

Algebra of observables in Hilbert space.

九大理 富田 稔.

§1. 序論

Observable は, Hilbert 空間上の作用素, vector, 共役 vector, 期待値などを包摂した物理学上の概念である. これを数学的に取扱うために, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の作用素, 2個の vector, および scalar からなる組 (A, x, y, μ) を $\mathcal{H}$ の observable と呼ぶ, $\mathcal{H}$ の observable 全体 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ に適当な $\ast$ -代数としての演算と norm を導いて Banach $\ast$ -代数として取扱うこととする.

そのために Lie 群 G の正定値測度 μ の表現を考察する. Compact carrier をもち無限回微分可能な G 上の関数全体 $\mathcal{D}(G)$ を G の群環としての位相 $\ast$ -代数であると考えたとき, μ は $\mathcal{D}(G)$ 上の連続な正値線型汎関数である. μ を用いて適当な Hilbert 空間 $L^2(\mu)$ への $\mathcal{D}(G)$ の vector 表現 λ と作用素表現 π を構成することが出来る. λ は $\mathcal{D}(G)$ から $L^2(\mu)$ の稠密部分空間への連続線型写像であり, π は $\mathcal{D}(G)$ から $L^2(\mu)$ 上のある作用素環への連続な $\ast$ -準同型写像で, 次の条件をみたすものである.

$$\mu(g^*f) = (\lambda(f) | \lambda(g)),$$

$$\pi(f)\lambda(g) = \lambda(fg).$$

この π, λ を用いて $L^2(\mu)$ 上の observable 表現を次のように定義する.

$$\tau(f) = (\pi(f), \lambda(f), \lambda(f^*), \mu(f)).$$

Observable の norm, その間の演算などは, この表現が連続となるように導入される. このようにすれば, 一般に位相 $*$ -代数の作用素表現 π と vector 表現 λ の相互関係の研究, あるいは G の正定値超関数と通常の正定値関数の関係の研究, また C^* -代数および von Neumann 代数の上の非有界正定線型汎関数の研究などはすべて Observable の作る $*$ -代数の構造の研究に帰着させることが出来る.

§ 2. 基本概念.

$T(\mathfrak{A})$ の Banach $*$ -代数としての演算および norm は次の通りである. $A = (A_0, x, y, \mu), B = (B_0, \mu, \nu, \nu)$ とすれば

$$\alpha A = (\alpha A_0, \alpha x, \alpha y, \alpha \mu), \quad A+B = (A_0+B_0, x+\mu, y+\nu, \mu+\nu),$$

$$AB = (A_0 B_0, A_0 \mu, B_0^* y, (y | \mu)), \quad A^* = (A_0^*, y, x, \bar{\mu}).$$

$$\|A\| = (\|A_0\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + |\mu|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

・ 上の連続線型作用素全体を $P(\mathfrak{H})$ とする. $P(\mathfrak{H})$ の任意の要素 A を observable $(A, 0, 0, 0)$ と, また $\mathfrak{H}$ の任意の要素 x を observable $(0, x, 0, 0)$ と同一視すれば, $P(\mathfrak{H})$ は $T(\mathfrak{H})$ の閉部分 $*$ -代数に, $\mathfrak{H}$ は $T(\mathfrak{H})$ の閉部分空間に, $*$ -代数としての演算や作用素と ~~vector~~ vector の積などもすべて保存して等長同型に embed される. 実際

$$(A, 0, 0, 0)(0, x, 0, 0) = (0, Ax, 0, 0).$$

$\mathfrak{H}$ の要素 x に対して, x^* は observable $(0, 0, x, 0)$ をあらわすことになる. $x \rightarrow x^*$ は $\mathfrak{H}$ と $T(\mathfrak{H})$ のある閉部分空間 $\mathfrak{H}^*$ の間の involution (双射的共役線型等長同型対応) になる. Observable $(0, 0, 0, 1)$ を J であらわし単位期待値という. また observable $A = (A_0, x, y, \mu)$ に対して $A_0 = \pi(A)$, $x = \lambda(A)$, $y = \lambda(A^*)$, $\mu = \mu(A)$ とおけば

$$A = \pi(A) + \lambda(A) + \lambda(A^*)^* + \mu(A)J,$$

$$\|A\|^2 = \|\pi(A)\|^2 + \|\lambda(A)\|^2 + \|\lambda(A^*)\|^2 + |\mu(A)|^2.$$

作用素 A および vector x, y の間の observable としての演算は次の通りである.

