

レイノルズ応力クロージャー・モデル の統計理論的構成

東大 生研 吉澤 徹

管内流等の非一様乱流において、平均流に対する $N-S$ 方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{v}^\alpha}{\partial t} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \bar{v}^\alpha \\ &= - \frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\beta} + \frac{\partial R^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\end{aligned}\tag{1}$$

で与えられる。ここで、 $\bar{v}$ 、 P は平均流速、平均圧力であり、レイノルズ応力 $R^{\alpha\beta}$ は擾乱流速 u を用いて

$$R^{\alpha\beta} = - \langle u^\alpha u^\beta \rangle\tag{2}$$

と書ける。よく知られてゐるように、(1) は $R^{\alpha\beta}$ を含み閉じた系となっていないので、 $R^{\alpha\beta}$ に対する輸送方程式を考える。それは

$$\frac{\partial R^{\alpha\beta}}{\partial t} = - (R^{\alpha\gamma} \frac{\partial \bar{v}^\alpha}{\partial x^\gamma} + R^{\alpha\gamma} \frac{\partial \bar{v}^\beta}{\partial x^\gamma}) + 2\nu \langle \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\gamma} \rangle - \langle p' (\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}) \rangle$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^r} (\langle u^\alpha u^\beta u^r \rangle + \delta^{\alpha r} \langle p' u^\beta \rangle + \delta^{\beta r} \langle p' u^\alpha \rangle + \nu \frac{\partial R^{\alpha\beta}}{\partial x^r}) . \quad (3)$$

上式に於いて、 p' は擾乱圧力、右辺の各項は順に生産項、散逸項、再分配項、輸送項とよばれている。(3)もまた右辺に高次の速度相関を含み閉じていない。このため実際には種々の現象論的モデル化が行なわれており、本論文では統計論的モデルを提出する。

著者は最近、非一様乱流に於ける一般理論を提出した(J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979); 47 (1979) 1665; 49 (1980) 1995)。それによると

$$R^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} \rho \delta^{\alpha\beta} + \nu_e e^{\alpha\beta} ; \quad e^{\alpha\beta} = \frac{\partial \overline{u^\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \overline{u^\beta}}{\partial x^\alpha}, \quad (4)$$

$$\langle p' (\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}) \rangle = \zeta e^{\alpha\beta}, \quad (5)$$

$$\langle u^\alpha u^\beta u^r \rangle = \langle p' u^\alpha \rangle = 0, \quad (6)$$

$$\rho = 0.66 (Re)^{\frac{2}{3}}, \quad (7)$$

$$\nu_e = 0.053 Re^{\frac{4}{3}} \epsilon^{\frac{1}{3}}, \quad (8)$$

$$\zeta = 0.13 (Re)^{\frac{2}{3}}. \quad (9)$$

ここで、 ϵ はエネルギー散逸、 Re は乱流の特性長さである。

(7), (8), (9)を見ると、レイノルズ応力等は平均流速 $\bar{u}$ と Re ,

$\epsilon, \rho, \nu_e, \xi$ の中、適当な 2 つによって書けることがわかる。そこで、 $\vec{\sigma}$ の他に、 ρ と ν_e は本質的に同等な

$$\chi = \frac{1}{2} (\nu_e e^{i\phi})^2$$

を用いる。この結果、 $\vec{\sigma}, \rho, \chi$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\sigma}^\alpha}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\rho + \frac{2}{3} \rho \right) + \nu \frac{\partial^2 \vec{\sigma}^\alpha}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha} \\ & + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\left(\frac{\chi}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \vec{\sigma}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \vec{\sigma}^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\xi \chi)^{\frac{1}{2}} - 0.12 \left(\frac{\xi}{\chi} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0.74 (\xi \chi)^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi \chi}{\xi}. \quad (12)$$

上式に於いて

$$\xi = \frac{1}{2} (e^{i\phi})^2, \quad \eta = e^{i\phi} e^{i\phi} e^{i\phi}.$$

(10) - (12) は $\vec{\sigma}, \rho, \chi$ に関して閉じた方程式系をつくり、いわゆる 2-方程式モデルの一つである。

なお詳細は *J. Phys. Soc. Jpn.* 50 (1981) No. 5 を参照されたい。