

共分散行列に関する検定の不偏性 単調性および漸近展開について

広島大学 理学部 杉浦成昭

広島大学 理学部 長尾寿夫

§0. 序

この稿は多次元正規分布の共分散行列に関する検定の性質をのべたものである。§1ではAnderson & Gupta [1]によって二標本の共分散行列の均一性に関する modified LR test が不偏であるかどうか示すのは困難であると述べている。Sugiura & Nagao [8]によって、Pitman [5] が Bartlett test の不偏性を示した方法を一般化することによって上の問題を肯定的に解決した。その考えを使うことによって一標本の共分散行列がある既知な行列に等しい検定, sphericity test ならびに共分散行列と平均に関する検定が不偏であることを示す。またその内のいくらかは良標本に拡張する。§2はNagao [4] によるもので§1で考えた一標本の共分散行列の均一性に対する検定の検定力に関して不偏よりも良い結果を導びきそれを良標本に拡張する。また§3はSugi-

ura [7] によるもので §1 で考えた検定統計量について、仮説、対立仮説の下で漸近展開あるいは極限分布を求める。仮説の下では漸近的に χ^2 分布にしたがうが、対立仮説の下では適当に正規化することによって正規分布である。

§1. 不偏性

$X_1, X_2, \dots, X_N$ ($N > p$) を p 次元列ベクトルで平均 μ , 共分散行列 Σ ($\det |\Sigma| \neq 0$) をもつ正規分散からの random sample とする。仮説 $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ 。対立仮説 $K_1: \Sigma \neq \Sigma_0$ を検定したい。ただし Σ_0 は既知な正値行列, 平均 μ は未知である。 $\bar{X} = N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i$, $S = \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$ とおくとき尤度比検定 (LR test) の acceptance region は

$$(1.1) \quad \omega_1 = \{ S \mid |S \Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} S] \geq c_\alpha \}$$

であらえられる。ここで $|S \Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}}$ を $|S \Sigma_0^{-1}|^{\frac{N-1}{2}}$ におきかえた test を modified LR test とよぶことにすると $p=1$ の場合 UMP unbiased test である。多次元の場合次の結果が得られる。

定理 1.1. 仮説 $H_0: \Sigma = \Sigma_0$ 。対立仮説 $K_1: \Sigma \neq \Sigma_0$ 。に対して, $n = N-1$ とするとき acceptance region

$$(1.2) \quad \omega_1 = \{S \mid |S \Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} S] \geq c_\alpha\}$$

をもつ modified LR test は不偏である。

証明. 統計量 \$S\$ の Wishart \$W(\Sigma, n)\$ にしたがうことから,
\$K_1\$ の下で \$S\$ が \$\omega_1\$ に含まれる確率を \$P_K(\omega_1)\$ とすると

$$(1.3) \quad P_K(\omega_1) = C_{p,n} \int_{S \in \omega_1} |S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \Sigma^{-1} S] dS$$

であらえられる。ただし \$\text{etr}\$ は \$\text{exp tr}\$ を表わし \$S = (s_{ij})\$ と
すると \$dS = \prod_{ij} ds_{ij}\$ を意味する。定数 \$C_{p,n}\$ は

$$(1.4) \quad C_{p,n}^{-1} = \pi^{\frac{1}{4}p(p-1)} 2^{\frac{np}{2}} \prod_{i=1}^p \Gamma[\frac{1}{2}(n-i+1)]$$

\$U = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} S \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma_0^{\frac{1}{2}}\$ なる変換をほどこすと, Jacobian は
\$|dU/dS| = |\Sigma_0 \Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}(p+1)}\$ であらえられるから, (1.3) は

$$(1.5) \quad P_K(\omega_1) = C_{p,n} \int_{U \in \omega_1^*} |U|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} U] dU$$

ただし \$\omega_1^* = \{U \mid \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} U \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} \in \omega_1\}\$.

したがって

$$(1.6) \quad P_H(\omega_1) - P_K(\omega_1) = C_{p,n} \left\{ \int_{U \in \omega_1} - \int_{U \in \omega_1^*} \right\} |U|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \\ \times |\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} U] dU$$

一方 $U \in \omega_1$ に対して $|U|^{-\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Sigma_0|^{-\frac{n}{2}} \exp[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} U] \geq c_\alpha |U|^{-\frac{1}{2}(p+1)}$ であるから $\int_{U \in \omega_1} |U|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dU < +\infty$ である。
かくして

$$(1.7) \quad P_H(\omega_1) - P_K(\omega_1) \geq c_{p,n} c_\alpha \left\{ \int_{U \in \omega_1 - \omega_1 \cap \omega_1^*} - \int_{U \in \omega_1^* - \omega_1^* \cap \omega_1} \right\} |U|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dU \\ = c_{p,n} c_\alpha \left\{ \int_{U \in \omega_1} - \int_{U \in \omega_1^*} \right\} |U|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dU$$