$$y^*A = (A^*y)^*, \quad y^*x = (x|y)J,$$

$$xA = Ay^* = x(y) = x^*y^* = xy^* = 0.$$

§3. $T(\mathfrak{A})$ の代数的性質

J の scalar multiply μJ 全体を CJ とする.
 CJ は $T(\mathfrak{A})$ の center で, 任意の observable A と
 CJ の要素 X に対して $AX = XA = 0$ が成立する. $T(\mathfrak{A})$
 の根基は π の核, つまり $\pi(A) = 0$ となる observable
 A 全体である. $T(\mathfrak{A})$ は環としての単位元をもたないの
 でこれに単位元を加えた Banach $*$ -代数 $T_1(\mathfrak{A})$ を考え,
 その要素を拡大 observable. という. $T_1(\mathfrak{A})$ の単位 1
 と $\mathfrak{A}$ の単位作用素 I は区別しなければならぬ. 作用
 素 A の作用素としての spectrum を $S_\pi(A)$ であらわす.

Observable A の spectrum $S(A)$ を, $T_1(\mathfrak{A})$ の中
 での A の spectrum であると定義すれば

$$S(A) = S_\pi(\pi(A)) \cup \{0\}$$

が成立する. $\mu(A) = 0$ となる observable A を preobservable
 と呼び, $\mathfrak{A}$ の preobservable 全体を $P(\mathfrak{A})$ とする. ま
 た任意の observable A に対して $P(A) = A - \mu(A)J$ と

おき, $R(\mathfrak{A})$ の中に新しい積を $P(AB)$ で定義する. CJ を $T(\mathfrak{A})$ の ideal と見たとき, $P(A) \longleftrightarrow A - CJ$ は $R(\mathfrak{A})$ と商環 $T(\mathfrak{A}) - CJ$ の間の等長同型対応となり, $R(\mathfrak{A})$ は Banach $*$ -代数である.

Observable A は $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ の 2 次式 (quadratic)

$$A(x, y) = (\pi(A)x | y) + (\lambda(A)|y) + (x | \lambda(A^*)) + \mu(A)$$

をあらわしている. この表現は忠実であるから; $\mathfrak{A}$ の幾何学的変換は, $T(\mathfrak{A})$ の変換をひきおこす. いま $\mathfrak{A}$ の unitary 作用素を U , $\mathfrak{A}$ の要素を g , 正数を α として, $T(\mathfrak{A})$ の変換 T_U, T_g, T_α を次のように定義する.

$$T_U A(Ux, Uy) = A(x, y),$$

$$T_g(A)(x-g, y-g) = A(x, y),$$

$$T_\alpha(A)(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 A(x, y).$$

これを計算すれば次の形になる.

$$T_U A = U\pi(A)U^* + U\lambda(A) + (U\lambda(A^*))^* + \mu(A)J,$$

$$\begin{aligned} T_g(A) = & \pi(A) + (\lambda(A) + A g) + (\lambda(A^*) + A^* g)^* \\ & + (\mu(A) + (\lambda(A)|A^* g) + (A g | \lambda(A^*)) + (A g | g))J, \end{aligned}$$

$$T_\alpha A = \pi(A) + \alpha \lambda(A) + (\alpha \lambda(A^*))^* + \alpha^2 \mu(A) J.$$

$T(\mathfrak{A})$ の幾何学的変換はこの3種の変換の積として定義する.

T_u, T_g, T_α を $T(\mathfrak{A})$ の基本自己同型写像と呼ぶ, これは $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -自己同型対応をひきおこし, 逆に $T(\mathfrak{A})$ の任意の $*$ -自己同型対応は上の意味の幾何学的変換に限られる.

T_u, T_g, T_α は $T(\mathfrak{A})$ の正則な要素

$$S_u = 1 - I + U, \quad S_g = 1 - g + g^* - 2^{-1} \|g\|^2 J,$$

$$S_\alpha = \alpha(1 - I) + I$$

を用いて次のようにあらわすことが出来る.

$$T_u A = S_u A S_u^*, \quad T_g A = S_g A S_g^*,$$

$$T_\alpha A = S_\alpha A S_\alpha^*.$$

まず $S_u^{-1} = S_u^* = S_u$, $S_g^{-1} = S_g^* = S_{-g}$ が成り立つ

ことから T_u, T_g は $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -自己同型であることがわかる.

