

Semi-free S^1 -equivariant stable homotopy groups of spheres

阪市大 理 下田 義博

S^1 -同変コホモロジー論で特に、 S^1 の標準的表現と自明な表現によつて生成される $RO(S^1)$ の部分加群に次元をもつものを考える。その最も簡単なものとして 安定コホモトピー群について調べる。上の様な $RO(S^1)$ の部分加群を $RO(S^1)^V$ と書く事にする。又以降 V は S^1 の標準的表現で決定される実 2 次元表現空間とする。

$$\text{定義 } \pi_{S^1, V}^{pV+q}(X) \equiv \operatorname{colim}_{k, l} [\Sigma^{(k-p)V+l+q} X, \Sigma^{kV+l}]^{S^1}$$

$$\pi_{pV+q}^{S^1, V}(X) \equiv \operatorname{colim}_{k, l} [\Sigma^{(k+p)V+l+q}, \Sigma^{kV+l} X]^{S^1}$$

但し X は基具を持つ S^1 -CW 複体、 $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{R}^{pV+q} \equiv V^p \times \mathbb{R}^q \quad B^{pV+q} \equiv \{u \in \mathbb{R}^{pV+q} : \|u\| \leq 1\}$$

$$S^{pV+q} \equiv \{u \in \mathbb{R}^{pV+q} : \|u\| = 1\} \quad \Sigma^{pV+q} \equiv B^{pV+q} / S^{pV+q}$$

荒木、村上 [2, 3] により π -コホモロジー論は、すでによく知られている。そこで $\pi_{S^1, V}^{pV+q}(X)$ についてそれらと

同様の事が云える事と示し $X = \Sigma^0$ の時 実際には $\pi_{s',v}^{pv+q} = \pi_{-pv,q}^{s',v}$ と求める事がこの論文の目的である. ここで $\pi_{s',v}^{pv+q} (\equiv \pi_{s',v}^{pv+q}(\Sigma^0))$ 又は $\pi_{-pv,q}^{s',v}$ と $-pv-q$ 次 Semi-free S^1 -equivariant stable homotopy group of sphere と云う.

§1 基本的性質

S^1 -CW complex X に対し $\psi X, \phi X$ で 各々 forgetful space, fixed-point space を表わす. 定義より次の 1) ~ 3) は直ちにわかる. 又 4) は pointed S^1 -complexes の対に対する 同変 homotopy extension property (T. Matumoto [7]) を考えればすぐにわかる.

1) $\pi_{s',v}^{pv+q}(\)$ は S^1 -homotopy functor で Wedge axiom, Mayer-Vietoris axiom, を満たす.

2) $\exists \sigma^{pv+q} : \pi_{s',v}^{pv+q}(X) \xrightarrow{\cong} \pi_{s',v}^{(p+1)v+q+s}(\Sigma^{pv+s}X)$

3) 次の図式は可換

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_{s',v}^{pv+q+1}(\Sigma^1 X) & \xrightarrow{\sigma^v} & \pi_{s',v}^{(p+1)v+q+1}(\Sigma^v \Sigma^1 X) \\
 \pi_{s',v}^{pv+q}(X) & \xrightarrow{\sigma^1} & & & \downarrow \tau^* \\
 & \searrow \sigma^v & \pi_{s',v}^{(p+1)v+q}(\Sigma^v X) & \xrightarrow{\sigma^1} & \pi_{s',v}^{(p+1)v+q+1}(\Sigma^1 \Sigma^v X)
 \end{array}$$

4) (X, A) に対し

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \pi_{s',v}^{pv+q}(X/A) \xrightarrow{\tau^*} \pi_{s',v}^{pv+q}(X) \xrightarrow{\tau^*} \pi_{s',v}^{pv+q}(A) \\
 \xrightarrow{\sigma^*} \pi_{s',v}^{pv+q+1}(X/A) \rightarrow \cdots \text{ is exact.}
 \end{array}$$

$$\tau : S_+^V \wedge \psi X \longrightarrow S_+^V \wedge X \quad (e^{i\theta}, x) \longmapsto (e^{i\theta}, e^{i\theta}x)$$

は明らかに S^1 -homeo. である. したが, 次の合成写像は同型である.