ところが $|U|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dU$ は A を任意の nonsingular matrix とすると、変換 $U \rightarrow A'UA$ に対して不変な測度である。すなわち

$$\int_{U \in \omega_1^*} |U|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dU = \int_{U \in \omega_1} |U|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dU.$$

ゆえに

$$(1.8) \quad P_H(\omega_1) - P_K(\omega_1) \geq 0$$

かくて定理 1.1 は示された。

同様な方法によって、次の定理を得る。

定理 1.2. 仮説 $H: \Sigma = \Sigma_0, \mu = \mu_0$ 対立仮説 $K: \Sigma \neq \Sigma_0, \mu \neq \mu_0$ に対して (1.1) で定められた acceptance region ω_1 をもつ、LR test は不偏である。ただし Σ_0, μ_0 は既知であり、このとき $S^* = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_0)(x_i - \mu_0)'$ として S におきかえたものである。

定理1.1 を k 標本に拡張することが出来る。 $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iN_i}$ を P 次元正規分布平均 μ_i 共分散行列 Σ_i からの random sample とする ($N_i > P, i=1, 2, \dots, k$)。 $S_j = \sum_{a=1}^{N_j} (X_{ja} - \bar{X}_j)(X_{ja} - \bar{X}_j)'$, $\bar{X}_j = N_j^{-1} \sum_{a=1}^{N_j} X_{ja}$, $n_j = N_j - 1$ とおくと次の定理が得られる。

定理1.3. 仮説 H_1'' : $\Sigma_j = \Sigma_{0j}$ ($j=1, 2, \dots, k$) 対立仮説 K_1'' : $\Sigma_i \neq \Sigma_{0i}$ for some i に対して acceptance region

$$(1.9) \quad \omega_1'' = \left\{ (S_1, S_2, \dots, S_k) \mid \prod_{j=1}^k [|S_j \Sigma_{0j}^{-1}|^{\frac{n_j}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \Sigma_{0j}^{-1} S_j]] \geq c_\alpha \right\}$$

ともつ modified L R test は不偏である。

次に二標本問題について述べる。 $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iN_i}$ を平均 μ_i 共分散行列 Σ_i からの random sample とする ($N_i > P, i=1, 2$)。 仮説 H_2 : $\Sigma_1 = \Sigma_2$ 対立仮説 K_2 : $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ に対する L R test の acceptance region は $S_i = \sum_{a=1}^{N_i} (X_{ia} - \bar{X}_i)(X_{ia} - \bar{X}_i)'$ とおくことによって ($i=1, 2$),

$$(1.10) \quad \omega_2' = \left\{ (S_1, S_2) \mid |S_1|^{\frac{N_1}{2}} |S_2|^{\frac{N_2}{2}} |S_1 + S_2|^{-\frac{1}{2}(N_1+N_2)} \geq c_\alpha \right\}$$

であらえられる。この test は $P=1$ の場合不偏であるのは、 $N_1=N_2$ にかぎることが Brown [2] によって示されている。 N_i を自由度 N_i-1 におきかえて得られる test は UMP unbiased test である。多次元の場合次の定理が得られる。

この問題は Anderson & Gupta [1] によって Conjecture されたものである。

定理 1.4. 仮説 $H_2: \Sigma_1 = \Sigma_2$ 対立仮説 $K_2: \Sigma_1 \neq \Sigma_2$ に対して, acceptance region

$$(1.11) \quad \omega_2 = \left\{ (S_1, S_2) \mid |S_1|^{\frac{n_1}{2}} |S_2|^{\frac{n_2}{2}} |S_1 + S_2|^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)} \geq c_\alpha \right\}$$

をもつ modified L R test は不偏である。

証明. S_1, S_2 は独立でそれぞれ $W(\Sigma_1, n_1), W(\Sigma_2, n_2)$ にしたがうから, K の下で (S_1, S_2) が ω_2 に含まれる確率を $P_K(\omega_2)$ とすると,

$$(1.12) \quad P_K(\omega_2) = C_{p, n_1} C_{p, n_2} \int_{(S_1, S_2) \in \omega_2} \left[\prod_{i=1}^2 |S_i|^{\frac{1}{2}(n_i-p-1)} |\Sigma_i|^{-\frac{n_i}{2}} \right] \text{etr} \left[-\frac{1}{2} (\Sigma_1^{-1} S_1 + \Sigma_2^{-1} S_2) \right] dS_1 dS_2$$

