

一対比較行列に対する最悪整合度

静岡大学大学院工学研究科 新名秀樹 (Hideki Niina)
静岡大学 関谷和之* (Kazuyuki Sekitani)
Department of Systems Engineering,
Shizuoka University

1 序論

AHP では、意思決定者は一対比較を選択肢「同じ」「やや良い(悪い)」、「良い(悪い)」、「きわめて良い(悪い)」、「絶対良い(悪い)」から 1 つ選択し、回答する。この回答結果を適当な変換尺度を用いて、数値化する。回答から数値への変換尺度は Saaty が提案するものを含めいくつかある。ある変換尺度の下で一対比較を

表 1: 一対比較値への変換尺度

i は j に対して?	Saaty 法	5 点法	2 点法	θ 法
絶対良い(悪い)	9(1/9)	5(1/5)	2(1/2)	$\theta^4(\theta^{-4})$
かなり良い(悪い)	7(1/7)	4(1/4)	2(1/2)	$\theta^3(\theta^{-3})$
良い(悪い)	5(1/5)	3(1/3)	2(1/2)	$\theta^2(\theta^{-2})$
やや良い(悪い)	3(1/3)	2(1/2)	2(1/2)	$\theta(\theta^{-1})$
同じ	1	1	1	1

数値化したものを一対比較値と呼び、 j に対する i の一対比較値を a_{ij} と記す。「良し悪し」の程度と「同じ」を選択肢から外し、一対比較を「良い」「悪い」の 2 つの選択肢に限定した AHP は Binary AHP(B-AHP) と呼ばれ、「同じ」の選択肢を含めた 3 選択肢による AHP は Ternary AHP(T-AHP) と呼ばれる。

比較する対象を n 個とすると、相異なる一対比較による一対比較値 a_{ij} は全部で $(n-1)n/2$ 個となる。対象 i に対する対象 j の一対比較値 a_{ji} は $1/a_{ij}$ とし、 $a_{ii} = 1$ とし、 a_{ij} を成分 (i, j) の値する n 次正方行列を一対比較行列 $A = [a_{ij}]$ と呼ぶ。

一対比較行列 A に含まれている矛盾の少なさは整合度と呼ばれる。既存の整合度の 1 つとして、Saaty が提案した A の主固有値 $\lambda_{\max}(A)$ による測定がある。複数の変換尺度が存在することは良し悪しの程度を数値表現することの難しさを物語る。また、「良し悪し」の程度を的確に回答することも困難なことがある。そこで、本研究では、良し悪しの判断は不変であるが、一対比較値 a_{ij} が含む良し悪しの程度は変化すると考える。つまり、回答結果で示された「良し悪し」判断の下で「良し悪し」の程度を緩和することを考える。例えば、ある一対比較値の上限 $s > 1$ を与えた下で、 $a_{ij} > 1$ ならば (i, j) の一対比較値は区間 $[1, s]$ にあると考える。一対比較値が区間内に存在することを許した AHP を区間 AHP と呼ぶ。この区間 AHP の整合度最大は回答結果で与えられた「良し悪し」の判断が抱え込む最大矛盾量を示す。本研究では、この最大整合度を最悪整合度と呼ぶ。なお、この最悪整合度は s に依存するが、変換尺度に依存しない。

本研究では T-AHP の一対比較行列が最悪整合度を与えることを示し、さらに、最悪整合度の上下限値を与える。T-AHP 上で 3 対象間の「良し悪し」判断に潜む「数値的破綻」と「構造的破綻」を定義し、この 2 つの破綻と最悪整合度との関係を数値実験により明らかにする。

2 2つの整合度:固有ベクトル法と χ^2 法

Saaty は一対比較行列 A の整合度を A の主固有値 $\lambda_{\max}(A)$ とした. A の逆数対称性 $a_{ij} = 1/a_{ji}$ から $\lambda_{\max}(A)$ は以下の性質を持つことが知られている.

補題 1 一対比較値 a_{ij} の上限値が s である n 次一対比較行列 A の主固有値 $\lambda_{\max}(A)$ は次の上下限を持つ.

$$n \leq \lambda_{\max}(A) \leq \left(\frac{s+1/s}{2} \right) (n-1) + 1. \quad (1)$$

ここで, 下限達成する A はある正ベクトル w が存在して $a_{ij} = w_i/w_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) であり, その時に限る. また, 非対角成分 $a_{ij} \in \{1/s, s\}$ ($i \neq j$) であり, 各行 i に存在する $a_{ij} = s$ の個数と $a_{ij} = 1/s$ の個数がともに $(n-1)/2$ である A は上限を達成し, その時に限る.

