

MACSYMA の活用例

— 5 段 Runge-Kutta 型の 5 次の極限公式の分類等 —

電総研

戸田英雄

都立農芸高校 小野令美

1. Kutta 型 5 段公式

常微分方程式の初期値問題

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

の数値解法で Kutta 型^{*)}の 5 段公式を

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^5 \mu_i k_i \quad (2)$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_i = h f(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 2(1)5$$

と表わす, ここで

$$h = x_{n+1} - x_n, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad i = 2(1)5$$

とする. この公式の係数 $\mu_i, \beta_{ij}, \alpha_i$ を, (2) の Taylor 展開が解の関数の Taylor 展開と, h についてなるべく高次の項まで, その係数が一致するように決める. $O(h^5)$ の 8 個の項の係数の差を δ_{5j} $j = 1(1)8$ とおくと, つぎのように表わされる:

$$\begin{aligned}
\delta_{51} &= 1/24 \{ \sum_{i=2}^5 \mu_i \alpha_i^4 - 1/5 \} \\
\delta_{52} &= 1/2 \{ \sum_{i=3}^5 \mu_i \alpha_i^2 X_{i1} - 1/10 \} \\
\delta_{53} &= 1/2 \{ \sum_{i=3}^5 \mu_i \alpha_i X_{i2} - 1/15 \} \\
\delta_{54} &= 1/2 \{ \mu_4 \beta_{43} X_{32} + \mu_5 \sum_{i=3}^4 \beta_{5i} X_{i2} - 1/60 \} \\
\delta_{55} &= 1/2 \{ \sum_{i=3}^5 \mu_i X_{i1}^2 - 1/20 \} \\
\delta_{56} &= \mu_4 \beta_{43} (\alpha_3 + \alpha_4) X_{31} + \mu_5 \sum_{i=3}^4 \beta_{5i} (\alpha_i + \alpha_5) X_{i1} - 7/120 \\
\delta_{57} &= 1/6 \{ \sum_{i=3}^5 \mu_i X_{i3} - 1/20 \} \\
\delta_{58} &= \mu_5 \beta_{54} \beta_{43} X_{31} - 1/120
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで $X_{il} = \sum_{j=2}^{i-1} \beta_{ij} \alpha_j^l$, $l=1(1)3$, $i=1(1)5$ である。5段5次の公式とするためには

$$\left| \begin{aligned} \delta_{1j} &= 0, \quad \delta_{2j} = 0, \quad \delta_{3j} = 0 \quad (j=1, 2) \\ \delta_{4j} &= 0 \quad (j=1(1)4) \end{aligned} \right. \tag{4}$$

$$\delta_{5j} = 0 \quad (j=1(1)8) \tag{5}$$

をみたすように $\mu_i, \beta_{ij}, \alpha_i$ を決めなければならぬ。 $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$), $0 < \alpha_i \leq 1$ で (4) と (5) を満足する解を求めることは⁶⁾ できることはよく知られている。そこで (4) と (5) の中から $\delta_{51} = \delta_{52} = \delta_{53} = 0$ を選⁶⁾び、 $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ をパラメータとして μ_i と β_{ij} を解き、これと δ_{54} と δ_{57} に代入すると両方とも $1 - \alpha_5$ という因数をもつので⁵⁾ $\alpha_5 = 1$ と決めれば $\delta_{54} = \delta_{57} = 0$ にできる。^{2), 3)} (田中が数値的探索で $\alpha_5 = 1$ とした根拠を与える。) $\alpha_5 = 1$ として、分母に含まれる因数はすべて 0 であるとして、

μ_i, β_{ij} は $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ を用いて下記の通りに表わされる⁵⁾.

$$\mu_1 = \frac{p_5}{60\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \quad \mu_2 = \frac{f_{34}}{60\alpha_2(1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)},$$

$$\mu_3 = -\frac{f_{24}}{60\alpha_3(1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)}, \quad \mu_4 = \frac{f_{23}}{60\alpha_4(1-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2)},$$

$$\mu_5 = -\frac{p_5}{60(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)},$$

$$\beta_{31} = \frac{\alpha_3\{(5\alpha_3+20\alpha_2^2-15\alpha_2)\alpha_4-3\alpha_3-10\alpha_2^2+9\alpha_2\}}{2\alpha_2f_{24}}, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(3-5\alpha_4)}{2\alpha_2f_{24}},$$