である。 $U_i = \Sigma_i^{-\frac{1}{2}} S_i \Sigma_i^{-\frac{1}{2}}$ ($i=1, 2$) なる変換をほどこすと, Jacobian は, $|\partial(U_1, U_2)/\partial(S_1, S_2)| = |\Sigma_2|^{-(p+1)}$ とあたえられ, 一般に A は任意の nonsingular matrix とすると $(S_1, S_2) \in \omega_2 \iff (AS_1 A', AS_2 A') \in \omega_2$ であるから (1.12) は次の如くなる,

$$(1.13) \quad P_K(\omega_2) = C_{p, n_1} C_{p, n_2} \int_{(U_1, U_2) \in \omega_2} |\Sigma_2 \Sigma_1^{-1}|^{\frac{n_1}{2}} |U_1|^{\frac{1}{2}(n_1-p-1)} |U_2|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)} \text{etr} \left[-\frac{1}{2} (\Sigma_2^{-\frac{1}{2}} \Sigma_1^{-1} \Sigma_2^{\frac{1}{2}} U_1 + U_2) \right] dU_1 dU_2.$$

次に $U_1 = V_1$, $U_2 = V_1^{\frac{1}{2}} V_2 V_1^{\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと, Jacobian は $| \partial(U_1, U_2) / \partial(V_1, V_2) | = |V_1|^{\frac{1}{2}(p+1)}$ であり, 再び領域 ω_2 の不変なことから, かつ,

$$(1.14) \quad P_K(\omega_2) = C_{p, n_1} C_{p, n_2} \int_{(I, V_2) \in \omega_2} | \Sigma_2 \Sigma_1^{-1} |^{\frac{n_1}{2}} |V_1|^{\frac{1}{2}(n_1+n_2-p-1)} |V_2|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)} e^{\text{tr}[-\frac{1}{2}(\Sigma_2^{-\frac{1}{2}} \Sigma_1^{-1} \Sigma_2^{-\frac{1}{2}} + V_2) V_1]} dV_1 dV_2$$

$$= \frac{C_{p, n_1} C_{p, n_2}}{C_{p, n_1+n_2}} \int_{(I, V_2) \in \omega_2} | \Sigma_2 \Sigma_1^{-1} |^{\frac{n_1}{2}} |V_2|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)} | \Sigma_2^{-\frac{1}{2}} \Sigma_1^{-1} \Sigma_2^{-\frac{1}{2}} + V_2 |^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)} dV_2$$

$W = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \Sigma_2^{-\frac{1}{2}} V_2 \Sigma_2^{-\frac{1}{2}} \Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと

$$(1.15) \quad P_K(\omega_2) = \frac{C_{p, n_1} C_{p, n_2}}{C_{p, n_1+n_2}} \int_{W \in \omega_2^*} |W|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)} |I+W|^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)} dW$$

ただし $\omega_2^* = \{W \mid (I, \Sigma_2^{-\frac{1}{2}} \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} W \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \Sigma_2^{\frac{1}{2}}) \in \omega_2\}$ である。定理 1.1 の証明と同じように考えて, $P_H(\omega_2) \geq P_K(\omega_2)$,

再び一標本に帰って sphericity test といわれる次の仮説を考える。仮説 $H_0: \Sigma = \sigma^2 I$ 対立仮説 $K_0: \Sigma \neq \sigma^2 I$ に対する LR test の acceptance region A $n = N-1$ とおくと

$$(1.16) \quad \omega_3 = \{S \mid |S|^{\frac{n}{2}} (\text{tr} S)^{-\frac{pn}{2}} \geq C_\alpha\}$$

であたえられる。この test の不偏性とは, すてに Gilesler [3] が Bartlett test の equal sample size の場合の不偏性を使う

ことにより示した。しかしここでは直接証明をあたえる。

定理 1.5. 仮説 $H_3: \Sigma = \sigma^2 I$ 対立仮説 $K_3: \Sigma \neq \sigma^2 I$ に対して, acceptance region ω_3 をもつ LR test は不偏である。

証明. $P_K(\omega_3)$ を次の形に定義する。

$$(1.17) \quad P_K(\omega_3) = C_{p,n} \int_{S \in \omega_3} |S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |Z|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2}Z'S] dS$$

$T'ST = \Lambda$ $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ となる直交行列 T が存在する。

$A = T'ST$ なる変換をほどこすと, Jacobian は 1 であり, 領域 ω_3 は不変であるから

$$(1.18) \quad P_K(\omega_3) = C_{p,n} \int_{A \in \omega_3} |A|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |A|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2}\Lambda'A] dA$$

次に $U = \Lambda^{\frac{1}{2}} A \Lambda^{\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと

$$(1.18) \quad P_K(\omega_3) = C_{p,n} \int_{\Lambda^{\frac{1}{2}} U \Lambda^{\frac{1}{2}} \in \omega_3} |U|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \text{etr}[-\frac{1}{2}U] dU$$

ここで $U = V_0 V_0'$ ただし V_0 は次の行列である。

$$(1.19) \quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 & V_{12} & \dots & V_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{p1} & \dots & \dots & V_{pp} \end{pmatrix}$$