補題 1 の下限達成する一対比較行列は整合的と呼び, 補題 1 の上限を与えた B-AHP の一対比較行列は最大非推移的である言う. 最大非推移的な行列は奇数の場合のみ存在する. Perron-Frobenius 定理から, A の主固有値は $\lambda_{\max}(A) = \min_{w>0} \max \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j / w_i \mid i = 1, \dots, n \right\}$ である.

一対比較値 a_{ij} は j を基準としたときの i の「良し悪し」の比率を示す. i と j の良さそれぞれを w_i, w_j とすると, a_{ij} は $a_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}$ とみなすことがある. このとき, Neyman-Pearson の適合度を模した

$$\chi^2(A) \equiv \min_{w>0} \sum_{(i,j) \in I} \frac{(a_{ij} - w_i/w_j)^2}{a_{ij} w_i / w_j} \quad (2)$$

を 1 つの整合度とみなすことがある. 実際, $\chi^2(A)$ は主固有値 $\lambda_{\max}(A)$ と同様な性質が成り立つ.

補題 2 一対比較値 a_{ij} の上限値が s である n 次一対比較行列 A の $\chi^2(A)$ は次の上下限を持つ.

$$0 \leq \chi^2(A) \leq n(n-1) \left(s + \frac{1}{s} - 2 \right) + n. \quad (3)$$

ここで, 下限達成する A は整合的であり, その時に限る. また, 最大非推移的な一対比較行列が上限を達成し, その時に限る.

(2) の左辺を A の逆数対称性に注意して整理すると, $\chi^2(A) = 2 \min_{w>0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j / w_i - 2n^2$ である.

主固有値と χ^2 値いずれも, $a_{ij} w_j / w_i$ に関する最小化である. ここで, a_{ij} の対数変換した値 $\hat{a}_{ij} \equiv \log a_{ij}$ と w_i の対数変換した値 $\hat{w}_i \equiv \log w_i$ を考えると, $e^{\hat{a}_{ij}} e^{\hat{w}_j} / e^{\hat{w}_i}$ は $\hat{a}_{ij}, \hat{w}_i, \hat{w}_j$ に関して対数凸関数である. したがって, $\lambda_{\max}(A)$ と $\chi^2(A)$ を計算することは凸計画問題を解けばよい. さらに, $\hat{A} \equiv [\log a_{ij}]$ とし, n 次正方行列 $[e^{\hat{a}_{ij}}]$ を $e^{\hat{A}}$ と記すと, $e^{\hat{a}_{ij}} e^{\hat{w}_j} / e^{\hat{w}_i}$ の対数凸性から以下の性質が成り立つ.

補題 3 $\lambda_{\max}(e^{\hat{A}})$ と $\chi^2(e^{\hat{A}})$ は $\hat{A}$ に関して対数凸関数である.

補題 3 は複数の変換尺度による一対比較値それぞれを重み付き幾何平均して得た一対比較行列の整合度 $\lambda_{\max}$, χ^2 が各変換尺度で得た一対比較行列の整合度の幾何平均より改悪しないことを意味する. そして, 集団 AHP では複数の一対比較行列 $A^1, \dots, A^L$ の一対比較値 $a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^L$ を幾何平均して得た集団として一対比較行列 $\left[\sqrt[L]{\prod_{l=1}^L a_{ij}^l} \right]$ が, 個々の一対比較行列 A^l ($l = 1, \dots, L$) に対する整合度の幾何平均より改善することが観測されているが, このことを補題 3 は裏付ける.

3 整合度に対する破綻の影響

一対比較値 a_{ij} への変換尺度は複数あるので, ここでは単純化して一対比較値が $\{1/s, 1, s\}$ の 3 値を取る T-AHP の一対比較行列 S を考える. T-AHP の一対比較行列 S をグラフに対応付ける. $s_{ij} = s$ であれば

点 i から点 j へ枝を引き, $s_{ij} = 1$ であれば点 i と点 j の間に双方向の枝を引く. T-AHP の 3 次一対比較行列に対応するグラフは点のラベル付けの違いを無視すると 7 パターンある.

グラフ $G_d, \dots, G_f$ はサイクルを 1 つだけ持つ. グラフ $G_a, \dots, G_c$ はサイクルを持たない. グラフ G_g は 2 つのサイクルを持つ. サイクルを 1 つだけ持つグラフ $G_d, \dots, G_f$ は 3 チーム対抗戦の勝敗結果での三疎みに対応する. そこで, グラフ $G_d, \dots, G_f$ は構造的破綻を持つとする. グラフ G_a では, 枝の向きから 3 つの点に対して自然に順位を決定する. しかし, どの枝に対応する一対比較値も s であるので, 第 1 位の点が第 3 位の点より良い程度は第 1 位の点が第 2 位の点より良い程度, 第 2 位の点が第 3 位の点より良い程度と同じである. この矛盾に注目し, グラフ G_a は数値的破綻を持つとする. 他のグラフ G_b, G_c, G_g はいずれの破綻も持たない.