$$\beta_{41} = \frac{\alpha_4\{(2-5\alpha_2)\alpha_4^2+(5\alpha_3^2+5\alpha_2\alpha_3-5\alpha_3+5\alpha_2^2-2\alpha_2)\alpha_4+20\alpha_2^2\alpha_3^2-15\alpha_2^2\alpha_3-15\alpha_2\alpha_3^2+11\alpha_2\alpha_3\}}{2\alpha_2\alpha_3f_{23}},$$

$$\beta_{42} = \frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(-5\alpha_3^2+5\alpha_3-3\alpha_2+5\alpha_2\alpha_4-2\alpha_4)}{2\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)f_{23}}, \quad \beta_{43} = \frac{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(2-5\alpha_2)}{2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)f_{23}},$$

$$\beta_{51} = \frac{\left[\alpha_4^2\{(60\alpha_2^2-60\alpha_2+20)\alpha_3^2+(-60\alpha_2^2+75\alpha_2-25)\alpha_3+20\alpha_2^2-30\alpha_2+10\} \right. \\ \left. + \alpha_4\{(-60\alpha_2^2+75\alpha_2-25)\alpha_3^2+(75\alpha_2^2-105\alpha_2+36)\alpha_3-25\alpha_2^2+39\alpha_2-14\} \right. \\ \left. + (20\alpha_2^2-30\alpha_2+10)\alpha_3^2+(-30\alpha_2^2+46\alpha_2-16)\alpha_3+10\alpha_2^2-16\alpha_2+6 \right]}{2\alpha_2\alpha_3\alpha_4p_5},$$

$$\beta_{52} = \frac{\left[-(1-\alpha_2)\{\alpha_4^2(20\alpha_3^2-25\alpha_3-5\alpha_2+10)+\alpha_4(-25\alpha_3^2-5\alpha_3\alpha_2+36\alpha_3+5\alpha_2^2+3\alpha_2-14) \right. \\ \left. - 5\alpha_3^2\alpha_2+10\alpha_3^2+10\alpha_3\alpha_2-16\alpha_3-3\alpha_2^2-2\alpha_2+6 \} \right]}{2\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)p_5},$$

$$\beta_{53} = \frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\{\alpha_4^2(-20\alpha_2+10)+\alpha_2(25\alpha_2-14)+5\alpha_2\alpha_3-2\alpha_3-10\alpha_2+6\}}{2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)p_5},$$

$$\beta_{54} = -\frac{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(1-\alpha_4)f_{23}}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)p_5} \quad (6)$$

∴ ∴ ∴ ,

$$p_5 \equiv 30 d_2 d_3 d_4 - 20 (d_2 d_3 + d_3 d_4 + d_4 d_2) + 15 (d_2 + d_3 + d_4) - 12,$$

$$f_{mn} \equiv 10 \alpha_m \alpha_n - 5 (\alpha_m + \alpha_n) + 3, \quad m \neq n; m, n = 2, 3, 4$$