Jacobian は $|\partial U / \partial (V_0)| = V_{11}^{p(p+1)/2 - 1}$ であり領域 ω_3 は正の定数倍に対して不変であるから

$$\begin{aligned}
 (1.20) \quad P_K(\omega_3) &= C_{p,n} \int_{\Lambda^{\frac{1}{2}} V_0 \Lambda^{\frac{1}{2}} \in \omega_3} |V_{11}|^{\frac{n}{2}-1} |V_0|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} e^{\text{tr}[-\frac{1}{2} V_{11} V_0]} dV_{11} dV_0 \\
 &= 2^{\frac{np}{2}} \Gamma\left[\frac{np}{2}\right] C_{p,n} \int_{\Lambda^{\frac{1}{2}} V_0 \Lambda^{\frac{1}{2}} \in \omega_3} |V_0|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} (\text{tr} V_0)^{-\frac{np}{2}} dV_0
 \end{aligned}$$

したがって

$$(1.21) \quad P_H(\omega_3) - P_K(\omega_3) \geq 2^{\frac{np}{2}} \Gamma\left[\frac{np}{2}\right] C_{p,n} C_\alpha \left\{ \int_{V_0 \in \omega_3} - \int_{\Lambda^{\frac{1}{2}} V_0 \Lambda^{\frac{1}{2}} \in \omega_3} \right\} |V_0|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dV_0$$

$W_0 = \lambda^{-1} \Lambda^{\frac{1}{2}} V_0 \Lambda^{\frac{1}{2}}$ なる変換を作ると, $|W_0|/|V_0| = |\lambda|^{-\frac{1}{2}(p+1)} \lambda^{-\frac{p(p+1)}{2}}$ であるから後の積分は $\int_{\Lambda^{\frac{1}{2}} V_0 \Lambda^{\frac{1}{2}} \in \omega_3} |V_0|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dV_0 = \int_{W_0 \in \omega_3} |W_0|^{-\frac{1}{2}(p+1)} dW_0$ によって示された。

S のかわりに $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}} S \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$ と考えることによって次の系を得る。

系. 仮説 $H_3: \Sigma = \sigma^2 \Sigma_0$, 対立仮説 $K_3: \Sigma \neq \sigma^2 \Sigma_0$ に対する acceptance region

$$(1.22) \quad \omega_3' = \left\{ S \mid |S \Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}} (\text{tr} \Sigma_0^{-1} S)^{-\frac{np}{2}} \geq C_\alpha \right\}$$

ともつ LR test に不偏である。

定理 1.5 は, LR test であるけれども, k 標本の場合には, LR test と modify しなければならないことを注意したい。

定理 1.6. 仮説 $H_3'': \Sigma_j = \sigma^2 \Sigma_{0j}$ ($j=1, 2, \dots, k$) 対立仮説 $K_3'': \Sigma_{i_0} \neq \sigma^2 \Sigma_{0i_0}$ for some i に対して acceptance region

$$(1.23) \quad \omega_3'' = \{(S_1, S_2, \dots, S_R) \mid \prod_{j=1}^R |S_j \bar{\Sigma}_j^{-1}|^{\frac{n_j}{2}} (\sum_{j=1}^R \text{tr} \bar{\Sigma}_j^{-1} S_j)^{-\frac{nP}{2}} \geq C_\alpha\}$$

をもつ modified LR test は不偏である。 $n_j = N_j - 1$, $n = \sum_{j=1}^R n_j$.
同様にして次の定理を得る。

定理 1.7. 仮説 H_3'' : $\Sigma_j = \sigma_j^2 \bar{\Sigma}_j$ ($j=1, 2, \dots, R$) 対立仮説 K_3'' : $\Sigma_i \neq \sigma_i^2 \bar{\Sigma}_i$
for some i に対する acceptance region

$$(1.24) \quad \omega_3''' = \{(S_1, S_2, \dots, S_R) \mid \prod_{j=1}^R [|S_j \bar{\Sigma}_j^{-1}|^{\frac{n_j}{2}} (\text{tr} S_j \bar{\Sigma}_j^{-1})^{-\frac{n_j P}{2}}] \geq C_\alpha\}$$

をもつ modified LR test は不偏である。

次に共分散行列と平均に関する検定の不偏性について述べる。

定理 1.8. 仮説 H_4 : $\Sigma = \bar{\Sigma}_0$ かつ $\mu = \mu_0$ 対立仮説 K_4 : $\Sigma \neq \bar{\Sigma}_0$.
または $\mu \neq \mu_0$ に対する acceptance region

$$(1.25) \quad \omega_4 = \{(\bar{x}, S) \mid |S \bar{\Sigma}_0^{-1}|^{\frac{N}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \bar{\Sigma}_0^{-1} \{S + N(\bar{x} - \mu_0)(\bar{x} - \mu_0)'\}] \geq C_\alpha\}$$