2 つの T-AHP の一対比較行列 T と T' に対して順列行列 P が存在して $T' = PTP^T$ であれば T と T' は同値と見なす. 図 1 から T-AHP の 3 次の一対比較行列には 7 つの同値類があることがわかる. 同値類の個数を $n = 3, 4, 5, 6$ それぞれで数え上げ, その結果を表 2 に与える. T-AHP の一対比較行列に対応するグラ

表 2: $n = 3, 4, 5, 6$ での同値類の個数

n	3	4	5	6
同値類の個数	7	42	582	21480

フは 7 種類の部分グラフ G_a から G_g からなる. そこで, 同値類毎に T に対応するグラフに含む部分グラフ $G_a, \dots, G_g$ の個数を数え上げ, それらを $x_a, \dots, x_g$ とする. 枝の向きを反転すると, グラフ G_b は G_c であり, G_c は G_b であるので, $x_{bc} \equiv x_b + x_c$ とする. 数値的破綻と構造的破綻が整合度に与える影響を調べるために, $n = 5, 6$ それぞれで整合度を $x_a, x_{bc}, x_d, \dots, x_g$ で回帰分析する. 整合度 $\lambda_{\max}$ の回帰分析では定数項を n と固定し, 整合度 χ^2 の回帰分析では定数項を 0 と固定した. $s = 9$ として, これらの回帰分析の結果を表 3, 表 4 に与える.

$n = 5, s = 9$ の場合, $\lambda_{\max}, \chi^2$ とともに破綻のあるパターン (G_a, G_d, G_e, G_f) の係数は正で, 破綻のないパターン (G_b, G_c, G_g) の係数はすべて負である. 負の係数のパターンの増加は整合度を改善し, 生の係数のパターンの増加は整合度を改悪すると解釈すると, 破綻のあるパターンの増加は整合度改悪を促し, 破綻のないパターンの増加は整合度改悪を促すことを 2 種類の整合度でともに示した. 一方, $n = 6, s = 9$ の場合, $\lambda_{\max}$ の場合, すべてのパターンの係数が正である. χ^2 は破綻のあるパターン (G_a, G_d, G_e, G_f) の係数は正で, 破綻のないパターン (G_b, G_c, G_g) の係数はすべて負である.

係数の値が大きいものほど整合度改悪に寄与すると考えると, 表 3, 表 4 は何らかの破綻を持つパターンの増加は破綻のないパターンのそれより整合度改悪に寄与する傾向があることを意味する. R^2 値が高いことからこの傾向は無理なく受け入れられるものである.

4 整合度の頑健性：最悪整合度

本節では, 与えられた一対比較行列 A の一対比較値はたまたま得られた回答を適当に変換した結果であり, そのため一対比較値は変動可能であるとする. 前節までに, G_g に対応する 3 個の一対比較値は整合度改善に寄与する実験結果を与え, 補題 1, 2 の下限を与えるものであることがわかった. しかし, いかなる場合でも G_g をそのまま受け入れても良いであろうか? 例えば, どちらか一方が優れているという判定を下す自信がないために「同等」として一対比較判定をしてしまうことがある. また, 相反する一対比較判定の幾

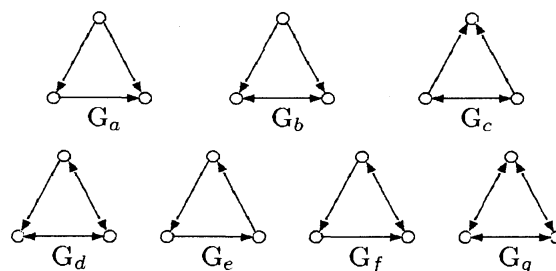


図 1: 3 点間の 7 パターン

表 3: $n = 5$ での整合度に対する回帰分析

	x_a	x_{bc}	x_d	x_e	x_f	x_g	R^2
$\lambda_{\max}$							
$s = 2$	0.020	0.000	0.020	0.188	0.080	0.000	1.000
$s = 5$	0.122	0.003	0.119	1.333	0.505	0.000	0.998
$s = 9$	0.264	-0.004	0.252	3.133	1.095	-0.009	0.995
$s = 16$	0.493	-0.035	0.470	6.493	2.095	-0.045	0.991
χ^2							
$s = 2$	0.196	-0.002	0.194	1.837	0.797	0.000	1.000
$s = 5$	1.157	-0.095	1.093	12.440	4.981	-0.022	0.999
$s = 9$	2.359	-0.392	2.143	28.674	10.766	-0.113	0.998
$s = 16$	4.180	-1.168	3.628	58.597	20.545	-0.380	0.997