S_α は任意の observable A, B に対して $A S_\alpha B = AB$ をみたしていること, $\alpha \rightarrow S_\alpha$ が正数のつく乗法群の同型対応であることから, T_α は $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -自己同型になる.

$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{A}$ の閉部分空間, E を $\mathcal{M}$ への射影作用素,

A_E が作用素 A の $\mathcal{M}$ への制限 (reduction) をあらわす,

$\mathcal{M}$ における単位期待値を J_E とし、 $\mathcal{A}$ の observable A の $\mathcal{M}$ への制限 (reduction) A_E を次のように定義する.

$$A_E = \pi(A)_E + E\lambda(A) + (E\lambda(A^*))^* + \mu(A)J_E.$$

また $E^\circ = 1 - I + E$ とおけば,

$$E^\circ A E^\circ = E\pi(A)_E + E\lambda(A) + (E\lambda(A^*))^* + \mu(A)J.$$

これから $A \rightarrow A_E$ は $E^\circ T(\mathcal{A}) E^\circ$ と $T(\mathcal{M})$ の同型対応で,

$$A_E = (E^\circ A E^\circ)_E \text{ が常に成立することがわかる.}$$

$\mathcal{A}$ とは別に, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をとりその単位作用素を I_0 , 単位期待値を J_0 とする. $\mathcal{A}$ の observable A と $\mathcal{A}$ の observable B との tensor 積 $A \otimes B$ は次のように定義する. $J \otimes J_0$ を $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ の単位期待値として

$$\begin{aligned} A \otimes B = & \pi(A) \otimes \pi(B) + \lambda(A) \otimes \lambda(B) + (\lambda(A) \otimes \lambda(B^*))^* \\ & + \mu(A)\mu(B)J \otimes J_0. \end{aligned}$$

とくに $\mathcal{A}$ が可分無限次元の場合を考え, $\mathcal{A}$ の要素 e で $\|e\| = 1$ をみちめるものをとり $G = I + e + e^* + J$ とおく. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の可算直和とみちめることが出来る, $A \rightarrow A \otimes G$ は $T(\mathcal{A})$ を $T(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ の部分 *-代数の上にあつす等長同型写像である.

以上のような $T(\mathfrak{g})$ の幾何学的変換, 制限, あまりは
 tensor 積 $A \rightarrow A \otimes G$ などは π の核を π の核に, また ρ
 の核を ρ の核にうつしているのので, 同時に $P(\mathfrak{g}), R(\mathfrak{g})$ の
 変換, 制限, tensor 積を引きおこしている.

$T(\mathfrak{g})$ の閉部分 $\ast$ -代数を *observable algebra*, $R(\mathfrak{g})$ の
 閉部分 $\ast$ -代数を *preobservable algebra* と呼ぶ. *Observable*
algebra $\mathcal{O}$ は J を要素として含まない μ -有限 algebra と,
 J を要素として含む μ -無限 algebra とに分れる.
 $\mathcal{O}$ は C^* -代数と $\ast$ -同型になるように限り, μ -有限とある.
 $\mathcal{O}$ が有限であれば, $\mathfrak{L} = \pi(\mathcal{O})$ は C^* -代数で, 適当な
 $\mathfrak{g}$ の要素 g をとれば $\mathcal{O} = T_g(\mathfrak{L})$ となる. たゞし(作
 用素 A に対しては $T_g A$ は次の形である.

$$T_g A = A + Ag + (A^*g)^* + (Ag|g)J.$$

$\mathcal{O}$ が無限の場合は $\mathcal{O} = P(\mathcal{O}) + CJ$ とかける. $P(\mathcal{O})$ は
preobservable algebra であり, $\mathcal{O}$ の構造は $P(\mathcal{O})$ によっ
 て完全に定まる.