をもつ LR test は不偏である。ただし $\bar{\Sigma}_0, \mu_0$ は既知である。

証明. K の下で ω_4 に $(\bar{x}, S)$ が含まれる確率 $P_K(\omega_4)$ は

$$(1.26) \quad P_K(\omega_4) = \frac{C_{p,n} N^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{(\bar{x}, S) \in \omega_4} |S|^{-\frac{1}{2}(N-p-2)} |\bar{\Sigma}|^{-\frac{N}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2} \bar{\Sigma}^{-1} \{S + N(\bar{x} - \mu) \\ \times (\bar{x} - \mu)'\}] d\bar{x} dS$$

$U = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} S \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{Y} - \mu_0 = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\bar{X} - \mu)$ なる変換をほどこすと Jacobian $|J| = |\partial(U, \bar{Y}) / \partial(S, \bar{X})| = |\Sigma_0 \Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}(p+2)}$ であるから

$$(1.27) \quad P_K(\omega_4) = \frac{C_{p,n} N^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{(\bar{Y}, U) \in \omega_4^*} |\bar{U}|^{\frac{1}{2}(N-p-2)} |\Sigma_0|^{-\frac{N}{2}} \text{etr} \left[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} \{U + N(\bar{Y} - \mu_0)(\bar{Y} - \mu_0)'\} \right]$$

$$\times d\bar{Y} dU$$

ただし $\omega_4^* = \{(\bar{Y}, U) \mid (\Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} (\bar{Y} - \mu_0) + \mu, \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} U \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}) \in \omega_4\}$ である。ゆえに前と同じ議論によって $P_H(\omega_4) \geq P_K(\omega_4)$.

同じ考えによって R 標本に拡張される。

定理 1.9. 仮説 $H_4: \Sigma_j = \Sigma_{0j}, \mu_j = \mu_{0j} \ (j=1, 2, \dots, R)$ 対立仮説 $K_4: \Sigma_i \neq \Sigma_{0i}$ または $\mu_j \neq \mu_{0j}$ for some i, j に対して acceptance region

$$(1.28) \quad \omega_4' = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_R, S_1, S_2, \dots, S_R) \mid \prod_{j=1}^R [|S_j \Sigma_{0j}^{-1}|^{\frac{N_j}{2}} \text{etr} \left[-\frac{1}{2} \Sigma_{0j}^{-1} \{S_j + N_j(\bar{x}_j - \mu_{0j})(\bar{x}_j - \mu_{0j})'\} \right] \geq C_4 \}$$

をもつ LR test は不偏である。

§2. 単調性

§1 で仮説 $H: \Sigma = \Sigma_0$, 対立仮説 $K: \Sigma \neq \Sigma_0$ に対する modified LR test が不偏なることを示した。ここではさらにくわしく検定力の評価をおこなう。

定理2.1. 仮説 $H: \Sigma = \Sigma_0$. 対立仮説 $K: \Sigma \neq \Sigma_0$ に対して, acceptance region ω を持つ modified LR test の power function I , $c_R(\Sigma \Sigma_0^{-1}) = (\delta_1^2, \delta_2^2, \dots, \delta_p^2)$ なる P の固有値のみの関数であって, $\delta_1^2, \dots, \delta_{i-1}^2, \delta_{i+1}^2, \dots, \delta_p^2$ を固定したとき, もし $\delta_i^2 \geq 1$ ($\delta_i^2 \leq 1$) なら, Power function I 単調増加 (減少) である。

証明. Power function $P_K(\omega | \Sigma)$ は

$$(2.1) \quad P_K(\omega | \Sigma) = C_{p,n} \int_{S \in \omega^c} |S|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}S] dS$$

であらえられる。 $A = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} S \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$ なる変換をほどこすと,

$$(2.2) \quad P_K(\omega | \Sigma) = C_{p,n} \int_{A \in \omega^c} |A|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Sigma \Sigma_0^{-1}|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-1} \Sigma_0^{\frac{1}{2}} A] dA$$

ただし $\omega = \{A \mid |A|^{\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{A}{\Sigma}] \geq c_\alpha\}$ である。

$H' \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} H = \Lambda$, $\Lambda = \text{diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \dots, \delta_p^2)$ となる直交変換 H が存在するから $B = H' A H$ なる変換をほどこすと, (2.2) は

$$(2.3) \quad P_K(\omega | \Sigma) = C_{p,n} \int_{B \in \omega^c} |B|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} |\Lambda|^{-\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2}\Lambda^{-1}B] dB$$