$$\begin{aligned} \pi_{s',v}^{pV+q}(S_+^V \wedge X) &\xrightarrow{\sigma^2} \pi_{s',v}^{pV+q+2}(\Sigma^2 \wedge S_+^V \wedge X) \xrightarrow{\tau^*} \pi_{s',v}^{pV+q+2}(\Sigma^V \wedge S_+^V \wedge X) \\ &\xrightarrow{\sigma^V} \pi_{s',v}^{(p-1)V+q+2}(S_+^V \wedge X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_{s',v}^{2p+q}(S_+^V \wedge X) \\ &\xrightarrow{\tau^*} \pi_{s',v}^{2p+q}(S_+^V \wedge \psi X) \end{aligned}$$

定理 1 $\pi_{s',v}^{pV+q}(S_+^V \wedge X) \cong \pi_s^{2p+q}(\psi X)$

[証明]

$$\begin{aligned} \pi_{s',v}^{2p+q}(S_+^V \wedge \psi X) &= \operatorname{colim}_{k,l} [\Sigma^{kV+l-2p-q} \wedge S_+^V \wedge \psi X, \Sigma^{kV+l}]^{s'} \\ &= \operatorname{colim}_{k,l} [S_+^V \wedge \Sigma^{2k+l-2p-q} \wedge \psi X, \Sigma^{kV+l}]^{s'} \\ &= \operatorname{colim} [\Sigma^{2k+l-2p-q} \wedge \psi X, \Sigma^{2k+l}] \\ &= \pi_s^{2p+q}(\psi X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi : S_+^V \wedge X &\longrightarrow \Sigma^0 \wedge X = X \quad (e^{i\theta}, x) \longmapsto (0, x) \text{ とする時 } \\ \psi : \pi_{s',v}^{pV+q}(X) &\longrightarrow \pi_s^{2p+q}(\psi X) \text{ は forgetful} \\ &\quad \pi^* \searrow \pi_{s',v}^{pV+q}(S_+^V \wedge X) \nearrow \cong \end{aligned}$$

morphism と云う.

(B_+^V, S_+^V) に対する exact 列を考える

$$\begin{aligned} \longrightarrow \pi_{s',v}^{pV+q}(\Sigma^V) &\xrightarrow{\pi^*} \pi_{s',v}^{pV+q}(B_+^V) \xrightarrow{\tau^*} \pi_{s',v}^{pV+q}(S_+^V) \xrightarrow{\sigma^*} \pi_{s',v}^{pV+q+1}(\Sigma^V) \longrightarrow \\ &\quad \text{SII} \downarrow \sigma^{-V} \quad \text{SII} \downarrow \tau^* \quad \text{SII} \downarrow \psi \quad \text{SII} \downarrow \sigma^{-V} \\ \longrightarrow \pi_{s',v}^{(p-1)V+q} &\xrightarrow{\chi} \pi_{s',v}^{pV+q} \xrightarrow{\psi} \pi_s^{2p+q} \xrightarrow{\sigma^*} \pi_{s',v}^{(p-1)V+q+1} \longrightarrow \end{aligned}$$

下の方の exact 列と forgetful exact 列と云う.

定理2 1) $\operatorname{colim} \{ \pi_{s,v}^{pv+q} : X \} \cong \pi_s^q$

2) 自然な写像 $\phi : \pi_{s,v}^{pv+q} \longrightarrow \pi_s^q$ は $2p+q \geq 0$ の時同型である

[証明]

$$\begin{aligned}
 1) \operatorname{colim} \{ \pi_{s,v}^{pv+q} : X \} &= \operatorname{colim} \operatorname{colim} [\sum_{k,l}^{(k-p)v+l-q} \sum_{k,l}^{k+q+l} s^i] \\
 &= \operatorname{colim} \operatorname{colim} [\sum_{k,l}^{(k-p)v+l-q} \sum_{k,l}^{k+q+l} s^i] \\
 &= \operatorname{colim} \operatorname{colim} [\sum_{k,l}^{l-q} \sum_{k,l}^{(k+p)v+l} s^i] \\
 &= \operatorname{colim} \operatorname{colim} [\sum_{k,l}^{l-q} \sum_{k,l}^l s^i] \\
 &= \pi_s^q
 \end{aligned}$$

2) $q \geq 1$ ならば $\pi_s^q = 0$. したがって forgetful exact 列と 1) よりすぐに分かる.

