

Metasymplectic geometry と triple systems について

熊本大 教養 山口 清

F_4 型および E_6 型の例外 Lie 環が C. Chevalley と R. D. Schafer により具体的に構成されたのち, H. Freudenthal は F_4 型, E_6 型の例外リー群で不変な幾何学を研究した, としてさらに「 F_4, E_6, E_7, E_8 」型の例外リー環の具体的に構成を行い, それをもとに octavian plane または Cayley plane から出発して 5-dim. symplectic geometry を展開し, いわゆる "magic square" から metasymplectic geometry の研究を行った。これは始めの 3 次 Hermite 行列の元素が実数, 複素数, 四元数, 八元数であるにしたがって「 F_4, E_6, E_7, E_8 」型の例外リー群で不変な幾何学である。(ここになされなかった G_2 型の例外リー群の幾何学は G. J. Schellekens によって研究され hexagonal structure とよばれた) 例外リー環の構成, それに関する一般化やその幾何学についてその后多くの人々によって研究された。これらの研究を通して, リー環の場合のような binary product をもつた代数系のみでなく, ternary

product をもった代数系, すなわち, triple (または, ternary) system を考えること, およびこれらの triple system を Lie triple system に関連づけることが大切であることが示されているように思われる. このことは例外リー群の研究においては, リー群そのものの立場のみでなく対称空間の立場から考えることが大切であることを示しているように思われる.

ここでは, Freudenthal による研究を出発点として, その一般化を試みる. 5-dim. symplectic geometry において, P, Q, R を平面とする ($P \times P = Q \times Q = R \times R = 0$). P, Q が交わる ($\{P, Q\} = 0$) とき, $(P \times Q)R$ は平面 P と Q の交点 $P \times Q$ を通り, 平面 R と一直線で交わるような平面を表わす. この $(P \times Q)R$ や $(P \times Q)R - \frac{1}{8}\{P, Q\}R$ を P, Q, R について一つの ternary product と考えることにより, symplectic triple system (H. Asano), (balanced) symplectic algebra (J. R. Faulkner, J. C. Ferrar) や J -ternary algebra (B. N. Allison, W. Hein) 等の概念が導かれた. これらの関係を整理し, I. L. Kantor による 2nd order の generalized Jordan triple system にならって Freudenthal-Kantor triple system を定義し, Lie triple system の立場からこれらの system を考えてみる.

準備 Freudenthal によって与えられた定義および性質について述べる。しかし [5, 6, 7, 8] を参照して下さい。

L を実数体 R 上の Cayley algebra とする。任意の元 $x \in L$ に対して, $\bar{x}$ で x の共軛元を示す。 X を Cayley 数と元素にもつ 3 次の Hermitian 行列とする:

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \xi_i \in R, \quad x_i \in L.$$

かかる X の全体 $\mathcal{J}$ は積 $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ に関して exceptional Jordan algebra をなす。ここに, XY は行列 X と Y の普通の積である。

$$\text{sp } X := \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$

$$(X, Y) := \text{sp}(X \circ Y)$$

$$= \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 + 2\text{Re}(x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3),$$

$\mathcal{J}$ の内に対称積 $X \times Y$ が次により定義される:

$$X \times Y := X \circ Y - \frac{1}{2}(\text{sp}(X)Y + \text{sp}(Y)X - (\text{sp}(X)\text{sp}(Y) - (X, Y))I),$$

ここで, I は単位行列を示す。 X, Y に対し, $\mathcal{J}$ の一次写像 $\langle X, Y \rangle$ が次により定義される:

$$\langle X, Y \rangle Z := 2Y \times (X \times Z) - \frac{1}{2}(Z, Y)X - \frac{1}{6}(X, Y)Z.$$

$\mathbb{R}$ でベクトル空間としての直和 $\mathcal{J} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ を示す.