となる。次に Gleser [3] が sphericity test の不偏性を示したときもちいた変換 $B = D^{\frac{1}{2}} R D^{\frac{1}{2}}$ (ただし $D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(b_{11}^{\frac{1}{2}}, \dots, b_{pp}^{\frac{1}{2}})$, R : 相関行列) とおくと, Jacobian は $|\partial B / \partial (R, D)| = |D|^{\frac{1}{2}(p-1)}$ であるから (2.3) は次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad P_k(\omega|\Lambda) &= C_{p,n} \int_{R>0} |R|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} dR \int_{\omega_R} |D|^{\frac{n}{2}-1} |\Lambda|^{\frac{n}{2}} \text{etr}[-\frac{1}{2}\Lambda^{-1}D] dD \\
 &= C_{p,n} \int_{R>0} |R|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \beta(\delta_1^2, \delta_2^2, \dots, \delta_p^2 | R) dR
 \end{aligned}$$

ただし $\omega_R = \{D \mid B = D^{\frac{1}{2}} R D^{\frac{1}{2}} \in \omega^c\}$, $\beta(\delta_1^2, \dots, \delta_p^2 | R) = \int_{\omega_R} \prod_{i=1}^p b_{ii}^{\frac{n}{2}-1} \times (\delta_i^2)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\frac{b_{ii}}{2\delta_i^2}] db_{ii}$ である。

もし $\delta_i^{*2} \geq \delta_i^2 \geq 1$ あるいは $\delta_i^{*2} \leq \delta_i^2 \leq 1$ ならば, $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_p$ と固定して b_i について積分をおこなうと次の補題によって $\beta(\delta_1^2, \dots, \delta_{i-1}^2, \delta_i^{*2}, \delta_{i+1}^2, \dots, \delta_p^2 | R) \geq \beta(\delta_1^2, \dots, \delta_i^2, \dots, \delta_p^2 | R)$, この不等式の両辺に $|R|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}$ をかけて積分すると結果が得られる。

証明の途中で使われた補題は Ramachandran [6] によって示されたものである。

補題. 一次元正規分布において仮説 $H: \sigma = \sigma_0$, 対立仮説 $K: \sigma \neq \sigma_0$ に対して, acceptance region

$$(2.5) \quad \omega = \{S_1 \mid (S_1 \sigma_0^{-2})^{\frac{n}{2}} \exp[-\frac{1}{2} \sigma_0^{-2} S_1] \geq C_\alpha\}$$

であたえられる modified LR test の power function は $\delta^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$ に関して単調性を有する。ただし $S_1 = \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$, σ_0 は既知, 平均は未知である。

定理 2.1 と同じ証明方法によって次の定理を得る。

定理 2.2. 仮説 $H_1: \Sigma = \Sigma_0, \mu = \mu_0$ 対立仮説 $K_1: \Sigma \neq \Sigma_0, \mu = \mu_0$ に対して acceptance region

$$(2.6) \quad \omega^* = \left\{ S^* \mid |S^* \Sigma_0^{-1}|^{\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} S^*\right] \geq c_\alpha \right\}$$

をもつ LR test の power は $ch(\Sigma \Sigma_0^{-1})$ に関して単調性を有する。

また定理 2.1 は R 標本に対して拡張することが出来る。

定理 2.3. 仮説 $H_1'': \Sigma_j = \Sigma_{0j} \ (j=1, 2, \dots, R)$ 対立仮説 $K_1'': \Sigma_i \neq \Sigma_{0i}$ for some i に対して acceptance region ω_1'' をもつ modified LR test の power は $ch(\Sigma_j \Sigma_{0j}^{-1})$ に関して単調性を有する ($j=1, 2, \dots, R$)。

§ 3. 漸近展開

仮説検定 (H_1, K_1) に対する modified LR test は

$$(3.1) \quad \lambda^* = (en^{-1})^{\frac{nP}{2}} |S \Sigma_0^{-1}|^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \Sigma_0^{-1} S\right]$$

であたえられる。 λ^* の l 次の moment が (H_1, K_1) に対して求められるから、それとつかうことによって次の定理を得る。

定理 3.1. $f = \frac{1}{2}P(P+1)$ とするとき仮説 H_1 の下で

$$(3.2) \quad P(-2 \log \lambda^* \leq c) = P(\chi_f^2 \leq c) + \frac{1}{n} B_2 \{ P(\chi_{f+2}^2 \leq c) - P(\chi_f^2 \leq c) \} + \frac{1}{6n^2} \{ (3B_2^2 - 4B_3) P(\chi_{f+4}^2 \leq c) - 6B_2^2 P(\chi_{f+2}^2 \leq c) \}$$

$$\begin{aligned}
& + (3B_2^2 + 4B_3)P(\chi_f^2 \leq c) \Big\} + \frac{1}{6n^3} \{ (4B_4 - 4B_2B_3 + B_2^3)P(\chi_{f+6}^2 \leq c) \\
& + B_2(4B_3 - 3B_2^2)P(\chi_{f+4}^2 \leq c) + B_2(4B_3 + 3B_2^2)P(\chi_{f+2}^2 \leq c) \\
& - (4B_4 + 4B_2B_3 + B_2^3)P(\chi_f^2 \leq c) \Big\} + O(n^{-4})
\end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{1}{24} P(2P^2 + 3P - 1), \quad B_3 = -\frac{1}{32} P(P-1)(P+1)(P+2),$$

