

拡大的写像の線形化とその応用

愛媛大学理学部 平出耕一 (Koichi Hiraide)

(X, d) を距離空間とし、 $f: X \rightarrow X$ を同相写像とする。 f が拡大的であるとは、定数 $c > 0$ が存在して、すべての点 $x, y \in X$ に対し、 $x \neq y$ ならば $d(f^n(x), f^n(y)) > c$ ($\exists n \in \mathbb{Z}$) が成立することである。この概念は、1955 年に Gottschalk-Hedlund ([G-H]) が著書 Topological Dynamics の中で紹介している。また、それ以前の Utz ([U]) の 1950 年の論文の中で、記号力学系がこの性質を持つことを示している。しかし、そもそもこの概念の出所は、制限三体問題が一般に解けないことを示した Poincaré 辺りまで溯るのではないかと思われる。50 年代から 60 年代まで、Williams, Bryant, Hemmingsen, Reddy 等によって、拡大的同相写像の例を見つけることを主題に研究がなされていたが、60 年代後半に Anosov や Smale によって微分可能力力学系の理論が誕生してからは、微分トポロジーの観点からのあるいはエルゴード理論の観点からの研究に視点が移って行った。

このノートでは、50 年代からのいくつかの問題に対し解答が得られたので、それを紹介する。

まず、拡大的同相写像のいくつかの基本的性質を述べる。空間はコンパクトとする。

- (1) 拡大性は位相共役で保たれる。
- (2) $f: X \rightarrow X$ は拡大的で $f(\Delta) = \Delta$ ならば、制限 $f|_{\Delta}: \Delta \rightarrow \Delta$ も拡大的である。
- (3) $f: X \rightarrow X$ と $g: Y \rightarrow Y$ が拡大的ならば、直積 $f \times g: X \times Y \rightarrow X \times Y$ も拡大的である。
- (4) $f: X \rightarrow X$ が拡大的ならば、 X の位相次元 $\dim(X)$ は有限である (Mañé([M], 1979))。

(5) 拡大性は被覆写像による持ち上げや射影によって保たれる。

空間がコンパクトでないとき、(4)を除いて上のことが成立するが、この場合拡大的であるという性質は距離に依存するので、距離の取り方に注意する必要がある。

次に、コンパクト多様体上の拡大的同相写像に関する知られていた結果について述べる。一次元の多様体、即ち、円周 S^1 とコンパクトな区間 $[0, 1]$ の上に拡大的同相写像が存在しないことが、Jakobsen-Utz([J-U],1960)、Bryant([P],1962)、によって示されている。このことからコンパクト2次元円板、もっと一般的に境界をもつコンパクト曲面は、拡大的同相写像を許容しないことが分かる。2次元の閉多様体上の拡大的同相写像は、pseudo-Anosov 同相写像に限ることが、著者 ([H], 1990) と Lewowicz ([L], 1989) によって独立に証明されている。従って、2次元球面 S^2 、射影平面 P^2 、クラインの壺 K^2 には、拡大的同相写像が存在しないことが分かる。3次元の拡大的同相写像の例としては、双曲型トーラス自己同型と、それらを連結和した quasi-Anosov 微分同相写像の例 (Franks-Robinson ([F-R],1976)) が知られているだけである。これに関連する最近の結果として、Vieitez ([V],1996) の論文がある。高次元の場合は、3次元と同じような状況で、Anosov 微分同相写像や quasi-Anosov 微分同相写像そしてそれらの直積を考えることが出来るが、pseudo-Anosov 同相写像に対応するものが何であるかまだ分かっていないと思われる。従って、高次元では、まだ双曲型トーラス自己同型やその一般化である双曲型 Infrasil-manifold 自己同型が基本となる拡大的同相写像の例である。

今回報告する結果は、以下の定理である。

Theorem 1. すべての次元の球面 S^n の上に拡大的同相写像は存在しない。

この定理から、普遍被覆空間が S^n であるような閉多様体の上や n -次元円板 D^n の上には、拡大的同相写像は存在しないことが分かる。

$D^n = D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_i \supset \cdots$ を n -次元円板の単調減少列とし、 $\text{int} D_i \supset D_{i+1}$ が成り立つとする。このとき、共通部分 $\Delta = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ は cellular 部分集合と呼ばれる。 $\text{int} D^n$ のコンパクト部分集合 B が cellular である為の必要十分条件は、 B を一点に潰した空間 D^n/B が再び D^n と同位相になることであることが知られている。

