次の相関を含む。以下同様で、これらの無限方程式系から低次の相関に対する閉じた方程式を得るのに何か打ち切りの仮定をしなければならない。

これが従来のやり方である。この論文では、上のような相関関数に対する無限方程式系のかわりに、ある特定の相関関数の高階の導関数を用いた方法について検討する。以下、お2節で簡単な方程式系について概観し、お3節以下で Burgers 乱流に適用した結果を述べる。

§2. 無限方程式系

例えば、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{df}{dt} = f, \quad f(0) = 1 \quad (1)$$

を考えよう。(1)の解は勿論 $f(t) = e^t$ であるが、(1)を形式的に微分して行くと

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{df}{dt} = f, \quad \frac{d^3f}{dt^3} = \frac{df}{dt} = f, \dots$$

以下同様に、任意の n に対し

$$\frac{d^nf}{dt^n} = f$$

となり、 $t = 0$ においては

$$f(0) = \frac{df}{dt}(0) = \dots = \frac{d^nf}{dt^n}(0) = \dots = 1$$

である。したがって、(1)の解の中級数展開として

$$f(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (2)$$

を得る。これは任意の t について収束する。実関数論の立場から言えば、指数関数 e^t は (2) で定義されるべきもので、 e^t のあらゆる性質は (2) から導くことができる。

次に、無限方程式系

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_n(t)}{dt} &= F_n(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}, t) \\ f_n(0) &= a_n \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3)$$

を考えてみよう。\$F_n\$ はその引数について十分滑らかな関数とする。そこで

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= f_1 \\ g_2 &= g_2(f_1, f_2, t) = F_1(f_1, f_2, t) \\ g_3 &= g_3(f_1, f_2, f_3, t) = \frac{\partial F_1}{\partial f_1} F_1 + \frac{\partial F_2}{\partial f_2} F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

のように形式的に変換すれば, (3) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg_n}{dt} &= g_{n+1} \\ g_n(0) &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5)$$

の形に変形することが出来る。以下 (5) の形で考える。

(3) あるいは (5) を有限項で打ち切った有限系は無論閉じていない。しかし, (1) と同様にその解を巾級数の形で求めることは可能である。実際 (5) から,

$$\frac{dg_1}{dt} = g_2, \quad \frac{d^2 g_1}{dt^2} = \frac{dg_2}{dt} = g_3, \quad \dots, \quad \frac{d^n g_1}{dt^n} = g_{n+1}, \quad \dots$$

故に, \$t=0\$ においては

$$g_1(0) = b_1, \quad \frac{d^n g_1}{dt^n}(0) = b_{n+1}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

となり, これから $g_1(t)$ の巾級数展開として

$$g_1(t) = b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \frac{b_3}{2!} t^2 + \dots + \frac{b_{m+1}}{m!} t^m + \dots \quad (6)$$

を得る。同様にして, $g_m(t)$ についても

$$g_m(t) = b_m + \frac{b_{n+1}}{1!} t + \dots + \frac{b_{n+m}}{m!} t^m + \dots \quad (7)$$

もし, (6), (7) の巾級数がすべて収束すれば, このようにして得られた関数列 $\{g_m(t)\}$ は方程式系 (5) を満たす。これを (5) の解と考えるのは自然である。又, (4) を用いれば $\{g_m(t)\}$ から (3) の解 $\{f_m(t)\}$ が求まることになる。

一例として

$$b_m = (n-1)! \quad (8)$$

とすれば

$$g_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)!}{m!} t^m = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \quad (9)$$

を得る。

方程式系 (5) に対する F.T. の仮定は, ある N に対し

$$g_N = G_N(g_1, g_2, \dots, g_{N-1})$$

を仮定することである。例えば, 問題 (5), (8) に対して

$$g_3 = 2g_1^3 \quad (10)$$

を仮定し, g_1 , g_2 に対する関じた系として

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg_1}{dt} &= g_2, & g_1(0) &= 1 \\ \frac{dg_2}{dt} &= 2g_1^3, & g_2(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を採用すれば, 問題 (11) は () に対応する解

$$g_1(t) = \frac{1}{1-t}, \quad g_2(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \quad (12)$$

を持つ。しかし, 打ち切りの仮定 (10) が正確な答を与えるのは初期条件 (8) に対してだけである。初期条件が異なれば (11) の解は (5) の近似解を与えるが, 一つの打ち切りの仮定がどのような近似に相当するか, 又, 考えている力学系を正しく近似するにはどのような打ち切りの仮定がよいかを判定するのは容易ではない。