§2. 横といくつかの関係式

命題3 次の 1) ~ 5) を満足する積 $\wedge : \pi_{s,v}^{pv+q}(X) \otimes \pi_{s,v}^{rv+s}(Y)$

$\longrightarrow \pi_{s,v}^{(p+r)v+q+s}(X \wedge Y)$ $x \otimes y \longmapsto x \wedge y$ が存在する.

$$1) \sigma^{av+b}(x \wedge y) = \sigma^{av+b} x \wedge y = (-1)^{bq} x \wedge \sigma^{av+b} y$$

$$2) z \in \pi_{s,v}^{av+b}(Z), 1 = \{ [\operatorname{Id}_{av+b}]^{s^i} \} \in \pi_{s,v}^0, \text{ に対して}$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

$$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$$

$$\tau^*(y \wedge x) = (-1)^{bs} x \wedge y \quad \tau : X \wedge Y \longrightarrow Y \wedge X \text{ は 同}$$

変 switching map である.

$$3) x \wedge y = y \circ x$$

$$x \in \pi_{s,v}^{p+q}(X_+), y \in \pi_{s,v}^{p+q}(X_+), w \in \pi_{s,v}^{p+q}(X_+) \text{ に対して}$$

$$x \cdot y \equiv d^*(x \wedge y) \quad d: X_+ \longrightarrow X_+ \wedge X_+ \text{ diagonal map とする.}$$

$$4) 1 \cdot u = u \cdot 1 = u \quad \text{但し } 1 \equiv \pi^*(1) \in \pi_{s,v}^0(X_+) \quad \pi: X_+ \rightarrow \mathbb{Z}^0$$

$$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$$

$$v \cdot u = (-1)^{qs} u \cdot v$$

$$5) \psi(u \cdot v) = \psi(u) \cdot \psi(v)$$

次に2つの同変 cofibrations $S_+^{rv} \subset B_+^{rv} \xrightarrow{i_r} \Sigma^{rv}$,
 $S_+^{rv} \xrightarrow{\eta_{r,ms}} S_+^{(r+s)v} \xrightarrow{\beta_{r,s}} S_+^{(r+s)v} / S_+^{rv} \cong \Sigma^{rv} \wedge S_+^{sv}$ によつて誘導される exact 列を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_{s,v}^{(p+r)v+q}(\Sigma^{rv}) & \xrightarrow{\pi_r^*} & \pi_{s,v}^{(p+r)v+q}(B_+^{rv}) & \xrightarrow{i_r^*} & \pi_{s,v}^{(p+r)v+q}(S_+^{rv}) & \xrightarrow{d^*} & \pi_{s,v}^{(p+r)v+q+1}(\Sigma^{rv}) \\ \parallel \downarrow \sigma^{-rv} & & \parallel \downarrow \pi & & \parallel \downarrow id & & \parallel \downarrow \sigma^{-rv} \\ \rightarrow \pi_{s,v}^{pv+q} & \xrightarrow{d_r} & \pi_{s,v}^{(p+r)v+q} & \xrightarrow{\beta_r} & \pi_{s,v}^{(p+r)v+q}(S_+^{rv}) & \xrightarrow{d_r} & \pi_{s,v}^{pv+q+1} \end{array}$$

$r=1$ の時この exact 列は明らかに forgetful exact 列と一致する つまり $d_1 = \alpha$ $\beta_1 = \psi$

$$\xrightarrow{d_r^*} \pi_{s,v}^{pv+q}(S_+^{sv}) \xrightarrow{\beta_{r,s}^*} \pi_{s,v}^{(p+r)v+q}(S_+^{(r+s)v}) \xrightarrow{\eta_{r,ms}^*} \pi_{s,v}^{(p+r)v+q}(S_+^{rv}) \rightarrow$$

これらの exact 列に対して 次の関係式が成り立つ事がわかる.

