

非線型熱方程式に関して — Abstract —

東大 理 小西芳雄

3. 次の形の非線型熱方程式は工学に於いて重要であるばかりでなく 物理学の研究対象となる様々な現象を記述している為にその数学的取扱いは必要である:¹⁾

$$(1) \quad c \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} v),$$

ここに $c = c(v)$: 比熱, $\rho = \rho(v)$: 密度 且 $\kappa = \kappa(v)$: 熱伝導率 であり, 夫々 温度 v に依存している.

我々は特に 滑らかな縁を持った有界な容器 Ω で 次
の境界条件と初期条件のもとに(1)を考える: $\bigcap_{\mathbb{R}^d}$

$$(2) \quad v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty)$$

$$(3) \quad v(0) = a \quad \text{in} \quad \Omega$$

1) Ames: Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering.
の P.4 ~ P.8 や Forsythe-Wasow の p.143 を見よ.

もし C と ρ がともに v によらず、 K が v による時は、直接 attack 出来るが²⁾、一般の場合は次の Strauss³⁾ による reduction を行なわなければならない (少なくとも筆者にとって) :

$$K' = K, \quad \varphi \circ K = c\rho/K, \quad \partial u / \partial t = K \circ v$$

$$\varphi \circ K \circ \Delta = \Delta \phi$$

なる形式的置きかえを行ない 問題(1), (2), (3)を

$$(1)' \quad \varphi(\partial u / \partial t) = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

$$(2)' \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

$$(3)' \quad u(0) = \phi \quad \text{in } \Omega$$

として考える。(1)' は $\varphi^{-1} = \beta$ と置くことにより

$$(1)'' \quad \partial u / \partial t = \beta(\Delta u) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

ともかける。さらに、 $C_0(\overline{\Omega}) = \{f; \overline{\Omega} \text{ 上の連続関数, } f=0 \text{ on } \partial\Omega\}$, $\|f\|_{C_0(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$, なる Banach ^($n > d$)空間とし、 Δ_0 を $\{f \in C_0(\overline{\Omega}); f \in W^{2,2}(\Omega) \text{ 且 } \Delta f \in C_0(\overline{\Omega})\}$ ⁴⁾ なる定義域をもち Δ とすれば (1)'', (2)'

2) Konishi: Some examples of nonlinear semi-groups in Banach lattices (to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo).

3) Strauss: Evolution equations non-linear in the time derivative. J. Math. Mech. 15, 49-82 (1966).

4) Masuda: 東京大学に於ける講義 (1971年10月~72年2月).

は 次の $C_0(\Omega)$ に於ける 常微分方程式の形にかける:

$$(4) \quad du/dt = \bar{\beta} \circ \Delta_0 u \quad t \in (0, \infty),$$

但し $\bar{\beta}$ は β より定義される $C_0(\Omega)$ の作用素である。我々の 第一の結果 は, Crandall-Liggett⁵⁾ の意味で $\bar{\beta} \circ \Delta_0$ は $C_0(\Omega)$ の半群を生成するということである:

$$\exp(t \bar{\beta} \circ \Delta_0) \cdot b = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda \bar{\beta} \circ \Delta_0)^{-[t\lambda]} b.$$

第二の結果 は, ある種の implicit な差分スキームの解が上で得られた非線型半群解に収束するということであり, これは線型の場合に周知の結果の拡張である。

以上詳細は筆者の次の論文を参照されたい。

"On the uniform convergence of a finite difference scheme for a nonlinear heat equation" (to appear).
in Proc. Japan Acad.

5) Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces. Amer. J. Math., 93, 265-298 (1971).