問題 (5) の初期条件 b_m が有限個しか計算できないときは, この有限個の係数を用いた Padé 式を近似解とすることも考えられよう。

乱流理論に現われる速度相関関数, 又はモーメントに対する方程式は, 形式的には (3) の形をしている。次節以下で, Burgers 乱流のエネルギー・スペクトルと Padé 近似で与えられる問題を検討する。

§ 3. Burgers 乱流

Burgers 乱流は Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (13)$$

に支配される。 $u(x, t)$ の Fourier 係数を $u(k, t)$ とすれば、 $u(k, t)$ に対する方程式は

$$\frac{\partial u(k)}{\partial t} + \nu k^2 u(k) = - \sum_{k=p+q} i q u(p) u(q) \quad (14)$$

で与えられる。 (14) から $\langle u(k) u(-k) \rangle$ に対する式を作ると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle u(k) u(-k) \rangle &= -2\nu k^2 \langle u(k) u(-k) \rangle \\ &\quad - i \sum_{k=p+q} \langle u(-k) u(p) u(q) \rangle - i \sum_{-k=p+q} \langle u(k) u(p) u(q) \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

更に、時間についての2階の導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle u(k) u(-k) \rangle &= 4\nu^2 k^4 \langle u(k) u(-k) \rangle \\ &\quad + i\nu \left\{ \sum_{k=p+q} q(3k^2 + p^2 + q^2) \langle u(-k) u(p) u(q) \rangle + \sum_{-k=p+q} (k \rightarrow -k) \right\} \\ &\quad - \sum_{k=p+q} \left\{ \sum_{-k=r+s} q s \langle u(r) u(s) u(p) u(q) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=r+s} q s \langle u(-k) u(r) u(s) u(q) \rangle + \sum_{q=r+s} q s \langle u(-k) u(p) u(r) u(s) \rangle \right\} \\ &\quad - \sum_{-k=p+q} \{ k \rightarrow -k \} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。以下同様に $\langle u(k) u(-k) \rangle$ の時間についての n 階の導

関数は $n+2$ 次までのモーメントを含む。当然のことながら、これらの式をどのように組合わせても $\langle u(k)u(-k) \rangle$ に関する関じた高階の微分方程式は得られない。ところが、初期時刻 $t=0$ におけるすべての高次モーメントの値が知られていれば、前節で述べたようにして $\langle u(k)u(-k) \rangle_t$ (以下 $\langle \dots \rangle_t$ は時刻 t におけるモーメントの値とする) の t に関する巾級数展開、

$$\begin{aligned} \langle u(k)u(-k) \rangle_t &= \langle u(k)u(-k) \rangle_0 + \frac{\partial \langle u(k)u(-k) \rangle}{\partial t} \Big|_0 \cdot t \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle u(k)u(-k) \rangle}{\partial t^2} \Big|_0 \cdot t^2 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。実際には $\langle u(k)u(-k) \rangle$ のすべての高階微分係数を求めることはできないから、(17) は有限項で打ち切らざるをえない。このようにして得られた有限級数は、当然のことながらごく初期時刻に近いところ以外では $\langle u(k)u(-k) \rangle_t$ の正しい振舞いを与えない。そこで、この有限個の係数を用いて前節で述べたように、Padé 近似で (17) をまとめてみる。同じ個数の係数を用いても Padé 式は一意的に決まらないうが、これらの Padé 式の中で $t \rightarrow \infty$ における振舞いを最もよく近似するものを採用すればよい。