$\mathbb{R}$ の元 P は

$$P = \langle X, U, \xi, \omega \rangle$$

または行ベクトルの記号で

$$P = \begin{pmatrix} X \\ U \\ \xi \\ \omega \end{pmatrix}, \quad X, U \in \mathcal{J}, \quad \xi, \omega \in \mathbb{R}$$

とかけられる. f で $\mathbb{R}$ の一次写像 $\sum_i \langle X_i, Y_i \rangle$, $X_i, Y_i \in \mathcal{J}$,
 によつて張られる実ベクトル空間を示し, $\mathcal{L} = f \oplus \mathbb{R} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}$
 $\mathcal{J}$ (ベクトル空間としての直和) とおく. $\mathcal{L}$ の元 $\textcircled{H}$ は

$$\textcircled{H} = \langle \sum_i \langle X_i, Y_i \rangle, p, A, B \rangle$$

または

$$\textcircled{H} = \begin{pmatrix} \sum_i \langle X_i, Y_i \rangle \\ p \\ A \\ B \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \sum_i \langle X_i, Y_i \rangle \in f, \\ p \in \mathbb{R}, \\ A, B \in \mathcal{J}, \end{array}$$

とかけられる. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathcal{L}$ への写像 $\times$ が次により定義される.

$$P_1 \times P_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle X_1, U_2 \rangle + \langle X_2, U_1 \rangle \\ -\frac{1}{4} \left((X_1, U_2) + (X_2, U_1) - 3\xi_1\omega_2 - 3\xi_2\omega_1 \right) \\ -U_1 \times U_2 + \frac{1}{2} (\xi_1 X_2 + \xi_2 X_1) \\ X_1 \times X_2 - \frac{1}{2} (\omega_1 U_2 + \omega_2 U_1) \end{pmatrix},$$

ここで, $P_i = \begin{bmatrix} X_i, U_i, \xi_i, \omega_i \end{bmatrix}$, $i = 1, 2$. $\bar{R} \times \bar{R}$ から $\mathbb{R}$ への交代双一次写像 $\{, \}$ が次により定義される:

$$\{P_1, P_2\} := (X_1, U_2) - (X_2, U_1) + \xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1.$$

$\mathcal{L}$ の元は次により $\bar{R}$ に一次写像として作用する: $\textcircled{4} = \begin{bmatrix} \sum_i \langle X_i, Y_i \rangle, \rho, A, B \end{bmatrix} \in \mathcal{L}$, $P = \begin{bmatrix} X, U, \xi, \omega \end{bmatrix} \in \bar{R}$ に対して

$$\textcircled{4}P := \begin{pmatrix} \left(\sum_i \langle X_i, Y_i \rangle + \frac{1}{3}\rho \right) X + 2B \times U + \omega A \\ - \left(\sum_i \langle Y_i, X_i \rangle + \frac{1}{3}\rho \right) U + 2A \times X + \xi B \\ (A, U) - \rho \xi \\ (B, X) + \rho \omega \end{pmatrix},$$

$\mathcal{L}$ は $\bar{R}$ に作用する一次写像のリー環になる.

バクトル空間 $\bar{R}$ 内の多様体 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} := \{ P \in \bar{R} \mid P \times P = 0 \} = \{ P \in \bar{R} \mid (X, U) = 3\xi\omega, X \times X = \omega U, U \times U = \xi X, \langle X, U \rangle = 0, X \circ U = \xi\omega I \}$ として定義する. すると, $\mathcal{L}$ は連結多様体 $\mathcal{M}$ を不変にする $\bar{R}$ の射影変換群のリー環である. それで $\mathcal{L} = \text{Inv}(\mathcal{M})$ と書く.

$\mathcal{R}_4$ でバクトル空間としての直和 $\text{Inv}(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}_1} \oplus \bar{R} \oplus \bar{R}$ を示す, ここで $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_1}$ は A_1 型の単純リー環のコピーである.

$\mathcal{R}_4$ の元 Φ は次のようにかけられる:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta + \gamma & \underline{\delta} \\ \bar{\delta} & \Theta - \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix}^T,$$

そこで, $\Theta \in \text{Inn}(M)$, $\gamma, \underline{\delta}, \bar{\delta} \in R$, $P, P' \in R$. R_4 は次によって定義される積 $[\cdot, \cdot]$ に関して (γ の元が $R, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$, R 上の行列であるに従って) 「 F_4, E_6, E_7, E_8 」型の例外単純リー環になる.