$T(\mathfrak{g})$ の閉 $\ast$ -不変部分集合 $\mathcal{O}$ に対して3種の
commutant algebra $\mathcal{O}^\pi, \mathcal{O}^\rho, \mathcal{O}^\tau$ を次のように定義する.

$$\mathcal{O}^\pi = (X : \pi(AX - XA) = 0 \text{ for } A \in \mathcal{O}),$$

$$\mathcal{O}_P = (X: P(AX - XA) = 0 \text{ for } A \in \mathcal{O}),$$

$$\mathcal{O}^Z = (X: AX = XA \text{ for } A \in \mathcal{O}).$$

また $\mathcal{O}$ の achievement $\mathcal{O}^T$ を次のように定義する.

$$\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{\pi\pi} \cap \mathcal{O}^{PP} \cap \mathcal{O}^{ZZ}.$$

$\mathcal{O}$ に対して $\mathcal{O}^\pi, \mathcal{O}^P, \mathcal{O}^Z, \mathcal{O}^T$ は observable algebra である. $\mathcal{C}\mathcal{T}$ は $T(\mathcal{O})$ の center であるからこれは皆 μ -無限である. 一般に次の関係が成立する.

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{TT}.$$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}^T$ をみたす observable algebra $\mathcal{O}$ は achieved であるという. T を $T(\mathcal{O})$ の $*$ -自己同型とすれば任意の $T(\mathcal{O})$ の $*$ -不変集合 $\mathcal{O}$ に対して次式が成立する.

$$(T\mathcal{O})^\pi = T(\mathcal{O}^\pi), (T\mathcal{O})^P = T(\mathcal{O}^P), (T\mathcal{O})^Z = T(\mathcal{O}^Z),$$

$$(T\mathcal{O})^T = T(\mathcal{O}^T), (\mathcal{O} \otimes G)^T = \mathcal{O}^T \otimes G.$$

また $\mathcal{O}$ を observable algebra, E を $\mathcal{O}$ の射影作用素とし, $\mathcal{O}_E = (A_E: A \in \mathcal{O})$ を $\mathcal{O}$ の E への制限とする.

作用素環の制限の理論の拡張として次の^{関係}~~性質~~が成立する。

$$(a_E)^\pi = (a^\pi)_E, (a_E)^\rho = (a^\rho)_E, (a_E)^2 = (a^2)_E,$$

$$(a_E)^T = (a^T)_E.$$

§4. $T(\mathfrak{A})$ の位相的性質.

$T(\mathfrak{A})$ はその部分空間の積空間として次のようにあらわされる.

$$T(\mathfrak{A}) = R(\mathfrak{A}) + C\mathcal{I}, \quad R(\mathfrak{A}) = P(\mathfrak{A}) + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*.$$

$N(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$ とおけば, $N(\mathfrak{A})$ は次の内積をもつ Hilbert 空間である.

$$\begin{aligned} (X|Y) &= (\lambda(X)|\lambda(Y)) + (\lambda(Y^*)|\lambda(X^*)) \\ &= \mu(Y^*X + XY^*). \end{aligned}$$

$N(\mathfrak{A}) + C\mathcal{I}$ は π の核つまり $T(\mathfrak{A})$ の根基であり, 次の内積をもつ Hilbert 空間である.

$$(X|Y) = (\varpi(X)|\varpi(Y)) + \mu(X)\overline{\mu(Y)},$$

ただし, ϖ は $\varpi(A) = \lambda(A) + \lambda(A^*)^*$ によって定義される $T(\mathfrak{A})$ から $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$ 上への π -線型写像である.

$\pi(X)$ が nuclear 作用素である observable X を nuclear observable という. $T_*(\mathfrak{A})$ で nuclear observable 全体を, $R_*(\mathfrak{A})$ で nuclear preobservable 全体を, $P_*(\mathfrak{A})$ で nuclear 作用素全体をあらわすことにする. 周知の通り, $P_*(\mathfrak{A})$ は trace norm $\|X\|_1$, に関して Banach $*$ -algebra であり, $P(\mathfrak{A})$ は $P_*(\mathfrak{A})$ の dual space になっている. nuclear 作用素 A の trace を $T(A)$ とすれば $P(\mathfrak{A}) \times P_*(\mathfrak{A})$ の間の基本型式として $T(X^*A)$ ($A \in P(\mathfrak{A}), X \in P_*(\mathfrak{A})$) をとることが出来る. この基本型式を次のような $T(\mathfrak{A}) \times T_*(\mathfrak{A})$ 上の基本型式に拡張する. $T(\mathfrak{A})$ の要素 A と $T_*(\mathfrak{A})$ の要素 X に対し,

$$(A|X) = T(\pi(X^*A)) + ((1-\pi)A|(1-\pi)X).$$

Nuclear observable X の trace norm $\|X\|_1$, を次のように定義する.