$$B_4 = \frac{1}{480} P(6P^4 + 15P^3 - 10P^2 - 30P + 3)$$

定理 3.2. $\tau^2 = 2 \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1} - I)^2$ とすると, 対立仮説 K_1 の下で,

$$(3.3) \quad P([-2n^{-\frac{1}{2}} \log \lambda^* - \sqrt{n} \{ \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1} - I) - \log |\Sigma \Sigma_0^{-1}| \}] / \tau \leq c)$$

$$= \bar{\Phi}(c) - \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{P(P+1)}{2\tau} \bar{\Phi}(c) + \frac{\bar{\Phi}^{(3)}(c)}{\tau^3} \left\{ \frac{2P}{3} + \frac{4}{3} \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^3 - 2 \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^2 \right\} \right]$$

$$+ \frac{1}{n} \left[\frac{\bar{\Phi}^{(5)}(c)}{8\tau^2} P(P+1)(P^2+P+4) + \frac{\bar{\Phi}^{(4)}(c)}{\tau^4} \left\{ \frac{P}{3}(P^2+P+2) - P(P+1) \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^2 \right. \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}(P^2+P-4) \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^3 + 2 \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^4 \right\} + \frac{\bar{\Phi}^{(6)}(c)}{27\tau^6} \left\{ \frac{2}{3}P + \frac{4}{3} \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^3 \right.$$

$$\left. - 2 \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma_0^{-1})^2 \right\}^2 \Big] - \frac{1}{n\sqrt{n}} \left[\frac{P(2P^2+3P-1)}{12\tau} \bar{\Phi}'(c) + \frac{P(P+1)(P^4+2P^3+3P^2+12P+32)}{48\tau^3} \right.$$

$$\left. \times \bar{\Phi}^{(3)}(c) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{\Phi}^{(5)}(c)}{\tau^5} \left\{ \frac{P}{60} (5P^4 + 10P^3 + 45P^2 + 40P + 48) - \frac{P(P+1)}{4} (P^2 + P + 4) \right. \\
& \times \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^2 + \frac{P}{6} (P+1)(P^2 + P - 4) \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^3 + (P^2 + P - 4) \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^4 \\
& \left. + \frac{16}{5} \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^5 \right\} + \frac{\bar{\Phi}^{(7)}(c)}{\tau^7} \left\{ \frac{16}{3} P + \frac{32}{3} \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^3 - 16 \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^2 \right\} \\
& \times \left\{ \frac{P}{48} (P^2 + P + 4) - \frac{P(P+1)}{16} \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^2 + \frac{P^2 + P - 8}{24} \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^3 + \frac{1}{4} \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^4 \right\} \\
& + \frac{\bar{\Phi}^{(9)}(c)}{\tau^9} \frac{32}{3} \left\{ \frac{P}{6} + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^3 - \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{Z}\bar{Z}_0^{-1})^2 \right\}^3 \Big] + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

に於し $\bar{\Phi}^{(i)}(c)$ は標準正規分布関数の i 回微分を表わす。

§1 の仮説検定 (H_4, K_4) に対する LR test は

$$(3.4) \quad \lambda = (eN^{-1})^{\frac{NP}{2}} |\bar{S}\bar{Z}_0^{-1}|^{\frac{N}{2}} \text{etr} \left[-\frac{1}{2} \bar{Z}_0^{-1} \left\{ \bar{S} + N(\bar{x} - \mu_0)(\bar{x} - \mu_0)' \right\} \right]$$

である。前と同じ方法により、次の定理を得る。

定理 3.3. $\delta = P + \frac{1}{2}P(P+1)$ とおくとき仮説 H_4 の下で

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad & P(-2 \log \lambda \leq c) = P(\chi_{\delta}^2 \leq c) + \frac{1}{N} B_2 [P(\chi_{\delta+2}^2 \leq c) - P(\chi_{\delta}^2 \leq c)] \\
& + \frac{1}{6N^2} [(3B_2^2 - 4B_3) P(\chi_{\delta+4}^2 \leq c) - 6B_2^2 P(\chi_{\delta+2}^2 \leq c) + (3B_2^2 + 4B_3) \\
& \times P(\chi_{\delta}^2 \leq c)]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6N^3} [(4B_4 - 4B_2B_3 + B_2^3) P(\chi_{f+6}^2 \leq C) + B_2(4B_3 - 3B_2^2) P(\chi_{f+4}^2 \leq C) \\ + B_2(4B_3 + 3B_2^2) P(\chi_{f+2}^2 \leq C) - (4B_4 + 4B_2B_3 + B_2^3) P(\chi_f^2 \leq C)] + O(N^{-8})$$

$$\text{ただし } B_2 = \frac{1}{24} P(2P^2 + 9P + 11), \quad B_3 = -\frac{1}{32} P(P+1)(P+2)(P+3),$$