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \Theta_i + \gamma_i & \underline{\delta}_i \\ \bar{\delta}_i & \Theta_i - \gamma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_i \\ P'_i \end{pmatrix}^T, \quad i=1, 2 \quad \text{に対して}$$

$$[\Phi_1, \Phi_2] := \begin{pmatrix} \Theta + \gamma & \underline{\delta} \\ \bar{\delta} & \Theta - \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix}^T,$$

そこで,

$$\Theta = [\Theta_1, \Theta_2] + P_1 \times P'_2 - P'_2 \times P_1,$$

$$\gamma = \underline{\delta}_1 \bar{\delta}_2 - \underline{\delta}_2 \bar{\delta}_1 - \frac{1}{8} \{P_1, P'_2\} + \frac{1}{8} \{P'_2, P_1\},$$

$$\bar{\delta} = -2\gamma_1 \bar{\delta}_2 + 2\gamma_2 \bar{\delta}_1 - \frac{1}{4} \{P'_1, P'_2\},$$

$$\underline{\delta} = 2\gamma_1 \underline{\delta}_2 - 2\gamma_2 \underline{\delta}_1 + \frac{1}{4} \{P_1, P_2\},$$

$$P = (\Theta_1 + \gamma_1) P_2 - (\Theta_2 + \gamma_2) P_1 + \underline{\delta}_1 P'_2 - \underline{\delta}_2 P'_1,$$

$$P' = (\Theta_1 - \gamma_1) P'_2 - (\Theta_2 - \gamma_2) P'_1 + \bar{\delta}_1 P_2 - \bar{\delta}_2 P_1,$$

[5, §7; 6, §25].

R_4 上の対称双一次形式 $(\cdot, \cdot)$ を Killing 形式のスカラ-

倍として、次により定義される:

$$(\Phi_1, \Phi_2) := -\frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{sp} \widetilde{\Phi}_1 \widetilde{\Phi}_2,$$

ここで、 $\widetilde{\Phi}_i$ は $\operatorname{ad} \Phi_i$ を示し、 $\varepsilon_2 := \{9, 12, 18, 30\}$. $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{R}_4$ に対し、 $\mathcal{R}_4$ の一次写像 $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ が次により定義される:

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi = \frac{1}{2} (\widetilde{\Phi}_1 \widetilde{\Phi}_2 + \widetilde{\Phi}_2 \widetilde{\Phi}_1) \Phi - \frac{1}{2} (\Phi_1, \Phi) \Phi_2 - \frac{1}{2} (\Phi_2, \Phi) \Phi_1 + \varepsilon (\Phi_1, \Phi_2) \Phi,$$

ここで $\varepsilon := \left\{ \frac{5}{26}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \right\}$.

ベクトル空間 $\mathcal{R}_4$ 内の多様体 $\mathcal{N}_4$ を $\mathcal{N}_4 := \{ \Phi \in \mathcal{R}_4 \mid \langle \Phi, \Phi \rangle = 0 \} = \{ \Phi \in \mathcal{R}_4 \mid \widetilde{\Phi}^2 \Phi^* = (\Phi, \Phi^*) \Phi \text{ for all } \Phi^* \in \mathcal{R}_4 \}$ として定義する. $\mathcal{N}_4$ の元は (実スカラー一倍を考へに入れないうとき) symplecton とよばれる.

$\mathcal{R}_1$ を $\mathcal{R}_4$ の一次写像 $\Sigma_i \langle \Phi_i, \Phi_i' \rangle$, $\Phi_i, \Phi_i' \in \mathcal{R}_4$, により張られる実ベクトル空間とする. $\mathcal{R}_1$ 内の多様体 $\mathcal{N}_1$ を $\mathcal{N}_1 := \{ \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \in \mathcal{R}_4 \mid [\Phi_1, \Phi_2] = 0, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{N}_4 \} = \{ \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \in \mathcal{R}_4 \mid \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle^2 = 0, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{N}_4 \}$ として定義する. $\mathcal{N}_1$ の元は (実スカラー一倍を考へに入れないうとき) 点とよばれる.