7) ある. (6) を数式処理システム MACSYMA で検算したもの
の一部を下に示す.

```
(c72) m1;
time= 1 msec.
(d72)

$$\frac{((30 a2 - 10) a3 - 10 a2 + 5) a4 + (5 - 10 a2) a3 + 5 a2 - 3}{60 a2 a3 a4}$$


(c73) m2;
time= 1 msec.
(d73)

$$\frac{10 a3 a4 - 5 a4 - 5 a3 + 3}{60 a2 (1 - a2) (a3 - a2) (a4 - a2)}$$


(c74) m3;
time= 3 msec.
(d74)

$$\frac{10 a2 a4 - 5 a4 - 5 a2 + 3}{60 a3 (a3 - a2) (1 - a3) (a4 - a3)}$$


(c75) m4;
time= 1 msec.
(d75)

$$\frac{10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3}{60 a4 (a4 - a2) (a4 - a3) (1 - a4)}$$


(c76) m5;
time= 1 msec.
(d76)

$$\frac{-20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12}{60 (1 - a2) (1 - a3) (1 - a4)}$$


(c77) b31;
time= 1 msec.
(d77)

$$\frac{(5 a3^2 + (20 a2^2 - 15 a2) a3) a4 - 3 a3^2 + (9 a2 - 10 a2^2) a3}{(20 a2^2 - 10 a2) a4 - 10 a2^2 + 6 a2}$$


(c78) b32;
time= 2 msec.
(d78)

$$\frac{a3 (a3 - a2) (3 - 5 a4)}{2 a2 (10 a2 a4 - 5 a4 - 5 a2 + 3)}$$


(c79) b41;
time= 2 msec.
(d79)

$$\frac{((5 a2 - 2) a4^3 + (-5 a3^2 + (5 - 5 a2) a3 - 5 a2^2 + 2 a2) a4^2 + ((15 a2 - 20 a2^2) a3^2 + (15 a2^2 - 11 a2) a3) a4) / ((20 a2^2 - 10 a2) a3^2 + (6 a2 - 10 a2^2) a3)}{a4 (a4 - a2) (5 a2 a4 - 2 a4 - 5 a3^2 + 5 a3 - 3 a2)}$$


(c24) b42;
time= 2 msec.
(d24)

$$\frac{a4 (a4 - a2) (5 a2 a4 - 2 a4 - 5 a3^2 + 5 a3 - 3 a2)}{2 a2 (a3 - a2) (10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3)}$$


(c25) b43;
time= 3 msec.
(d25)

$$\frac{(2 - 5 a2) a4 (a4 - a2) (a4 - a3)}{2 a3 (a3 - a2) (10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3)}$$


(c26) b52;
time= 3 msec.
(d26)

$$\frac{((1 - a2) ((20 a3^2 - 25 a3 - 5 a2 + 10) a4^2 + (-25 a3^2 - 5 a2 a3 + 36 a3 + 5 a2^2 + 3 a2 - 14) a4 - 5 a2 a3^2 + 10 a3^2 + 10 a2 a3 - 16 a3 - 3 a2^2 - 2 a2 + 6))}{(2 a2 (a3 - a2) (a4 - a2) (-20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12))}$$


(c27) b53;
time= 3 msec.
(d27)

$$\frac{(1 - a2) (1 - a3) ((10 - 20 a2) a4^2 + (25 a2 - 14) a4 + 5 a2 a3 - 2 a3 - 10 a2 + 6)}{2 a3 (a3 - a2) (a4 - a3) (-20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12)}$$


(c28) b54;
time= 3 msec.
(d28)

$$\frac{(1 - a2) (1 - a3) (10 a2 a3 - 5 a3 - 5 a2 + 3) (1 - a4)}{a4 (a4 - a2) (a4 - a3) (-20 (a3 a4 + a2 a4 + a2 a3) + 15 (a4 + a3 + a2) + 30 a2 a3 a4 - 12)}$$

```

2. Kutta 型 5 段 5 次の極限公式

$O(h^5)$ の誤差項で 0 とならずに残る $\delta_{55}, \delta_{56}, \delta_{58}$ に (6)

の μ_i, β_{ij} と代入して整理すると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{55} = \frac{-\alpha_2^2(10d_2d_4 - 5(d_3+d_4)+3)(70d_2d_3d_4 - 30(d_2d_3+d_3d_4+d_4d_2) + 15(d_2+d_3+d_4)-9)}{96 f_{24} p_5} \\ \delta_{56} = -\delta_{58} = \frac{\alpha_2(1-d_2)}{48(10d_2d_4 - 5(d_2+d_4)+3)} \end{array} \right. \quad (7)$$

となる, ここで $p_5 = 30d_2d_3d_4 - 20(d_2d_3+d_3d_4+d_4d_2) + 15(d_2+d_3+d_4) - 12$ である.

これは MACSYMA で求めた結果であり, それを下に示す, 5)