$$\|X\|_1 = \left(\|\pi(X)\|_1^2 + \|(1-\pi)X\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$T_*(\mathfrak{A})$ は $P_*(\mathfrak{A})$ と Hilbert 空間 $N(\mathfrak{A}) + C\mathcal{I}$ の積空間であるから次の定理が得られる.

定理. $T_*(\mathfrak{A})$ および $R_*(\mathfrak{A})$ は trace norm により Banach $*$ -algebra であり, $T(\mathfrak{A})$ は $T_*(\mathfrak{A})$ の共役空間, $P(\mathfrak{A})$ は $R_*(\mathfrak{A})$ の共役空間である.

$T(\mathfrak{A})$ の共役空間としての $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -弱位相を $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -弱位相という。任意の $T(\mathfrak{A})$ の要素 A と $T(\mathfrak{A})$ の要素 X に対して次の式をみたす $T(\mathfrak{A})$ の要素 $L_A^* X, R_A^* X$ がとれる。

$$(AB|X) = (B|L_A^* X),$$

$$(BA|X) = (B|R_A^* X).$$

このことから $B \rightarrow AB, B \rightarrow BA$ は $T(\mathfrak{A})$ 上で $*$ -弱連続である。また π, ρ も $*$ -弱連続であるから次の定理が得られる。

定理. $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -不変集合 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}^\pi, \mathcal{O}^\rho, \mathcal{O}^\pi, \mathcal{O}^\rho$ などは $*$ -弱閉である。

次に $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -強位相を定義する。 $\mathfrak{A}$ の実列 $\{x_m\}$ の norm $\|x\| = (\sum \|x_m\|^2)^{\frac{1}{2}}$ が有限なものをとり, $T(\mathfrak{A})$ の pre-norm t_x を次のように定める。

$$t_x(A) = \left(\sum (\|Ax_m\|^2 + \|A^*x_m\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} + \|\nu(A)\|^2 + |\mu(A) + \sum (Ax_m|x_m)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

ただし $Ax_m = \pi(A)x_m$ が成立していることに注意する。

$\mathfrak{A}$ を可算無限次元 Hilbert 空間とすると, $T(\mathfrak{A})$ かつ

$T(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}_0)$ の中への等長同型写像 $A \rightarrow A \otimes G$ を考える、
ただし $G = I_0 + e + e^* + J_0$ である、 $\mathfrak{A}$ の正規直交基
 $\{e_n : n=0, 1, 2, \dots\}$ で $e_0 = e$ をみたすものをとる、norm が
有限な $\mathfrak{A}$ の系列 $x = \{x_n\}$ を $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}_0$ の要素 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \otimes e_n$
と同一視すれば、pseudonorm t_x は次の形になる、

$$t_x(A) = \|(1-\pi)(T_x(A \otimes G))\|.$$

Pseudonorm の系 $\{t_x\}$ を基として出来る $T(\mathfrak{A})$ の局所
凸位相を $T(\mathfrak{A})$ の $*$ -強位相と呼ぶ、 $*$ -強位相は一般位
相より弱いが $*$ -弱位相より強い、また次の定理が成
立する、

定理. $T_x(\mathfrak{A})$ は $*$ -強連続な $T(\mathfrak{A})$ 上の線型閉包全
体の空間である、 $T(\mathfrak{A})$ の凸集合 X の $*$ -強閉包と
 $*$ -弱閉包は常に一致する、

作用素環に対する von Neumann および Kaplansky
稠密定理の一般化が次の2定理として証明される、

定理 ~~2.1~~ $\mathfrak{A}$ の observable algebra $\mathcal{O}$ の単位球は、
 $\mathcal{O}$ の $*$ -強閉包の単位球の中 $\mathfrak{A}$ $*$ -強稠密である、