表 4: $n = 6$ での整合度に対する回帰分析

	x_a	x_{bc}	x_d	x_e	x_f	x_g	R^2
$\lambda_{\max}$							
$s = 2$	0.014	0.000	0.014	0.130	0.055	0.000	1.000
$s = 5$	0.091	0.008	0.085	0.922	0.347	0.006	0.998
$s = 9$	0.200	0.017	0.185	2.168	0.756	0.010	0.996
$s = 16$	0.381	0.024	0.354	4.498	1.467	-0.003	0.993
χ^2							
$s = 2$	0.165	-0.002	0.162	1.531	0.665	0.000	1.000
$s = 5$	1.004	-0.082	0.930	10.427	4.198	-0.037	0.999
$s = 9$	2.084	-0.352	1.853	24.185	9.202	-0.192	0.998
$s = 16$	3.739	-1.090	3.203	49.787	17.910	-0.669	0.997

何平均を取ると「同等」となる。このような「同等」の判断は一方が優れているという判定も許容するであろう。そこで、この「同等」の可変性を認めたならば、整合度が最悪どれだけ改悪されるかを変換尺度の任意性を考慮して本節では考察する。つまり、与えられた一対比較値の変動を許した時の整合度の頑健性に関する感度分析を議論する。

$I \equiv \{(i, j) | i, j = 1, \dots, n\}$ とする。回答結果である一対比較行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、 $I^+(A) \equiv \{(i, j) | a_{ij} > 1\}$, $I^-(A) \equiv \{(i, j) | a_{ij} < 1\}$, $I^0(A) \equiv \{(i, j) | a_{ij} = 1\}$ とし、所与の $s > 1$ とする。 A に対する最悪整合度を以下の最大値として定義する。

$$\max \quad \text{一対比較行列 } S \text{ の整合度} \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad s_{ij}s_{ji} = 1 \quad \forall (i, j) \in I \quad (5)$$

$$1 \leq s_{ij} \leq s \quad \forall (i, j) \in I^+(A) \quad (6)$$

$$1/s \leq s_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in I^-(A) \quad (7)$$

$$1/s \leq s_{ij} \leq s \quad \forall (i, j) \in I^0(A) \quad (8)$$

$(i, j) \in I^+(A)$ は $(j, i) \in I^-(A)$ であり、その逆も成立する。したがって、式(7)は削除して最悪整合度を考えてよい。(5) から $S = [s_{ij}]$ は逆数対称行列である。(6) は回答結果で i が j より良ければ $s_{ij} \in [1, s]$ は i が j と同等以上であることを与える。一方、(8) は回答結果で i と j が同等であれば、回答者が同等を積極的に判断したのでなく、良し悪しの判断を避けたと考え、同等の結果をそのまま受け入れない。つまり、回答結果で i と j が同等であれば、 $1/s \leq s_{ij} \leq s$ とし、 i と j との良し悪しはどちらでも変化することを許す。一対比較行列 A に対する最悪整合度問題 (4)-(8) の最適解の行列 $S = [s_{ij}]$ を変換元 A に対する変換先とする。

対数変換 $t_{ij} = \log s_{ij}$ により, 整合度 $\lambda_{\max}(S)$ による最悪整合度問題 (4)–(8) を書き換える.

$$\max \quad \lambda_{\max}(e^T) \quad (9)$$

$$\text{s.t.} \quad t_{ij} + t_{ji} = 0 \quad \forall (i, j) \in I \quad (10)$$

$$0 \leq t_{ij} \leq \log s \quad \forall (i, j) \in I^+(A) \quad (11)$$

$$-\log s \leq t_{ij} \leq \log s \quad \forall (i, j) \in I^0(A). \quad (12)$$

補題 3 から, $\lambda_{\max}$ による最悪整合度問題の最適解は T-AHP の一対比較行列であることがわかる.

補題 4 最悪整合度問題 (9)–(12) の最適解 T^* が存在し, $t_{ij}^* \in \{-\log s, 0, \log s\} (\forall (i, j) \in I)$ を満たす. つまり, 一対比較値 $s_{ij} \in \{1/s, 1, s\}$ からなる一対比較行列 $S = [s_{ij}]$ が存在し, 最悪整合度問題 (4)–(8) の最適解を与える.

同様に, 整合度 $\chi^2(S)$ による最悪整合度問題 (2), (5)–(8) に対してもまた以下が成立する

補題 5 T-AHP の一対比較行列が整合度 $\chi^2(S)$ による最悪整合度問題 (2), (5)–(8) の最適解を与える.