すなわち $\delta_{55} = \frac{1}{2} \Delta_{55}, \delta_{56} = \Delta_{56}, \delta_{58} = \Delta_{58}$ である.

```
(c5) ratsimp(m3*(a2*b32)**2+m4*x**2+m5*y**2-1/20);
time= 25791 msec.
(d5) - (((700 a2^3 - 300 a2^2) a3^2 + (300 a2^2 - 650 a2^3) a3 + 150 a2^3 - 75 a2^2) a4^2
+ ((300 a2^2 - 650 a2^3) a3^2 + (660 a2^3 - 330 a2^2) a3 - 165 a2^3 + 90 a2^2) a4 + (150 a2^3 - 75 a2^2) a3^2
+ (90 a2^2 - 165 a2^3) a3 + 45 a2^3 - 27 a2^2)
/(((144000 a2^3 - 240000 a2^2 + 132000 a2 - 24000) a3^2 + (-168000 a2^3 + 295200 a2^2 - 170400 a2 + 32400) a3 + 48000 a2^3
- 88800 a2^2 + 54000 a2 - 10800) a4^2 + ((-168000 a2^3 + 295200 a2^2 - 170400 a2 + 32400) a3^2
+ (204000 a2^3 - 374400 a2^2 + 225360 a2 - 44640) a3 - 60000 a2^3 + 115200 a2^2 - 72720 a2 + 15120) a4
+ (48000 a2^3 - 88800 a2^2 + 54000 a2 - 10800) a3 + (-60000 a2^3 + 115200 a2^2 - 72720 a2 + 15120) a3 + 18000 a2^3
- 36000 a2^2 + 23760 a2 - 5184)
(c6) factor(%);
time= 3571 msec.
(d6) - (a2^2 ((10 a3 - 5) a4 - 5 a3 + 3) ((70 a2 - 30) a3 - 30 a2 + 15) a4 + (15 - 30 a2) a3 + 15 a2 - 9))
/((3 a2^2 ((10 a2 - 5) a3 - 5 a2 + 3) ((10 a2 - 5) a4 - 5 a2 + 3) ((30 a2 - 20) a3 - 20 a2 + 15) a4 + (15 - 20 a2) a3
+ 15 a2 - 12))
(c11) h56:=factor(%);
time= 1186 msec.
(d11)

$$\Delta_{56} = \frac{a2(a4-1)}{32((10a2-5)a4-5a2+3)}$$

(c12) ratsimp(m5*a2*b32*b43*b54-1/120);
time= 6902 msec.
(d12)

$$\Delta_{58} = \frac{a2a4-a2}{(480a2-240)a4-240a2+144}$$

(c13) factor(%);
time= 235 msec. so far
```

そこで，5次の公式とするためには $\delta_{55} = \delta_{56} = \delta_{58} = 0$ としなくてはならないので，つぎの三通りの場合が考えられる：

$$A) \quad \alpha_2 = 0,$$

$$B-1) \quad \alpha_4 = 1 \text{ かつ } 10\alpha_3\alpha_4 - 5(\alpha_3 + \alpha_4) + 3 = 0,$$

$$B-2) \quad \alpha_4 = 1 \text{ かつ } 70\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 30(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 15(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - 9 \equiv q_{70} = 0$$

しかし (6) の示すように， μ_1, μ_2 および β_{i1}, β_{i2} ($i=3, 4, 5$) は因数 $\frac{1}{\alpha_2}$ を持ち，また μ_4, μ_5 は因数 $\frac{1}{1-\alpha_4}$ を持つので，このままでは A) または B-1), B-2) を満足する公式は実現できない。実際田中²⁾の5次のオーダの誤差項を小さくしようとして $\alpha_4 \rightarrow 1$ にすると，公式の μ_4 と μ_5 が非常に大きくなった理由は (6) より明らかである。また μ_i や β_{ij} はいずれも $\frac{1}{\alpha_2}$ や $\frac{1}{1-\alpha_4}$ の程度なので数式的に処理し極限の場合（これを極限の公式と呼ぶ）を考察すれば，5次の誤差項を消滅させることはできることがわかる。しかし公式には $f_x(x, y)$ や $f_y(x, y)$ が含まれる。

3. 結論

○(R⁵) の誤差項を小さくするため $\alpha_4 \rightarrow 1_0$ にすると公式に含まれる μ_4 と μ_5 の絶対値が非常に大きくなるという田中²⁾の結果に着目し，その極限の場合（これを極限公式⁵⁾と呼ぶ）を考察して $\delta_{5j} = 0$ にし，MACSYMA も活用することに

より，5段5次の極限公式には二つの型が存在することがわかった．これらをA型公式群，B型公式群（これはさらにB-1型とB-2型に細分される）とすると，A型公式群には自由なパラメータ α_3 と α_4 が含まれ，B型公式群には自由なパラメータ α_2 が含まれること，および^{2), 3)} 中の公式はB-2型に属することとわかった．

MACSYMA (project MAC's SYmbolic MANipulator の略) は，Engleman C., Martin W., Moses J. 氏等により1968年に企画され Automatic Programming Group (Math. Lab. MIT)において今日まで研究が進められている．MACLISPを記述言語として作成され，DEC社のPDP-10 TSSの上に構成されている．Version 248のものでプログラムコードが約160 K語といわれる．