$$B_4 = \frac{1}{480} P(6P^4 + 45P^3 + 110P^2 + 90P + 3)$$

定理 3.4. $\tau^2 = 2 \{ \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1} - I)^2 + 2(\mu - \mu_0)' \tilde{Z}_0^{-1} \tilde{Z} \tilde{Z}_0^{-1} (\mu - \mu_0) \}$ とするとき, 対立仮説 K_4 の下で

$$(3.6) \quad P([-2N^{\frac{1}{2}} \log \lambda - \sqrt{N} \{ \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1} - I) + (\mu - \mu_0)' \tilde{Z}_0^{-1} (\mu - \mu_0) - \log |\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1}| \}]/\tau \leq C)$$

$$= \Phi(C) - \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\frac{\Phi(C)}{\tau} \frac{P(P+3)}{2} + \frac{\Phi^{(3)}(C)}{\tau^3} \left\{ \frac{2}{3} P + 4(\mu - \mu_0)' \tilde{Z}_0^{-1} (\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^2 (\mu - \mu_0) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3} \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^3 - 2 \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^2 \right\} \right] + \frac{1}{N} \left[\frac{\Phi^{(2)}(C)}{8\tau^2} P(P+3)(P^2 + 3P + 4) \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi^{(4)}(C)}{\tau^4} \left\{ \frac{P(P+1)(P+2)}{3} + 2P(P+3)(\mu - \mu_0)' \tilde{Z}_0^{-1} (\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^2 (\mu - \mu_0) + 8(\mu - \mu_0)' \right. \right.$$

$$\left. \times \tilde{Z}_0^{-1} (\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^3 (\mu - \mu_0) + 2 \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^4 + \frac{2}{3}(P+1)(P+4) \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^3 - P(P+3) \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^2 \right\} \right]$$

$$+ \frac{\Phi^{(6)}(C)}{2\tau^6} \left\{ \frac{2}{3} P + 4(\mu - \mu_0)' \tilde{Z}_0^{-1} (\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^2 (\mu - \mu_0) + \frac{4}{3} \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^3 - 2 \text{tr}(\tilde{Z}\tilde{Z}_0^{-1})^2 \right\}^2 \Big]$$

$$+ O(N^{-\frac{3}{2}})$$

最後に仮説 $H: \Sigma_1 = \dots = \Sigma_R$ 対立仮説 $K: \Sigma_i \neq \Sigma_j$ for some $(i \neq j)$

に対する modified LR test は

$$(3.7) \quad \lambda^* = \left[\prod_{\alpha=1}^R |S_{\alpha}/n_{\alpha}|^{n_{\alpha}/2} \right] \left| \sum_{\alpha=1}^R S_{\alpha}/n \right|^{-n/2}$$

であたえられる。ただし $n = \sum_{\alpha=1}^R n_{\alpha}$

定理 3.5. 対立仮説 K の下で

$$(3.8) \quad -\frac{2}{\sqrt{n}} \log \lambda^* - \sqrt{n} \log \left\{ \left| \sum_{\alpha=1}^R \rho_{\alpha} \bar{Z}_{\alpha} \right| / \prod_{\alpha=1}^R \left| \bar{Z}_{\alpha} \right|^{\rho_{\alpha}} \right\}$$

は漸近的に正規分布に従い、その平均は 0、分散は $2 \sum_{\alpha=1}^R \rho_{\alpha} \times \text{tr} \{ \bar{Z}_{\alpha} (\sum_{\alpha=1}^R \rho_{\alpha} \bar{Z}_{\alpha})^{-1} - I \}$ であたえられる。ここで $n_{\alpha} = \rho_{\alpha} n$ である。

参 考 文 献

- [1] Anderson, T. W. and Das Gupta, S. (1964). A monotonicity property of the power functions of some tests of the equality of two covariance matrices. *Ann. Math. Statist.* 35 1059-1063
- [2] Brown, G. W. (1939). On the power of the L_1 test for equality of several variances. *Ann. Math. Statist.* 10 119-128
- [3] Gleser, Leon J. (1966). A note on the sphericity test. *Ann. Math. Statist.* 37 464-467
- [4] Nagao, H. (1967). Monotonicity of the modified likelihood ratio test for a covariance matrix. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math.* (to appear)
- [5] Pitman, E. J. G. (1939). Tests of hypotheses concerning location and scale parameters. *Biometrika* 31 200-215

- [6] Ramachandran, K.V. (1958). A test of variances.
J. Amer. Statist. Assoc. 53 741-747
- [7] Sugiura, N. Asymptotic expansions and limiting
distribution of tests for covariances.
- [8] Sugiura, N. and Nagao, H. Unbiasedness of
some test criteria for the equality
of one or two covariance matrices.
(submitted to Ann. Math. Statist.)