Theorem 2. Δ を D^n の cellular 部分集合とし、 $f: \Delta \rightarrow \Delta$ は同相写像で Δ の近傍から D^n の中への微分同相写像に拡張可能であると仮定する。このとき、 $f: \Delta \rightarrow \Delta$ は拡大的でない。

このことから、cellular 部分集合は、微分同相写像の双曲型集合にはなり得ないことが分かる。一方、cellular 部分集合の境界には拡大的同相写像が存在することがあるので、注意を要する。例えば、良く知られている Plykin アトラクター ([P]) は、その例である。

これらの定理は、以下で述べる拡大的同相写像の線形化の応用として示される。

$T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ を n -次元トーラスとし、 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$ を満たす線形写像とする。このとき A は微分同相写像 $\varphi_A: T^n \rightarrow T^n$ を定める。 A のすべての固有値が絶対値 1 でないとき、 A と φ_A は双曲的であると言われる。この代数的写像は、次のように一般化される。

N は単連結べき零リー群とし、 Γ を N の一様離散部分群と N の自己同型写像からなる有限群との半直積で、 N に固有不連続に作用する群とし、 N/Γ はハウスドルフ空間であると仮定する。このとき N/Γ は閉多様体となり、infra-nilmanifold と呼ばれる。 $A: N \rightarrow N$ を $\Gamma A = A\Gamma$ を満たす自己同型写像とすると、微分同相写像 $\varphi_A: N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ が定まる。この写像は infra-nilmanifold 自己同型と呼ばれている。微分 $dA: \mathcal{L}(N) \rightarrow \mathcal{L}(N)$ の固有値がどれも絶対値 1 でないとき、 A と φ_A は双曲的と呼ばれる。 Γ が可換である場合、 φ_A はトーラス自己同型となるが、 φ_A が双曲的かつ余次元 1 の場合も、 φ_A はトーラス自己同型となることが知られて

いる。

拡大的同相写像の線形化に関する結果を述べるために、先ず次のような設定をする。

X をコンパクト連結局所連結距離空間とし、 $f: X \rightarrow X$ を同相写像とする。 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ は被覆空間と仮定し、 $G(\pi)$ は π に対する被覆変換の全体からなる群を表すことにする。さらに、次が成り立つとする：

- (1) $G(\pi)$ は π の各ファイバー上で推移的である。
- (2) π による f の持ち上げ $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ が存在し、 F は不動点 x_0 を持つ。

このとき、 F は同型写像 $F_*: G(\pi) \rightarrow G(\pi)$ を導き、すべての $\alpha \in G(\pi)$ に対し $F \circ \alpha = F_*(\alpha) \circ F$ が成り立つ。力学系に関する条件として、次を仮定する：

- (3) 双曲型 infra-nilmanifold 自己同型 $\varphi_A: N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ と準同型 $\phi: G(\pi) \rightarrow \Gamma$ とが存在して、 $A_* \circ \phi = \phi \circ F_*$ が成り立つ。

被覆変換群 $G(\pi)$ は基本群 $\pi_1(X, \pi(x_0))$ の部分群であり、また $\Gamma = \pi_1(N/\Gamma, *)$ とみなす。

次の命題は、Franks の結果 ([F], 1970) の拡張である。

Proposition 1. 基点を保つ連続写像 $h: X \rightarrow N/\Gamma$ が存在して $h_* = \phi$ かつ $\varphi_A \circ h = h \circ f$ が成り立ち、さらにこの様な h は唯一つである。

$h: X \rightarrow N/\Gamma$ は Proposition 1 のものとする。

Proposition 2. h が全射ならば、 $\phi(G(\pi))$ は Γ において有限指数を持つ。逆に、 $\phi(G(\pi))$ は Γ において有限指数を持つとするとき、 φ_A が余次元 1 であるかあるいは X がコンパクト多様体（境界があってもよい）であるならば、 h は全射である。