定理. $\mathcal{O}$ が無限可分 observable algebra であるならば、
 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ の achievement $\mathcal{O}^T$ の中 $\mathfrak{A}$ $*$ -強稠密である、
上の2定理のうち最初の Kaplansky 型定理は、例えば作用素

環の場合の Dixmier の証明を修正して証明することも出来る。
 が、まづ observable algebra における duality theory の立
 場から取扱うことにする。Observable algebra $\mathcal{O}$ の $T_*(\mathcal{O})$
 での annihilator を $\mathcal{O}^\perp$, $\mathcal{O}$ の annihilator を $\mathcal{O}^{\perp\perp}$ とすれば
 $\mathcal{O}^{\perp\perp}$ は $\mathcal{O}$ の $\ast$ -弱閉包 (= $\ast$ -強閉包) である。いま任意
 の observable U とその共役 $X = \{x_m\}$ で $\|x\| \leq 1$ をみた
 すものをもって nuclear 作用素 W_{xx} および nuclear
 observable U_x を次のように定義する。

$$W_{xx} y = \sum (y | x_m) x_m, \quad U_x = \pi(U) W_{xx} + (1 - \pi) U.$$

明らかに $\|U_x\|_1 \leq \|U\|$ となるが、次の polarization
 theorem が成立する。

定理. $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}$ の observable algebra X を $T_*(\mathcal{O})$
 の要素とし、 $\|x\|_{\mathcal{O}}$ で X の $\mathcal{O}$ における norm をあらわす
 とする。このとき $\|U\| = \|X\|_{\mathcal{O}}$ をみたす $\mathcal{O}^{\perp\perp}$ の要素 U
 と $\|x\| = 1$ をみたす $\mathcal{O}$ の共役 $X = \{x_m\}$ で $X - U_x$ が
 $\mathcal{O}^\perp$ に属するものがある。

この定理の証明は、先づ $\mathcal{O}$ の連続線型汎関数について類似の
 定理を証明しておく、それが $\ast$ -強連続な場合に定理 3.6
 の形になることを示せばよい。この定理は、 $\mathcal{O}$ 上の $\ast$ -強
 連続線型汎関数全体 $\mathcal{O}_*$ は $\mathcal{O}$ の共役空間 $\mathcal{O}^*$ の閉線型部

分空間であり, しかも商空間 $T_x(\mathfrak{h}) - \mathcal{O}^\perp$ と等長同型になることを示している. $\mathcal{O}^{\perp\perp}$ は $T_x(\mathfrak{h}) - \mathcal{O}^\perp$ の共役空間であるから, $\mathcal{O}$ の単位球は $\mathcal{O}^{\perp\perp}$ の単位球で $\star$ -弱稠密 (従って $\star$ -強稠) になる.

von Neumann 型稠密定理も本質的には duality theory の問題である. $\star$ -強位相を定義する pseudonorm t_x は

$$t_x(A) = \|(1-\pi)T_x(A \otimes G)\|$$

とあらわせば, 他方 observable algebra $\mathcal{O}$ に対しては

$$(T_x(\mathcal{O} \otimes G))^T = T_x(\mathcal{O}^T \otimes G)$$

が成立するので, 無限 observable algebra $\mathcal{O}$ に対して

$(1-\pi)\mathcal{O}$ が $(1-\pi)\mathcal{O}^T$ で稠密であることを示せばよい,

$\mathcal{O} = P(\mathcal{O}) + C\mathcal{J}$, $\mathcal{O}^T = P(\mathcal{O}^T) + C\mathcal{J}$ であるから,

結局 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}^T$ で稠密であることを示せばよい. 以下の

議論は [1] で試みられた議論と本質的に同一の証明を

行えばよい. しかし議論には unbounded な作用素,

あるいは observable の性質を使う必要がある.

§ 4. Observable algebra の構造.