命题4 1) $d_r \circ d_s = d_{r+s} = \chi^{r+s}$

$$2) \delta_{r+s} \cdot \bar{z}_{r+s, s}^* = \delta_s$$

$$3) \bar{z}_{r+s, s}^* \cdot \beta_s = \beta_{r+s} \cdot d_r$$

$$4) \beta_s \cdot \delta_r = \delta_{s, r}^*$$

$$5) \eta_{r, r+s}^* \cdot \beta_{r+s} = \beta_r$$

$$6) d_s \cdot \delta_{r+s} = \delta_r \cdot \eta_{r, r+s}^*$$

$$7) \bar{z}_{r+s+t, s+t}^* \cdot \bar{z}_{s+t, t}^* = \bar{z}_{r+s+t, t}^*$$

$$8) \eta_{r, r+s}^* \cdot \eta_{r+s, r+s+t}^* = \eta_{r, r+s+t}^*$$

$$9) \bar{z}_{s+t, t}^* \cdot \delta_{t, r+s}^* = \delta_{s+t, r}^* \cdot \eta_{r, r+s}^*$$

$$10) \bar{z}_{r+s, s}^* \cdot \eta_{s, s+t}^* = \eta_{r+s, r+s+t}^* \cdot \bar{z}_{r+s+t, s+t}^*$$

$$11) \delta_{t, s} = \delta_{t, r+s} \cdot \bar{z}_{r+s, s}^*$$

$$12) u_1 \in \pi_{s, v}^{p+q}, u_2 \in \pi_{s, v}^{t+u}, v \in \pi_{s, v}^{p+q+u} (S_t^{r+u}) \models \bar{z} \models \tau$$

$$d_r(u_1 \cdot u_2) = d_r(u_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot d_r(u_2)$$

$$\beta_r(u_1 \cdot u_2) = \beta_r(u_1) \cdot \beta_r(u_2)$$

$$\delta_r(v \cdot \beta_r(u_1)) = \delta_r(v) \cdot u_1$$

$$\delta_r(\beta_r(u_1) \cdot v) = (-1)^q u_1 \cdot \delta_r(v)$$

$$13) u \in \pi_{s, v}^{p+q} (S_t^{(r+s)v}), v \in \pi_{s, v}^{p+q+u} (S_t^{sv}) \models \bar{z} \models \tau$$

$$\bar{z}_{r+s, s}^* (v \cdot \eta_{s, r+s}^*(u)) = \bar{z}_{r+s, s}^*(v) \cdot u$$

$$\bar{z}_{r+s, s}^* (\eta_{s, r+s}^*(u) \cdot v) = u \cdot \bar{z}_{r+s, s}^*(v)$$

$$14) u_1, u_2 \in \pi_{s, v}^* (S_t^{(r+s)v}) \models \bar{z} \models \tau$$

$$\eta_{r, r+s}^*(u_1 \cdot u_2) = \eta_{r, r+s}^*(u_1) \cdot \eta_{r, r+s}^*(u_2)$$

15) $u \in \pi_{s,v}^{p+q}(S_+^{(r+s)v})$, $v \in \pi_{s,v}^{q+l}(S_+^{rv})$ に対して

$$\delta_{s,r}^*(v \cdot \eta_{r,rs}^*(u)) = \delta_{s,r}^*(v) \cdot \eta_{s,rs}^*(u)$$

$$\delta_{s,r}^*(\eta_{r,rs}^*(u) \cdot v) = (-1)^q \eta_{s,rs}^*(u) \cdot \delta_{s,r}^*(v)$$

16) $u \in \pi_{s,v}^{p+q}(S_+^{rv})$, $v \in \pi_{s,v}^{q+l}(S_+^{rv})$ に対して

$$\delta_{i,r}^*(u \cdot v) = \delta_{i,r}^*(u) \eta_{i,r}^*(v) + (-1)^q \eta_{i,r}^*(u) \cdot \delta_{i,r}^*(v)$$

§3. $\pi_{s,v}^{p+q}$ を求めるための一般論

$$\pi_s^p = \operatorname{colim}_l [\Sigma^{l-p}, \Sigma^l] = \operatorname{colim}_l [\Sigma^{l-p}, \Sigma^l]^{s'}$$

$$\pi_{s,v}^p = \operatorname{colim}_{k,l} [\Sigma^{kv+l-p}, \Sigma^{kv+l}]^{s'} = \operatorname{colim}_k \operatorname{colim}_l [\Sigma^{kv+l-p}, \Sigma^{kv+l}]^{s'}$$

したがって自然な準同型 $\theta: \pi_s^p \rightarrow \pi_{s,v}^p$ が存在する。

命題5 $\psi \cdot \theta = \operatorname{id}$ $\phi \cdot \theta = \operatorname{id}$