標数 0 の体上の有限次元ベクトル空間 $\mathcal{V}$ が次の条件を満足する三項積 $[\cdot, \cdot, \cdot]$ に関して閉じているとき, $\mathcal{V}$ は Lie triple system とよばれる:

$$(LT 1) \quad [a a b] = 0,$$

$$(LT 2) \quad [a b c] + [b c a] + [c a b] = 0,$$

$$(LT 3) \quad [a b [c d e]] = [[a b c] d e] + [c [a b d] e] + [c d [a b e]].$$

(LT 3) は $\mathcal{V}$ の一次写像 $L(a, b): x \mapsto (a b x)$ が $\mathcal{V}$ の triple derivation であることを示している。(Lie triple system について詳しくは [12, 18, 19] を参照して下さい。この講究録においても吉川氏が幾何学との関連において述べられると思います。また [16] を参照)。 $[\cdot, \cdot]$ を積にもつリー環 $\mathcal{L}$ の部分空間 $\mathcal{V}$ は $\mathcal{L}$ 内の三項積 $[[a, b], c]$ に関して閉じておれば、この三項積に関して Lie triple system になる。このことより、リー環 R_4 のベクトル部分空間 $\bar{K} \oplus \bar{K}$ は Lie triple system になる。実際、 $\mathcal{L}$ 内の三項積 $\left[\left[\begin{pmatrix} 0 \\ P_1 \\ P_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \\ P_2' \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} 0 \\ P_3 \\ P_3' \end{pmatrix} \right]$ の $\bar{K} \oplus \bar{K}$ -成分を求めてみると次のようになる。

$$(*) \quad \begin{pmatrix} (P_1 \times P_2' - P_2 \times P_1') P_3 - \frac{1}{8} (\{P_1, P_2'\} - \{P_2, P_1'\}) P_3 + \frac{1}{4} \{P_1, P_2\} P_3' \\ (P_1 \times P_2' - P_2 \times P_1') P_3' + \frac{1}{8} (\{P_1, P_2'\} - \{P_2, P_1'\}) P_3' - \frac{1}{4} \{P_1', P_2'\} P_3 \end{pmatrix}$$

R_4 が単純リー環であることから、 $\mathcal{V}$ は単純 Lie triple system となることが Lister [18] より出るが、ベクトル空間 $\mathcal{V} := \bar{K} \oplus \bar{K}$ を考えて、 $\mathcal{V}$ 内の三項積を (*) によって定義すると、この積に関して $\mathcal{V}$ は Lie triple system

になること, として Lie triple system として単純であることが直接にも示される [26, 定理 1, より一般に定理 2]. 以下特にことわらなければベクトル空間は標数 0 の体上の有限次元ベクトル空間とする.

リ-環 $\text{Inv}(\mathcal{M}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{R} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}$ の部分空間 $\mathcal{J} \oplus \mathcal{J}$ は Lie triple subsystem になる. なぜならば $\Theta_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_i \\ B_i \end{pmatrix} \in \text{Inv}(\mathcal{M}), i=1, 2, 3,$ に対し [5, §4, p.227] を用いると

$$[[\Theta_1, \Theta_2], \Theta_3] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \\ B \end{pmatrix},$$

そこで

$$A = 2 \left\{ \langle A_2, B_1 \rangle - \frac{1}{3} (A_2, B_1) - \langle A_1, B_2 \rangle + \frac{1}{3} (A_1, B_2) \right\} A_3,$$

$$B = -2 \left\{ \langle B_1, A_2 \rangle - \frac{1}{3} (B_1, A_2) - \langle B_2, A_1 \rangle + \frac{1}{3} (B_2, A_1) \right\} B_3,$$

となるからである.

generalized Jordan triple system とは次の条件を満たす triple system である [14, 15]:

$$(GJT) \quad (ab(cde)) = ((abc)de) - (c(bad)e) + (cd(abe)).$$

generalized Jordan triple system がさらに, 次の条件 (JT) を満たすとき, それは単に Jordan triple system とよばれる:

$$(JT) \quad (abc) = (cba).$$

任意の Jordan algebra J は新しい三項積 $(abc) :=$

$a(bc) - b(ac) + (ab)c$, ここで ab は J における Jordan 積, に関して Jordan triple system になる. 上述の例外 Jordan algebra J において $(ABX) := \langle A, B \rangle X - \frac{1}{3}(A, B)X$ とおくと, $(ABX) = -\{A \circ (B \circ X) - B \circ (A \circ X) + (A \circ B) \circ X\}$ となるから, J は三項積 (ABX) に関して Jordan triple system になる. J において, $ABX := \langle A, B \rangle X$ とおいた時は [5, §1 (1.20)] により, J は三項積 ABX に関して generalized Jordan triple system になる.