補題 4, 5 から最悪整合度は T-AHP で考えれば十分である. 任意の一対比較行列 A に対してある T-AHP の一対比較行列 S が存在して, $I^+(A) = I^+(S)$ かつ $I^0(A) = I^0(S)$ である. 一対比較行列 A に対する固有値による最悪整合度を $\Lambda(A)$, χ^2 値による最悪整合度を $\Xi(A)$ とすると, 任意の T-AHP の一対比較行列 S に対する $\Lambda(S)$ と $\Xi^2(S)$ が既知であれば, 補題 4, 5 から任意の一対比較行列 A の最悪整合度が簡単に計算できる. さらに, T-AHP の一対比較行列 S に対して, $I^+(S) \cap I^-(S') = \emptyset$ を満たす T-AHP の一対比較行列 S' は S を変換元とした最悪整合度問題 (4)–(8) の実行可能解である. 変換元を S とした最悪整合度問題 (4)–(8) で実行可能な T-AHP の一対比較行列の整合度の最大値が S の最悪整合度である. したがって, 任意の T-AHP の一対比較行列 S の整合度が既知ならば, 最悪整合度 $\Lambda(S)$ と $\Xi^2(S)$ は簡単に求められる. つまり, 任意の T-AHP の一対比較行列 S の整合度が既知ならば, 任意の一対比較行列 A の最悪整合度 $\Lambda(A)$ と $\Xi^2(A)$ は簡単に計算できる. 特に, 最悪整合度最大は簡単に計算できることを以下の補題が示す.

補題 6 最悪整合度の上限は T-AHP の一対比較行列の整合度最大である.

Proof: 任意の最悪整合度での変換先に T-AHP の一対比較行列が存在する. 最悪整合度最大値での変換先の T-AHP の一対比較行列を S^+ とすると, S^+ の整合度より大きい T-AHP の一対比較行列は存在せず, 最悪整合度最大値と S^+ の整合度は一致する. $\square$

この補題から以下の 2 つの性質が導ける.

補題 7 変換元が最大非推移的な一対比較行列であるとき, 変換先は最大非推移的な行列である.

Proof: 最大非推移的な一対比較行列を S^+ とすると変換元 S^+ の最悪整合度問題 (4)–(8) の実行可能解に S^+ が存在し, その整合度は補題 1 と 2 から最大である. したがって, S^+ の最悪整合度は S^+ の整合度であり, S^+ そのものが最適解である. 整合度最大は S^+ に限るので, 変換先も S^+ に限る. $\square$

補題 8 $s_{ij} = 1 (\forall (i, j) \in I)$ である一対比較行列 E に対する最悪整合度は最悪整合度の最大値を達成する. 特に, 次数 n が奇数のとき, 変換元 E に対する変換先は最大非推移的な行列に限る.

Proof: $I = \{(i, j) | i \neq j, i, j = 1, \dots, n\}$ であるから, 一対比較行列 E は $I^-(E) = I^+(E) = \emptyset$, $I^0(E) = I$ である. したがって, 任意の一対比較行列 A に対して

$$I^+(E) \cap I^-(S) = \emptyset \quad (13)$$

を満たす. つまり, 変換元 E の最大化問題 (4)–(8) は任意の一対比較行列 A を実行可能解として持つ. 整合度最大の T-AHP の一対比較行列を S^+ とすると, S^+ は変換元 E の最大化問題 (4)–(8) の実行可能解であり, 変換元 E の最大化問題 (4)–(8) の最大値は S^+ の整合度と一致する. 補題 6 から, 変換元 E の最悪整合度は最悪整合度最大である. また, 次数 n が奇数のときは, 補題 1 と補題 2 より, 変換元 E に対する変換先は最大非推移的な行列に限る. $\square$

最悪整合度最大の探索範囲は T-AHP でなく B-AHP の一対比較行列で良いことを以下の補題は示す.

補題 9 最悪整合度最大は B -AHP の一対比較行列の整合度最大である。

Proof: 最悪整合度最大値での変換先の T-AHP の一対比較行列を S^+ とし、以下の最大化問題を考える。

$$\max \left\{ S \text{ の整合度} \left\{ \begin{array}{ll} s_{ij}s_{ji} = 1 & \forall (i, j) \in I \\ s_{ii} = 1 & \forall i = 1, \dots, n \\ s_{ij} = s_{ij}^+ & \forall (i, j) \in I^+(S^+) \\ s_{ij} = s_{ij}^- & \forall (i, j) \in I^-(S^+) \\ 1/s \leq s_{ij} \leq s & \forall (i, j) \in I^0(S^+) \end{array} \right. \right\} \quad (14)$$

(14) の最適解は一対比較行列であるので、その最大値は最悪整合度最大値に一致する。さらに、整合度の凸性から、最大化問題 (14) の最適解には B -AHP の一対比較行列が存在する。 $\square$