$p \geq 0$ に対して $\theta_p \equiv \chi^p \cdot \theta: \pi_s^p \rightarrow \pi_{s,v}^{p+q}$ と定義する。

補題6 $\phi \cdot \theta_p = \operatorname{id}$ $p \geq 0$

$2r \geq -(2p+q)+1$ の時次の exact 列を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_{s,v}^{p+q-1} & \xrightarrow{\alpha_r} & \pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1} & \xrightarrow{\beta_r} & \pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1}(S_+^{rv}) & \xrightarrow{\gamma_r} & \pi_{s,v}^{p+q} \xrightarrow{\alpha_r} \pi_{s,v}^{(p+r)v+q} \rightarrow \\ & & \text{SII} \downarrow & & & & \\ & & \pi_s^{q-1} & & & & \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} \nearrow & \phi & \searrow \\ \Gamma & & \Gamma \\ \theta_p & & \theta_p \end{array}$

$\begin{array}{ccc} \nearrow & \phi & \searrow \\ \Gamma & & \Gamma \\ \theta_p & & \theta_p \end{array}$

補題6より次の定理を得る。

定理7 $2r \geq -(2p+q)+1$ の時次の 1), 2) が成り立つ。

$$1) p \geq 0 \text{ ならば } \pi_{s,v}^{p+q} \cong \pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1}(S_+^{rv}) \oplus \pi_s^q$$

$$2) q > 1 \text{ ならば } \pi_{s,v}^{p+q} \cong \pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1}(S_+^{rv})$$

したがって $\pi_{s,v}^{(p+r)v+q-1}(S_+^{rv})$ は重要な群である。これについて調べる。

定理 8 (Landweber [6] 参照)

$$p \leq 0 \quad q-1 \leq 2(-2p-1) \quad 2r \geq 2p+q+1 \quad \text{の時}$$

$$\pi_{s,v}^{(r-p)v+q-1}(S_+^{rv}) \cong \pi_{-2p+(2p+q)}(W_{r-p,r})$$

但し $W_{r-p,r} = U(r-p)/U(-p)$ complex Stiefel manifold である。

補題 9 (Adams, Walker [1])

$\eta \rightarrow \mathbb{C}P_k$ を canonical complex line bundle とする。

$J: KO(\mathbb{C}P_k) \rightarrow \tilde{J}(\mathbb{C}P_k)$ に於いて $J(\eta)$ の order は

$$b_k = 2^{1/2(b_k)} 3^{1/3(b_k)} 5^{1/5(b_k)} \cdots \text{である。}$$

$$V_p(b_k) = \begin{cases} \max(r + V_p(r)) & 1 \leq r \leq [(k-1)/(p-1)] \quad p \leq k \\ 0 & p > k \end{cases}$$

定理 10 各 k に対し適当な正の整数が存在して次の同変 homotopy 同値写像を誘導する。

$$W_k: S_+^{kv} \wedge \sum 2b_k + m_k \longrightarrow S_+^{kv} \wedge \sum b_k v + m_k$$

[証明]

$\alpha: S^{kV} \times \mathbb{C}^{b_R} \longrightarrow S^{kV}$ を real S^1 -vector bundle とする.

S^1 -作用は diagonal である. S^{kV} は free S^1 -space であるので

$$\alpha/S^1: S^{kV} \times \mathbb{C}^{b_R}/S^1 \longrightarrow S^{kV}/S^1 \quad \text{は real} \\ b_R \eta \xrightarrow{\quad} \mathbb{C}P_R$$

vector bundle である. 補題より $J(b_R \eta) = 0$ したがって,

$\exists m_R$ st $S(b_R \eta \oplus m_R) \xrightarrow{f} S(2b_R \oplus m_R)$: fibre homotopy 同値. よ, $S(\alpha \oplus m_R) \xrightarrow{S^1-f} S(2b_R \oplus m_R)$

$$\text{よ, } S(S^{kV})^{\alpha \oplus m_R} \xrightarrow{S^1} (S^{kV})^{2b_R \oplus m_R} \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ S_+^{kV} \wedge \Sigma^{b_R + m_R} \qquad S_+^{kV} \wedge \Sigma^{2b_R + m_R}$$