1. ベクトル空間 $\bar{K} \oplus \bar{K}$ において, 元 $\begin{pmatrix} P_i \\ P'_i \end{pmatrix}$, $i=1, 2, 3$, の三項積 $\left[\begin{pmatrix} P_1 \\ P'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \\ P'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_3 \\ P'_3 \end{pmatrix} \right]$ を (*) によって定義すると, $\bar{K} \oplus \bar{K}$ は Lie triple system になることを示す. $\Phi = \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} \in \bar{K} \oplus \bar{K}$, $P = \langle X, U, \xi, \omega \rangle$, $P' = \langle X', U', \xi', \omega' \rangle$ に対し次の関係式が成立するとする:

(1) $[\Phi^* \Phi \Phi] = (\Phi^*, \Phi)\Phi$ for all $\Phi^* \in \bar{K} \oplus \bar{K}$,
 ここで, (Φ^*, Φ) は Lie triple system $\bar{K} \oplus \bar{K}$ 上の非対称双一次形式とする. すると次の関係式が成立する.

$$\begin{aligned} (X, U) &= 3\xi\omega, & (X', U') &= 3\xi'\omega', \\ X \times X &= \omega U, & X' \times X' &= \omega' U', \\ U \times U &= \xi X, & U' \times U' &= \xi' X', \\ \langle X, U \rangle &= 0, & \langle X', U' \rangle &= 0, \end{aligned}$$

$$(X, U') = 3 \zeta' \omega = (X', U) = 3 \zeta \omega',$$

$$(X, A)X' = (X', A)X, \quad (U, A)U' = (U', A)U,$$

$$(U, A)X' = (U', A)X, \quad (X, A)U' = (X', A)U,$$

$$X \times X' = \omega' U, \quad U \times U' = \zeta X',$$

$$\omega X' = \omega' X, \quad \zeta X' = \zeta' X,$$

$$\omega U' = \omega' U, \quad \zeta U' = \zeta' U,$$

$$\zeta' \omega = \zeta \omega', \quad \langle X', U \rangle + \langle X, U' \rangle = 0.$$

これらの証明には、写像 $\Phi^* \mapsto [\Phi^* \Phi \Phi]$ において Φ^* が次の形である場合に適用するとよい。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ 0 \\ 0 \\ (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0) \\ X'_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0) \\ 0 \\ 0 \\ U'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

系として、もし $\begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ が条件 (i) をみたすならば、かかるものの projection P および P' の全体は共に多様体 $\mathcal{M}$ である。

2. Freudenthal による例外単純リー環の構成に用いられたベクトル空間 $\mathbb{R}$ の代数的構造を抽象化するときには基本となるのは次の5個の基本性質であろう。

$$P \times Q = Q \times P,$$

$$\{P, Q\} + \{Q, P\} = 0,$$

$$(P \times Q)R - (P \times R)Q + \frac{1}{8}\{P, Q\}R - \frac{1}{8}\{P, R\}Q - \frac{1}{4}\{Q, R\}P = 0,$$

$$\{(P \times Q)R, S\} + \{R, (P \times Q)S\} = 0,$$

$$[P \times Q, R \times S] = (P \times Q)R \times S + R \times (P \times Q)S.$$

筆者には始め三項積 $(P \times Q)R$ と交代形式 $\{P, Q\}$ とは異なるものと思え、かつ $\{P, Q\}$ が非退化であることから $(P \times Q)R := (P \times Q)R$ を積にもつ三項系 R が単純であることが上の第3式を用いて導かれるので、上の5個の条件を公理として仮定することは条件が少しきつすぎるのではないかと思われ、form を含まない第1, 第5の条件のみをみたす三項系 (F-system) を考えた [24]. しかし、浅野氏は上の条件を次のようにまとめられた [2, 26].