この論文では 3 階の微係数まで取り入れる。(14), (15), (16) を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial t^3} \langle u(k) u(-k) \rangle &= -8\nu^3 k^6 \langle u(k) u(-k) \rangle \\
&- i\nu^2 \sum_{k=p+q} q \{ 8k^4 + 4k^2(p^2+q^2) + (p^2+q^2)^2 \} \langle u(-k) u(p) u(q) \rangle - i\nu^2 \sum_{-k=p+q} \{ k \rightarrow -k \} \\
&+ \nu \sum_{k=p+q} \left\{ \sum_{-k=r+s} 85(3k^2+2p^2+2q^2+r^2+s^2) \langle u(r) u(s) u(p) u(q) \rangle \right. \\
&\quad + \sum_{p=r+s} 85(4k^2+p^2+2q^2+r^2+s^2) \langle u(-k) u(r) u(s) u(q) \rangle \\
&\quad \left. + \sum_{q=r+s} 85(4k^2+2p^2+q^2+r^2+s^2) \langle u(-k) u(p) u(r) u(s) \rangle \right\} \\
&+ \nu \sum_{-k=p+q} \{ k \rightarrow -k \} \\
&+ i \sum_{k=p+q} \left[\sum_{-k=r+s} 85 \left\{ \sum_{r=a+b} b \langle u(a) u(b) u(s) u(p) u(q) \rangle \right. \right. \\
&\quad + \sum_{s=a+b} b \langle u(r) u(a) u(b) u(p) u(q) \rangle \\
&\quad + \sum_{p=a+b} b \langle u(r) u(s) u(a) u(b) u(q) \rangle \\
&\quad \left. + \sum_{q=a+b} b \langle u(r) u(s) u(p) u(q) u(b) \rangle \right\} \\
&\quad \left. + \sum_{p=r+s} \{ p \rightarrow -k \} + \sum_{q=r+s} \{ q \rightarrow -k \} \right] \\
&+ i \sum_{-k=p+q} [k \rightarrow -k] \tag{18}
\end{aligned}$$

簡単のため、初期時刻 $t=0$ で乱流場は Gauss 分布を
 していると仮定する。このように仮定すると、高次の展開係
 数を計算する問題は著しく簡単になる。実際、Gauss 分布の
 よく知られた性質から、奇数次のモメントはすべて零で、
 偶数次のモメントは 2 次のモメントで表わされる。例え

ば、4次のモーメントは

$$\langle abcd \rangle = \langle ab \rangle \langle cd \rangle + \langle ad \rangle \langle bc \rangle + \langle ac \rangle \langle bd \rangle$$

である。したがって、初期エネルギー・スペクトル $E_0(k)$ を与えれば、初期のすべてのモーメントが $E_0(k)$ を用いて表わされることになる。

§4. Padé 近似

木田ら^[1]は、速度相関の積分スケール

$$J = \int_0^\infty \langle u(x) u(x+r) \rangle dr$$

の値が零であるか否かによって、高レイノルズ数の極限における Burgers 乱流のエネルギー減衰則が異なることを示した。それによると

$$(イ) J = 0 \text{ のとき, } E \sim t^{-1}$$

$$(ロ) J \neq 0 \text{ のとき, } E \sim t^{-\frac{2}{3}}$$

である。そこで、(イ)の場合を想定して

$$t \rightarrow \infty \text{ で } E(k, t) \sim t^{-1}$$

となるような Padé 式を採用する。 $E(k, t)$ の t についての巾級数展開

$$E(k, t) = A(k) + B(k)t + C(k)t^2 + D(k)t^3 + \dots \quad (19)$$

において、その巾級数展開係数が $D(k)$ まで (19) と一致し、

上述の漸近的振舞いを与える Padé 式を

$$E(k, t) = \frac{a(k) + b(k)t}{1 + c(k)t + d(k)t^2} \quad (20)$$

とすれば,

$$\left. \begin{aligned} a &= A, \quad b = \frac{A^2 D - 6ABC + 6B^3}{6B^2 - 3AC} \\ c &= \frac{AD - 3BC}{6B^2 - 3AC}, \quad d = \frac{3C^2 - 2BD}{12B^2 - 6AC} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

である。

図 1 に初期条件

$$E_0(k) = \frac{Ek}{k_0^2} \exp\left(-\frac{k}{k_0}\right) \quad (J=0) \quad (22)$$

による計算結果を示す。レイノルズ数は 20 ($\nu = 0.05$) である。この近似のまゝで更に高レイノルズ数の計算を行うと負のエネルギー・スペクトルが現われることがある。高レイノルズ数の計算に対しては、もっと高次数の Padé 式が必要である。又、この例で k/k_0 が 3.5 ~ 4 附近にデュープ構造が現われているが、これは用いた Padé 式の次数が低いためで、物理的に意味のあるものではないと思われる。この領域より高波数側では、スペクトルは指数的に小さくなる。図の黒矢は、比較のために $E(k, t)$ の巾級数展開式 (19) ととの了