$\omega_R \in \pi_{S^1, V}^{b_R V - 2b_R}(S_+^{kV})$ と次の様に定義しそれを periodicity element と云う.

$$\omega_R^*: \pi_{S^1, V}^{pV + \bar{q}}(S_+^{kV}) \xrightarrow[\cong]{\sigma^{b_R + m_R}} \pi_{S^1, V}^{(p+b_R)V + \bar{q} + m_R}(S_+^{kV} \wedge \Sigma^{b_R V + m_R}) \\ \xrightarrow[\cong]{\omega_R^*} \pi_{S^1, V}^{(p+b_R)V + \bar{q} + m_R}(S_+^{kV} \wedge \Sigma^{2b_R + m_R}) \xrightarrow[\cong]{\sigma^{-2b_R - m_R}} \pi_{S^1, V}^{(p+b_R)V + \bar{q} - 2b_R}(S_+^{kV})$$

$$\omega_R \equiv \omega_R^*(1)$$

命題 11 1) $\omega_R^*(u) = \omega_R \cdot u \quad u \in \pi_{S^1, V}^{pV + \bar{q}}(S_+^{kV})$

2) $\eta_{1, R}^*(\omega_R) = \omega_1^{b_R} \in \pi_{S^1, V}^{b_R V - 2b_R}(S_+^V)$ とする様に $\{\omega_R\}$ は選べる.

3) 時に ω_1 は複素数 ω_2 は四元数の積を用いて次の様に与えらる.

える事が出来る.

• $\mu_1: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ 複素数の積に対し

$$\omega_1: S^V \times (B^2, S^2) \longrightarrow S^V \times (B^V, S^V) \quad (Z, Z_2) \longmapsto (Z, \mu_1(Z, Z_2))$$

• $\mu_2: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ 四元数の積に対し

$$\omega_2: S^{2V} \times (B^4, S^4) \longrightarrow S^{2V} \times (B^{2V}, S^{2V})$$

$$(Z_1, Z_2, Z_1', Z_2') \longmapsto (Z_1, Z_2, \mu_2(Z_1, Z_2, Z_1', Z_2'))$$

$$(\mu_2(Z_1, Z_2, Z_1', Z_2')) = (Z_1 Z_1' - \bar{Z}_2' Z_2, Z_2' Z_1 + Z_2 \bar{Z}_1')$$

4) 3)の様に ω_1, ω_2 を与えると $\psi \delta_1 \omega_1 = \eta \quad \psi \delta_2 \omega_2 = \nu$

§4 $\pi_{s,v}^{p,q}$ の計算結果

以上の準備の下で $\pi_{p+q}^{s,v}$ は $2p+q \leq 7$ まで求める事が出来る. 以下にその結果を書く.

定理12 $\pi_{p+q}^{s,v} \quad 2p+q \leq 7.$

1) $2p+q=1$

$$\pi_{v-1}^{s,v} = 0$$

$$\pi_{-nv+2n+1}^{s,v} (n+1) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n+1}^s$$

2) $2p+q=2$

$$\pi_v^{s,v} = 0$$

$$\pi_{-2nv+2n+2}^{s,v} \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \pi_{4n+2}^s$$

$$\pi_{-(2n+1)v+4n+4}^{s,v} (n \neq -1) \cong \pi_{4n+4}^s$$

3) $2p+q=3$

$$\pi_{2V-1}^{s',V} \cong \mathbb{Z}/2$$

$$\pi_{2V+1}^{s',V} \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_{2nV+4n+3}^{s',V} (n \neq -1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \pi_{4n+3}^s$$

$$\pi_{-(2n+1)+4n+5}^{s',V} (n \neq -1) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_{4n+5}^s$$

$$4) \ 2p+8=4$$

$$\pi_{2V}^{s',V} = 0$$

$$\pi_{V+2}^{s',V} \cong \mathbb{Z}/2$$

• P : odd

$$\pi_{-(24n+p)V+48n+2p+4}^{s',V} \cong \mathbb{Z}/(12, \frac{p+3}{2}) \oplus \pi_{48n+2p+4}^s$$

($P=23$ 且 $n=-1$ を除く)