以下で $h: X \rightarrow N/\Gamma$ は全射であるとする。各点 $x \in N/\Gamma$ に対し $h^{-1}(x)$ の部分集合である essential set $E(x)$ が定義され、次が成り立つ。

Proposition 3. $f : X \rightarrow X$ は拡大的であるとし、 $E(a)$ が唯一点から成りさらに軌道 $\mathcal{O}(a)$ が N/Γ で稠密である点 a が存在すると仮定する。このとき、 N/Γ の稠密な開集合 U が存在して、すべての $x \in U$ に対し $E(x)$ は唯一点となる。さらに、連続な単射 $k : N/\Gamma \rightarrow X$ が存在して、 $k(x) = E(x) (\forall x \in U)$ であり $h \circ k = id$ が成り立つ。

Theorem 1 と 2 は、上の結果を利用して証明される。

連続写像 $g : A \rightarrow B$ が分岐被覆であるとは、内点を持たない閉集合 $K \subset B$ が存在して、 $g : A \setminus g^{-1}(K) \rightarrow B \setminus K$ が被覆写像になるときをいう。

次は、Proposition 3 の一般化である。

Proposition 4. $f : X \rightarrow X$ は拡大的であるとし、 $E(a)$ が空でない有限集合であり、軌道 $\mathcal{O}(a)$ は N/Γ で稠密である点 a が存在すると仮定する。このとき、 N/Γ の稠密な開集合 U が存在して、すべての $x \in U$ に対し $\#E(x) = \#E(a)$ で制限 $h : E(U) \rightarrow U$ は被覆写像である。ここで、 $E(U) = \cup \{E(x) | x \in U\}$ 。さらに、 $h : \text{cl}E(U) \rightarrow N/\Gamma$ は分岐被覆となる。

この結果から次の定理が証明される。

Theorem 3. M はコンパクト連結多様体とし、 $f : M \rightarrow M$ は不動点を持つ拡大的同相写像とする。双曲型 *infra-nilmanifold* 自己同型 $\varphi_A : N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ と全射準同型 $\phi : G(\pi) \rightarrow \Gamma$ とが存在して、 $\varphi_{A*} \circ \phi = \phi \circ f_*$ であると仮定する。もし $\dim(M) = \dim(N/\Gamma)$ ならば、分岐被覆 $h : M \rightarrow N/\Gamma$ が存在して $h_* = \phi$ かつ $\varphi_A \circ h = h \circ f$ が成り立つ。さらに、 M は境界を持たない。

pseudo-Anosov 同相写像は、双曲型トーラス自己同型の分岐被覆による持ち上げとは限らないし、また Franks-Robinson の例も双曲型トーラス自己同型の分岐被覆による持ち上げではないので、注意する。

REFERENCES

- [B] B. Bryant, Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space, Amer. Math. Monthly 69(1962), 386-391.
- [F] J. Franks, Anosov diffeomorphisms, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc., 1970, 61-93.
- [F-R] J. Franks and C. Robinson, A quasi-Anosov diffeomorphism that is not Anosov, Trans. Amer. Math. Soc. 223 (1976), 267-278.
- [G-H] W. Gottschalk and G. Hedlund, Topological Dynamics, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 36, Amer. Math. Soc., 1955.
- [H] K. Hiraide, Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov, Osaka J. Math. 27 (1990), 117-162.
- [J-U] J. Jakobsen and W. Utz, The nonexistence of expansive homeomorphisms of a closed 2-cell, Pacific J. Math. 10 (1960), 1319-1321.
- [L] J. Lewowicz, Expansive homeomorphisms of surfaces, Bull. Brazil. Math. Soc. 20 (1989), 113-133.
- [M] R. Mañé, Expansive homeomorphisms and topological dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 313-319.
- [P] R. Plykin, On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades, Russian Math. Surveys 39 (1984), 85-131.
- [U] W. Utz, Unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 1(1950), 769-774.
- [V] L. Vieitez, Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds, Ergodic Theory Dynam. Systems 16 (1996), 591-622.