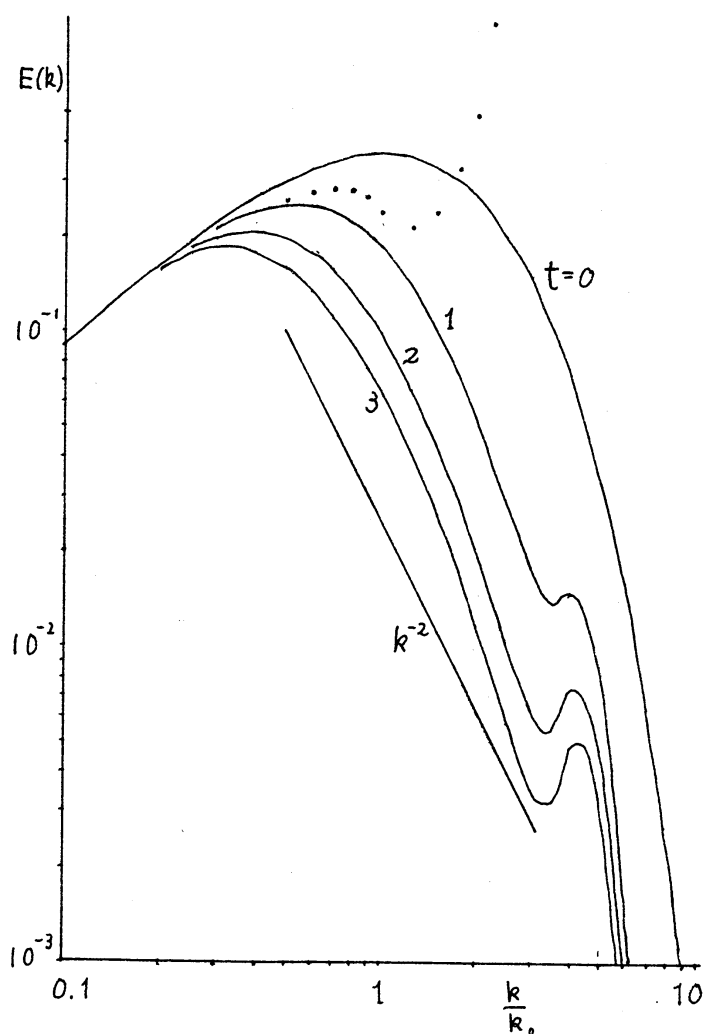


図 1

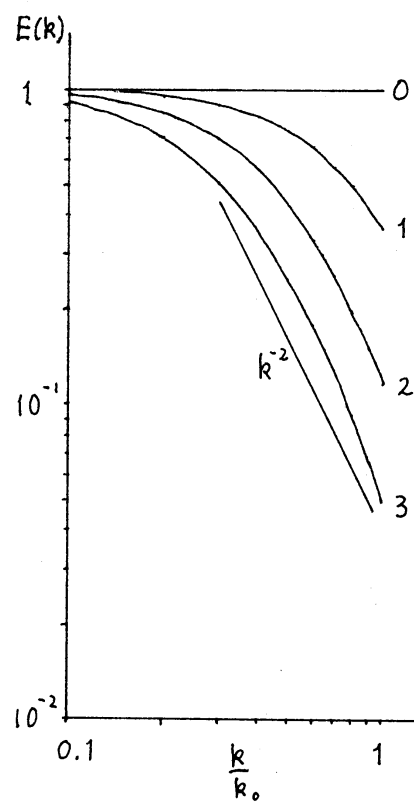


図 2

次の項で打ち切った式を $\epsilon = 1$ で計算した値を示した。 $(k/k_0) \lesssim 0.4$ では (20) 式から計算した値とほとんど差はないが、 $(k/k_0) \sim 1$ 付近で大きくずれ始め、 $(k/k_0) \gtrsim 3$ では負になってしまう。Burgers 乱流のエネルギー・スペクトルは、高波数領域に k^{-2} に比例する部分があると考えられているが、上の例では、はっきりした結論は出せない。

図2には参考のために

$$E_0(k) = \begin{cases} E/k_0 & (k/k_0) \leq 1 \\ 0 & (k/k_0) > 1 \end{cases} \quad (23)$$

による結果を示した。(23)に対しては $J \neq 0$ である。図2では $(k/k_0) \geq 1$ で恒等的に $E(k, t) = 0$ になっているが、これは(19)の展開式で3次の係数までしか使わなかったためである。

[文献]

[1] S. Kida : J. Fluid Mech. 93 (1979) 337

T. Tatsumi and S. Kida : J. Fluid Mech. 55 (1972) 657