• P : even

$$\pi_{-(24n+p)V+48n+2p+4}^{s',V} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(8+p_p) \oplus \pi_{48n+2p+4}^s & P \equiv 0 \ (8) \\ \mathbb{Z}/(4+p_p) \oplus \pi_{48n+2p+4}^s & P \equiv 4 \ (8) \\ \mathbb{Z}/(2+p_p) \oplus \pi_{48n+2p+4}^s & P \equiv 2 \ (4) \end{cases}$$

($P=22$ 且 $n=-1$ を除く)

$$p_p = \begin{cases} 3 & P \equiv 0 \ (3) \\ 0 & P \not\equiv 0 \ (3) \end{cases}$$

$$5) \ 2p+8=5$$

$$\pi_{3V-1}^{s',V} = 0$$

$$\pi_{2V+1}^{s',V} \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_{V+3}^{s',V} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$$

$$\pi_{-(24n+p)V+48n+2p+5}^{s,v} \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_{48n+2p+5}^s \quad (p=2, 4, n=-1 \text{ 除})$$

$$6) 2p+q = 6$$

$$\pi_{3V}^{s,v} = 0$$

$$\pi_{2V+2}^{s,v} \cong \mathbb{Z}/2$$

$$\pi_{V+4}^{s,v} \cong \mathbb{Z}/24$$

• p : odd

$$\pi_{-(24n+p)V+48n+2p+6}^{s,v} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 + A_p \oplus \pi_{48n+2p+6}^s & p \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}/4 + A_p \oplus \pi_{48n+2p+6}^s & p \equiv 3 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}/(8+A_p) \oplus \pi_{48n+2p+6}^s & p \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

$$A_p = \begin{cases} 3 & p \equiv 2 \pmod{3} \\ 0 & p \not\equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

($p=21, 23, n=-1$ 除)

• p : even

$$\pi_{-(24n+p)V+48n+2p+6}^{s,v} \cong \mathbb{Z}/A_p \oplus \pi_{48n+2p+6}^s \quad p \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\mathbb{Z}/(2+A_p) \oplus \pi_{48n+2p+6}^s \quad p \equiv 0 \pmod{8}$$

$$\mathbb{Z}/(4+A_p) \oplus \pi_{48n+2p+6}^s \quad p \equiv 4 \pmod{8}$$

($p=22, n=-1$ 除)

$$7) 2p+q = 7$$

$$\pi_{4V-1}^{s,v} \cong \mathbb{Z}/2$$

$$\pi_{3V+1}^{s,v} \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_{2V+3}^{s,v} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$$

• $P : \text{odd}$

$$\pi_{-(24n+p)V+48n+2p+7}^{S,V} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \pi_{48n+2p+7}^S & p \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{48n+2p+7}^S & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

($p=23, 21$ 且 $n=-1$) を除く

• $P : \text{even}$

$$\pi_{-(24n+p)V+48n+2p+7}^{S,V} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \pi_{48n+2p+7}^S & p \equiv 2 \pmod{4} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \pi_{48n+2p+7}^S & p \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

($p=22, 20$ 且 $n=-1$) を除く.

系 13

$2p+\frac{p}{2} \geq 1$ の時 $\frac{p}{2}$ が (-1) でない奇数ならば $\pi_{pV+\frac{p}{2}}^{S,V}$ は $\mathbb{Z}$ を direct summand としてちょうど1つ持つ.

[証明]

forgetful exact 列を用いて帰納的に調べる.

References

- [1] J. F. Adams, G. Walker; On complex Stiefel manifolds, Proc. Camb. Phil. Soc. (1965) 61 81-103
- [2] S. Araki; Forgetful spectral sequences, Osaka J. Math. (1979) 16 173-199
- [3] S. Araki, H. Murayama; τ -cohomology theories, Japan

J. Math. (1978) Vol. 4 No. 2, 363-416

[4] M. F. Atiyah : Thom complexes, Proc. London Math. Soc. (1961)

(3) 11 291-310

[5] I. M. James : The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lec. note series 24.

[6] P. S. Landweber : On equivariant maps between spheres with involutions, Ann of Math (1969) 89 125-137.

[7] T. Matsumoto : On G -CW complexes and a theorem of J. H. C. Whitehead.

[8] Y. Nomura, Y. Furukawa : Some Homotopy Groups of Complex Stiefel Manifolds $W_{n,2}$ and $W_{n,3}$.

[9] R. Thom : Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment Math. Helv. (1954) 28 17-86.