補題 10 最悪整合度の下限値は、 B -AHP の一対比較行列の最悪整合度の最小値に等しい。

Proof: B -AHP の一対比較行列の集合を $\mathcal{B}$, T-AHP の一対比較行列の集合を $\mathcal{T}$ とする。このとき、任意の $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{B}$ に対して、ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して

$$I^+(T) \subseteq I^+(B) \quad (15)$$

$$I^-(T) \subseteq I^-(B) \quad (16)$$

を満たす。つまり、最悪整合度は最大化問題 (4)–(8) の最大値であるから、変換元 B に対する最悪整合度は変換元 T に対する最悪整合度以下である。このことは、 $\mathcal{B}$ 上での最悪整合度最小値 $\min_{B \in \mathcal{B}} (B \text{ に対する最悪整合度})$ が $\mathcal{T}$ 上での最悪整合度最小値 $\min_{T \in \mathcal{T}} (T \text{ に対する最悪整合度})$ である。 $\square$

この補題から、最悪整合度の最小値を探すには、 B -AHP の一対比較行列に対する最悪整合度全てを調べればよい。補題 1, 2 から最悪整合度の上限も明らかである。以上のことから、最悪整合度の存在範囲を定理 11 で示す。

定理 11 非対角成分の一対比較値 $b_{ij} \in \{1/s, s\}$ を持つ B -AHP の一対比較行列 B の集合を $\mathcal{B}$ とする。一対比較値 $a_{ij} \in [1/s, s]$ を持つ任意の一対比較行列 A に対して

$$\min_{B \in \mathcal{B}} \Lambda(B) \leq \Lambda(A) \leq \left(\frac{(s+1/s)}{2} \right) (n-1) + 1 \quad (17)$$

$$\min_{B \in \mathcal{B}} \Xi(B) \leq \Xi(A) \leq n(n-1) \left(s + \frac{1}{s} - 2 \right) + n \quad (18)$$

が成立する。最大非推移的な一対比較行列は(17) と(18) の上限値を達成する。

定理 11 と補題 8 から、全ての一対比較の判断が「同じ」であればその一対比較行列の最悪整合度は最大値を達成し、一方、補題 1, 2 からその一対比較行列の整合度は最小整合度を達成する。つまり、その一対比較行列の整合性は最大変動し、最も不安定である。

5 2つの最悪整合度に関する数値実験

最悪整合度を与える一対比較行列は T-AHP の一対比較行列で考えれば十分である。T-AHP の一対比較行列の集合を $\mathcal{T}$ とする。そこで、最悪整合度を与える一対比較行列の集合を $\mathcal{T}$ に限る。最悪整合度の定義域は一対比較行列の集合 $\mathcal{A}$ であるが、定義域を $\mathcal{T}$ に限定したときの最悪整合度を与える一対比較行列の集合と定義域 $\mathcal{A}$ の最悪整合度を与える一対比較行列の集合は一致する。

Saaty の変換尺度に従い $s = 9$ とし、 $n = 3$ での T-AHP の一対比較行列に対する最悪整合度とそれを達成する T-AHP の一対比較行列の関係を図 2 に与える。図 2 は一対比較行列を図 1 のグラフで示す。図 2 の枝は枝元のグラフに対する最悪整合度は枝先のグラフで達成することを示す。最悪整合度を達成するのは

2つのグラフ G_e , G_f であった. 定理 5 の示す通り, 最悪整合度の下限は G_a から推移した G_f で達成し, その上限は G_e で達成する.

一対比較行列 $A^a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$ は G_a に対応し, その整合度は 3 である. この回答結果が (6)–(8)

の条件内で変化することを許すと, 最悪整合度 $\Lambda(A^a)$ は 5.58 まで増加する. 一方, 一対比較行列 $A^b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ は G_g に対応し, その整合度は 3 であり, 最悪整合度 $\Lambda(A^b)$ は 10.11 まで増加する. つまり,

「良し悪し」の程度が (6)–(8) の条件内で変化すると, A^b の整合性は A^a より不安定である.

次に, n と s を変化させて, 最悪整合度とそれを与える一対比較行列の関係を調べる. そこで, $S \in \mathcal{S}$ に対して $\Lambda(S)$ を与える $\mathcal{T}$ の一対比較行列の集合を $T^\Lambda(S)$ とする. 同様に, $S \in \mathcal{S}$ に対して $\Xi(S)$ を与える $\mathcal{T}$ の一対比較行列の集合を $T^\Xi(S)$ とする. $n = 3, 4, 5, 6$ と $s = 2, 5, 9, 16$ に対して, 最悪整合度の個数 $|\{\Lambda(S)|S \in \mathcal{T}\}|$, $|\{\Xi(S)|S \in \mathcal{T}\}|$ を測定する. 先の述べた $n = 3$, $s = 9$ での最悪整合度 2 個の結果を含むいくつかの (n, s) 毎での最悪整合度の個数を表 5 に示す. n が増加すれば最悪整合度個数は急激に増加す

表 5: $n = 3, \dots, 6$, $s = 2, \dots, 16$ の最悪整合度個数

	$ \{\Lambda(S) S \in \mathcal{T}\} $				$ \{\Xi(S) S \in \mathcal{T}\} $			
	$n = 3$	4	5	6	$n = 3$	4	5	6
$s = 2$	2	3	9	30	2	3	9	31
$s = 5$	2	3	9	30	2	3	9	31
$s = 9$	2	3	9	28	2	3	9	31
$s = 16$	2	3	9	28	2	3	9	31

る. 一方, s の変化に対して最悪整合度個数は $n = 6$ の $\Lambda(S)$ を除き一定である.