MACSYMAはどの機能面でも既存の数式処理システムに比べると格段に充実し，会話型言語として利用できるのも，人間の知恵を活用しやすい．この研究で利用したのはMACSYMAの機能からいえばほんの一部（すなわち，多変数の有理式の因数分解を含む式の簡単化）で，これだけでもこの種の研究に十分役立つと思われる．

コンピュータによる数式処理で一番問題となるのは，数式の結果の表現がすぐ膨大になり，メモリのある種の領域がオーバーフローしてしまうことである．MACSYMAでは，"Fatal

error. Process has terminated, Unable to perform critical I/O"

というエラーメッセージを出して MACSYMA の外に出てしまう。もちろん後で引用する式の結果は、一時的にディスク・ファイルに格納しておき必要なときロードするようにしても、なおオーバーフローするやうな長い式が出てくる。この研究で扱った $m=5$ の Runge-Kutta 系公式の処理が、普通のやり方で MACSYMA を利用してうまくいくギリギリの大きさの問題であったかと思われる。

4. 付録

Δ_{55} の因数分解 (p.5 の (c6)) はうまくいったが Δ_{58} では因数分解ができなかった。そこで MACSYMA の処理能力をテストするために、いくつかの問題を解かせた。これらのうち

- 1) この研究での多変数の因数分解
- 2) 自然数の素因数分解
- 3) 定積分

の結果の一部を以下に示す。

1) (3) 式の δ_{56} をそのまま入力すると

```
(c55) ratsimp(m4*a2*(a3+a4)*b32*b43+m5*(a2*b32*b53*(a3+1)+(a4+1)*b54*x)-7/120)*
time= 4372 msec.
```

```
(d55) -----
((100 a2 - 50) a3 - 65 a2 + 30) a42 + ((55 a2 - 20) a3 - 25 a2 + 12) a4 + (30 - 55 a2) a3 + 30 a2 - 18
-----
(2400 a2 - 1200) a42 + ((1200 - 2400 a2) a3 - 1200 a2 + 720) a4 + (1200 a2 - 720) a3
```

```
(c56) factor(%);
time= 1094 msec.
```

```
(d56) -----
((100 a2 - 50) a3 - 65 a2 + 30) a42 + ((55 a2 - 20) a3 - 25 a2 + 12) a4 + (30 - 55 a2) a3 + 30 a2 - 18
-----
5 3 2 (a4 - a3) ((10 a2 - 5) a4 - 5 a2 + 3)
```

となり間違った結果を与えている。そこで 4 次の条件式を用いて変形した式を下記 ((c54)) のように入力したら正しい結果が得られた。

```
(c54) ratsimp((a3+a4)/24-7/120*(1-a4)*(1/24-m4*a2*b32*b43)+m5*(a4-a3)*x*b54)*
time= 1309 msec.
```

```
(d54) -----
a2 a4 - a2
-----
(480 a2 - 240) a4 - 240 a2 + 144
```

```
(c55) ratsimp(factor(%));
time= 210 msec.
```

```
(d55) -----
a2 (a4 - 1)
-----
3 2 ((10 a2 - 5) a4 - 5 a2 + 3)
```

2) 自然数の素因数分解

```
(c9) 2**(2**n)+1;
time= 15 msec.
```

```
(d9) 
$$2^{\frac{n}{2} + 1} \quad (\text{Fermat の予想})$$

(c10) for :i1 thru 5 do (display(factor(ev(d9,n=i))));
```

```
(e10) factor(5) = 5  $(n=1)$ 
(e11) factor(17) = 17  $(n=2)$ 
(e12) factor(257) = 257  $(n=3)$ 
(e13) factor(65537) = 65537  $(n=4)$ 
```

```
lisp: car or cdr of number n=5 のときエラヒネ3!
time= 987 msec. so far
```

```
(c13) factor(4294967297);  $2^{32} + 1 = 2^2 + 1 = 4294967297$ 
lisp: car or cdr of number (Euler 18世紀)
time= 536 msec. so far
```

```
(c14) for :i2 thru 50 do (display(factor(ev(n,i))));
```

```
(e14) factor(2) = 2
```

```
(e15) factor(3) = 3
```

```
(e16)  $2^2$ 
factor(4) = 2
```

```
(e17) factor(5) = 5
```

```
lisp: car or cdr of number (6が素因数分解されなかった)
time= 387 msec. so far
```

```
(c17) factor(6);
```

```
lisp: car or cdr of number
time= 69 msec. so far
```