Observable の集合 $\mathcal{M}$ に対して, $\mathcal{M}$ を含む最小の閉

凸集合を $C_0(X)$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$ を含む最小の閉線型空間を $[M]$ であらねす. *Preservable algebra* $\mathcal{O}$ に対して, $[\mathcal{O}]$ への射影作用素を P , $\pi(A)=0$ をみたす $\mathcal{O}$ の要素全体を $N(\mathcal{O})$, $[\lambda(N(\mathcal{O}))]$ への射影作用素を N とし,

$$F = P(I-N), \quad S = PN, \quad Z = (I-P)N, \quad V = (I-P)(I-N)$$

とおけば, F, S, Z, V は $F+S+Z+V=I$ をみたす互に直交する射影作用素である. これらを用いて次のような $\mathcal{O}$ の部分集合および部分代数を定義する.

$$\mathcal{O}_F = (\pi(A) + F\lambda(A) + (F\lambda(A^*))^* : A \in \mathcal{O}),$$

$$N(S) = \{x+y^* : x, y \in \text{Range of } S\},$$

$$\mathcal{O}_Z = (Z\lambda(A) + (Z\lambda(A^*))^* : A \in \mathcal{O}),$$

$$\mathcal{O}_P = (\pi(A) + P\lambda(A) + (P\lambda(A^*))^* : A \in \mathcal{O}),$$

$$\mathcal{O}^H = \{A \in \mathcal{O} : A = A^*\},$$

$$\mathcal{O}^+ = C_0(A^*A : A \in \mathcal{O}).$$

このとき次の定理が成立する.

定理. (a). $N(\mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ の radical $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}_F$ は商環 $\mathcal{O}-N(\mathcal{O})$ に等長同型な *observable subalgebra*

である. (b). $\mathcal{O}_Z$ は $X\mathcal{O} = \mathcal{O}X = 0$ とする $\mathcal{O}$ の要素 X 全体の作る *observable algebra* に等しい. (c). $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_P$ と $\mathcal{O}_Z$ の直和である. (d). $\mathcal{O}_P = [\mathcal{O}^+] = [\mathcal{O}^2]$ が成立する. (e). $N(S)$ は $\mathcal{O}_P$ の *radical* で, $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_F + N(S)$ が成立する. (f). $N(S)^H = \mathcal{O}^+ \cap N(\mathcal{O})$ であり, $\mathcal{O}^+ = (A \in \mathcal{O}_P^H : \pi(A) \geq 0)$ である.

上の定理は一般の *observable preobservable algebra* から *semi-simple observable algebra* $\mathcal{O}_P$ かどうかのようにして構成されるかを決定するものである. これと von Neumann, Kaplansky 型定理の応用によつて無限 *observable algebra* $\mathcal{O}$ とその *commutant* $\mathcal{O}^P$ の関係が次のように述べられる. $\mathcal{O}$ を *preobservable algebra* として $P(\mathcal{O}^P)$ に対して定義される射影をそれぞれ, $P_P, N_P, F_P, S_P, Z_P, V_P$ とおけば,

定理. 任意の *preobservable algebra* $\mathcal{O}$ に対して. 次の関係式が成立する.

$$P_P = I - N, \quad N_P = I - P,$$

$$F = F_P, \quad S = V_P, \quad Z = Z_P, \quad V = S_P.$$

Preobservable algebra $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ が semi-simple であることとつまり $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$) と $\mathcal{A}$ が非退縮 (つまり $\mathcal{A} = \mathcal{A}_p = [\mathcal{A}^2] = [\mathcal{A}^+]$) とは同値であり. Lie 群 G 上の正定値同数 μ について, 以上の構造論の意味するところを説明すれば次の通りである. まず $L^2(\mu)$ 上の observable 表現 π で $\mathcal{D}(G)$ を表現して出来た observable algebra を $\mathcal{A}$ とする. $L^2(\mu)$ 上 π は非退縮である (これは $\mathcal{A} = \mathcal{D}(G)$ として $[\mathcal{A}^2]$ が $\mathcal{A}$ で稠密であることに対応している). しかし, $\mathcal{A}$ は必ずしも semi-simple であり, $\mathcal{A}$ が semi-simple であることと次の条件は同値である.

(1). $\pi(a) \rightarrow \lambda(a)$ は closable, すなわち,

$\pi(a_n) \rightarrow 0, \lambda(a_n) \rightarrow x$ ならば $x = 0$.

$$(2). \mu(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = \sup_{p \in \mathcal{F}(\mu)} p(\mathcal{A}^* \mathcal{A})$$

が成立する. さらに, $\mathcal{F}(\mu)$ は $\mu \geq p \geq 0$ となる正定値同数全体である.

[1]. Standard forms of von Neumann algebras
M. Tomita, 1967. 東北大学, Functional analysis
symposium. 講義録.