表 6 は, 各 (n, s) での最悪整合度を達成する行列 $T^\Lambda(S)$ の総数と $T^\Xi(S)$ の総数を示す. $n = 3$ では 2 つの最悪整合度を達成する行列それぞれは 1 つであったが, $n \geq 4$ ではそうでないことが表 6 からわかる. 固有ベクトル法の $(n, s) = (6, 5)$, $(6, 9)$ では最悪整合度の個数は減少したが, 最悪整合度を与える行列の総数 $|\cup_{S \in \mathcal{T}} T^\Lambda(S)|$ は増加した. 一方, 固有ベクトル法の $(n, s) = (6, 9)$, $(6, 16)$ では最悪整合度の個数一定であるが, 最悪整合度を与える行列の総数 $|\cup_{S \in \mathcal{T}} T^\Lambda(S)|$ は減少した. このことは, 固有ベクトル法の最悪整合度による T-AHP 一対比較行列の変換 $(S, T^\Lambda(S))$ は s に依存することがわかる.

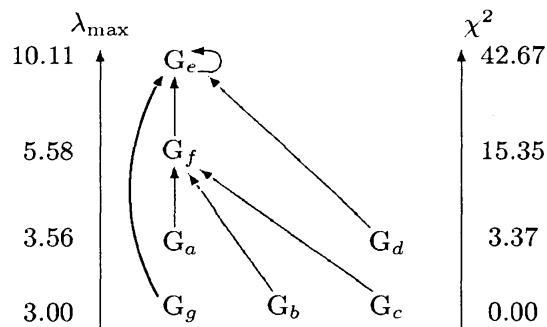


図 2: T-AHP 一対比較行列の最悪整合度による推移

表 6: $n = 3, \dots, 6$, $s = 2, \dots, 16$ の $T^\Lambda(S)$, $T^\Xi(S)$ の総数

	$ \cup_{S \in \mathcal{T}} T^\Lambda(S) $				$ \cup_{S \in \mathcal{T}} T^\Xi(S) $			
	$n = 3$	4	5	6	$n = 3$	4	5	6
$s = 2$	2	9	12	82	2	9	12	74
$s = 5$	2	9	12	82	2	9	12	74
$s = 9$	2	9	12	83	2	9	12	74
$s = 16$	2	9	12	82	2	9	12	74

表 7: $n = 3$ での $s = 2, 5, 9, 16$ における一致

	$(S, T^\Lambda(S))$				$(S, T^\Xi(S))$			
	$s = 2$	5	9	16	$s = 2$	5	9	16
$s = 2$	-	○	○	○	-	○	○	○
5	○	-	○	○	○	-	○	○
9	○	○	-	○	○	○	-	○
16	○	○	○	-	○	○	○	-

表 7, 8, 9, 10, 11 は順に $n = 3, 4, 5, 6$ で 2 つの s と s' 間で最悪整合度による変換が異なる S の個数を示す. ○は異なる個数は 0 であり, 最悪整合度による変換は 2 つの s で一致することを示す.

$n = 3, 4$ では最悪整合度による変換は s 依存しないので一致する. しかし, $n = 5$ の $(s, s') = (9, 16)$ だけで, 最悪整合度による変換は一致し, それ以外では不一致である. $n = 6$ では決して一致することはない. したがって, $n = 5, 6$ では最悪整合度による変換が s に依存するために, s 毎に全ての T-AHP 一対比較行列 S の整合度を計算する必要がある. 固有ベクトル法による最悪整合度の変換 $(S, T^\Lambda(S))$ と最小 χ^2 法による最悪整合度の変換 $(S, T^\Xi(S))$ の違いを表 12 に示す.

表 12 から, $n \leq 4$ では 2 つの方法による最悪整合度の変換の違いはなく, $n = 5$ では, $s = 2$ を除く n で 2 つの方法による最悪整合度の変換は一致する. $n = 6$ ではどの s でも不一致であった. このことから, $n \leq 5$ ではいずれかの方法で T-AHP 一対比較行列 S 全ての最悪整合度の変換を計算しておけばよいであろう.