3) 定積分の問題

i) 正しく処理された例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{5}{12})}{\Gamma(\frac{11}{12})}$$

```
(c46) 1/(cos(x))*^(1/6);
time= 48 msec.
```

```
(d46) -----
1
-----
1/6
cos(x)
```

```
(c47) integrate(%,x,0,%pi/2);
time= 602 msec.
```

```
(d47) -----
5
sqrt(%pi)-gamma(-----)
12
```

```
(d47) -----
11
2 gamma(-----)
.12
```

```
(c48) ev(%,numer);
time= 55 msec.
```

```
(d48) -----
1.7862762
```

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{2k} \log \frac{1+k}{1-k}, \quad |k| < 1, \quad k = \frac{1}{2} \text{ and } \log 3$$

```
(c20) sin(x)/sqrt(1-k**k*(sin(x)**2));
time= 104 msec.
```

```
(d20)
```

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}}$$

```
(c21) integrate(%,x,0,%pi/2);
is k zero or nonzero?
```

```
is (k - 1) (k + 1) positive, negative, or zero?
```

```
negative
```

```
time= 16896 msec.
```

$$\frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}} + k$$

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}$$

$$\log\left(\frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}}\right)$$

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}$$

```
(d21)
```

$$k$$

```
(c22) rats:mp(%)
```

```
time= 2605 msec.
```

$$\log\left(\frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)} + k \sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}}\right)$$

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2(x)}$$

```
(d22)
```

$$k$$

```
(c23) ev(%,k=1/2);
```

```
time= 630 msec.
```

```
(d23)
```

$$\log(3)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(\sin x) dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2$$

$$\log(\sin(x))$$

```
sqrt(sin(x))
```

!p!

2

$$\log(s:n(x))$$
$$\sqrt[n]{\sin(x)}$$
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{x} dx$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{-ax}{\sin(x)}$$

```
pos:
time= 4815 msec.
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} \sin(x) dx$$

iii) 間違った結果と与えた例

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log 2$$

```
(c13) asin(x)/x;  
time= 31 msec.
```

```
asin(x)
```

```
(d13)
```

```
x
```

```
(c14) integrate(%x,0,1);
```

```
time= 1240 msec.
```

```
(d14)
```

```
0
```

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

```
(c5) x/(exp(x)-1);
```

```
time= 32 msec.
```

```
(d5)
```

```
x
```

```
x
```

```
%e - 1
```

```
(c6) integrate(%x,0,inf);
```

```
integral is divergent
```

```
time= 698 msec. so far
```

W) エラーメッセージが出力され処理されなかった例

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^3)}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} \log 3 - \frac{\pi}{3})$$

```
(c2) log(1+x**3)/(1+x**3);
time= 38 msec.
```

```
(d2)
      3
      log(x + 1)
      -----
      3
      x + 1
```

```
(c3) integrate(%x,0,inf);
```

```
markedpl storage capacity exceeded
2637 msec. so far
```

$$\int_0^{\infty} \log \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

```
(c9) log((exp(x)+1)/(exp(x)-1));
time= 42 msec.
```

```
(d9)
      x
      %e + 1
      log(-----)
      x
      %e - 1
```

```
(c10) integrate(%x,0,inf);
```

```
lisp: function greaterp rejected argument simpln
time= 356 msec. so far
```

文 献

- 1) 田中正次： 5個の関数値を使用する Runge-Kutta 公式について，情報処理，Vol.7, No.4, pp.181-189 (1966).
- 2) 田中正次： Runge-Kutta 法の打ち切り誤差に関する研究，東京大学に提出した論文 (1972).
- 3) 田中正次： Runge-Kutta 法の打ち切り誤差の評価について，情報処理，Vol.17, No.12, pp.1143-1151 (1976).
- 4) 田中正次： 5段数 Runge-Kutta 法について，情報処理，Vol.20, No.5, pp.382-391 (1979).
- 5) 戸田英雄： Runge-Kutta 系のある極限公式の打ち切り誤差についての研究，電総研研究報告第772号 (1977).
- 6) Butcher, J.C. : On the attainable order of Runge-Kutta methods, Math. Comp., 19, pp.408-417 (1965).
- 7) Bogen, R.A, MACSYMA Reference Manual Version 6, 7, MIT (1974).
- 8) Kutta, W. : Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. Z. Math. Phys. 46, pp.435-453 (1901).