最後に, 定理 11 で示した最悪整合度最小値を与える変換元の $B \in \mathcal{B}$ とその変換先である $T^\Lambda(B)$, $T^\Xi(B)$ を $n = 3, 4, 5, 6$ と $s = 2, 5, 9, 16$ で調べた. 同様に, 定理 11 で示した最悪整合度最大値を与える変換元の $S \in \mathcal{T}$ とその変換先の $T^\Lambda(S)$, $T^\Xi(S)$ を $n = 3, 4, 5, 6$ といくつかの s で調べた. 最悪整合度最小値を与える変換元の B とその変換先の $T^\Lambda(B)$, $T^\Xi(B)$ は各 n での $s = 2, 5, 9, 16$ において変わらなかった. 最悪整合度最大値を与える変換先の S とその変換先の $T^\Lambda(S)$, $T^\Xi(S)$ でも同様であった. これは最悪整合度最小値における最悪整合度の変換は s の取り方や n に依存しなく, 最悪整合度最大値でもそうであることを示す. 最悪整合度の実用化を考えれば, 最悪整合度最小値での最悪整合度の変換の情報は整合的な一対比較行列構築のために重要である. また, 最悪整合度最大値での最悪整合度の変換の情報は潜在的に不整合性を抱える一対比較行列の発見に重要である. 補題 8 より, 一対比較行列 E は, 最悪整合度最大値を与える

表 8: $n = 4$ での $s = 2, 5, 9, 16$ における一致

	$(S, T^\Lambda(S))$				$(S, T^\Xi(S))$			
	$s = 2$	5	9	16	$s = 2$	5	9	16
$s = 2$	-	○	○	○	-	○	○	○
$s = 5$	○	-	○	○	○	-	○	○
$s = 9$	○	○	-	○	○	○	-	○
$s = 16$	○	○	○	-	○	○	○	-

表 9: $n = 5$ での $s = 2, 5, 9, 16$ における一致

	$(S, T^\Lambda(S))$				$(S, T^\Xi(S))$			
	$s = 2$	5	9	16	$s = 2$	5	9	16
$s = 2$	-	295	295	295	-	326	326	326
$s = 5$	295	-	16	16	326	-	16	16
$s = 9$	295	16	-	○	326	16	-	○
$s = 16$	295	16	○	-	326	16	○	-

表 10: $n = 6$ での $s = 2, \dots, 128$ における一致 $(S, T^\Lambda(S))$

	$s = 2$	5	9	16	32	64	128
$s = 2$	-	1924	3260	3428	3441	3428	4231
$s = 5$	1924	-	1852	2444	2457	2444	3247
$s = 9$	3260	1852	-	624	765	752	1555
$s = 16$	3428	2444	624	-	173	160	963
$s = 32$	3441	2457	765	173	-	13	803
$s = 64$	3428	2444	752	160	13	-	803
$s = 128$	4231	3247	1555	963	803	803	-

変換元の 1 つで, E の変換先行列の集合は, 最大整合度最大値を達成する変換先行列の集合の中で最大である. 最大整合度最小値を達成する変換先の集合が最大となる変換元については明らかにすることは今後の課題である. T-AHP の一対比較行列 S が $s_{ij} \in \{1/s, s\}$ ($i \neq j$) であり, かつどの行和も異なるならば, S は順序推移的であるという. 実験的には順序推移的な行列は, 最悪整合度最小値を与える変換元である. 最悪整合度最小値, 最大値での最悪整合度の変換は n と s に依存しないという実験結果を証明することは有意義である.

表 11: $n = 6$ での $s = 2, \dots, 128$ における一致 $(S, T^\Xi(S))$

	$s = 2$	5	9	16	32	64	128
$s = 2$	-	423	2336	3280	3280	3425	3545
$s = 5$	423	-	2073	3017	3017	3162	3282
$s = 9$	2336	2073	-	1240	1474	1619	1739
$s = 16$	3280	3017	1240	-	394	539	659
$s = 32$	3280	3017	1474	394	-	177	297
$s = 64$	3425	3162	1619	539	177	-	120
$s = 128$	3545	3282	1739	659	297	120	-

表 12: 最悪整合度の変換 $(S, T^\Lambda(S))$ と $(S, T^\Xi(S))$ の一致

	$n = 3$	4	5	6
$s = 2$	○	○	79	2492
$s = 5$	○	○	○	14240
$s = 9$	○	○	○	13659
$s = 16$	○	○	○	13171

表 13: 最悪整合度最大 (小) 値を与える変換元の T-AHP 行列の総数

	$\Lambda(S)$		$\Xi(S)$	
	min	max	min	max
$n = 3$	3	4	3	4
$n = 4$	5	29	5	29
$n = 5$	8	162	8	162
$n = 6$	13	7978	13	7556

表 14: 最悪整合度最大 (小) 値を与える $T^\Lambda(S)$, $T^\Xi(S)$

	$T^\Lambda(S)$		$T^\Xi(S)$	
	min	max	min	max
$n = 3$	1	1	1	1
$n = 4$	4	1	4	1
$n = 5$	1	1	1	1
$n = 6$	6	1	2	2