三項積 $\{abc\}$ と non-zero な双一次交代形式 $\langle a, b \rangle$ をもつ triple system S は次の条件をみたすとき symplectic triple system とよばれる:

$$(S1) \quad \{abc\} = \{bac\},$$

$$(S2) \quad \{abc\} - \{acb\} + \langle a, b \rangle c - \langle a, c \rangle b - 2\langle b, c \rangle a = 0,$$

$$(S3) \quad \{ab\{cde\}\} = \{abc\}de\} + \{c\{abd\}e\} + \{cd\{abe\}\}.$$

条件 (S3) は一次写像 $x \mapsto \{abx\}$ が S の triple derivation であることを意味する. もし, S の基底体の標数 $\neq 2, 3$ の場合には, 条件 (S1), (S2), (S3) は (S1), (S2)', (S3)' に同値である.

$$(S2)' \quad \{aab\} - \{baa\} = 3\langle a, b \rangle a,$$

$$(S3)' \quad \{aa\{bb c\}\} = 2\{\{aab\}bc\} + \{bb\{aac\}\}.$$

$\bar{R} = J \oplus J \oplus R \oplus R$ において, 三項積 $\{P \ Q \ R\}$ を $(P \times Q)R$, $\bar{R}$ 上の交代形式を $\frac{1}{8}\{P, Q\}$ として定義すると, $\bar{R}$ は symplectic triple system になる.

[註] $(S2)'$ により [5, §6 (6.1)] の証明には任意の P, Q に対し $(P \times P)Q - (P \times Q)P = \frac{3}{8}\{P, Q\}P$ が成立することを見せればよい.

Faulkner and Ferrar [4] における symplectic algebra の定義において, 三項積 abc を (bca) とおくことにする.

定義 (Faulkner and Ferrar) 標数 $\neq 2, 3$ の体上の積 (abc) をもつ三項系 M が symplectic algebra であるとは $L(a, b): x \mapsto (abx)$, $U(a, b): x \mapsto (axb)$ とおくとき, 次の三条件を満たすものである.

$$(SA1) \quad -L(a, b) + L(b, a) = U(a, b) - U(b, a) \quad (= K(a, b) \text{ とおく}),$$

$$(SA2) \quad L(c, d)K(a, b) = K(a, b)L(c, d) = L(K(a, b)c, d) = L(c, K(a, b)d),$$

$$(SA3) \quad [L(a, b), L(c, d)] = L((abc), d) + L(c, (bad)).$$

[注意] $(SA1)$ と $(SA3)$ より $[K(a, b), L(c, d)] = 0$
 $\Leftrightarrow L(K(a, b)c, d) = L(c, K(a, b)d)$. したがって, 条件 $(SA2)$ において 4 個の項の内, 三つが等しければ残りの第 4 の項もそれらに等しくなる.

積 $\{abc\}$ をもつ symplectic triple system は積 $(abc) := \{abc\} - \langle a, b \rangle c$ に関して symplectic algebra になり, $K(a, b)x = 2\langle a, b \rangle x$ となるので $\sum_i K(a_i, b_i)$ によって張られるベクトル空間は 1 次元である.

Faulkner and Ferrar は symplectic algebra M が更に, $K(a, b) = \langle a, b \rangle \text{Id}$, $\langle, \rangle$ は M 上の交代双一次形式, をみたすとき, それを balanced symplectic algebra とよんで ([3] を参照). したがって, symplectic triple system は balanced symplectic algebra の構造をもつ. 逆に, balanced symplectic algebra M が与えられたとき, $\{abc\} := \frac{1}{2}\{(abc) + (bac)\}$ とおくと, M は 三項積 $\{abc\}$ と交代形式 $\frac{1}{2}\langle a, b \rangle$ に関して symplectic triple system になる.

例. $K = J \oplus J \oplus K \oplus K$ から定まる symplectic algebra において, 元 $P_i = \langle X_i, U_i, \xi_i, \omega_i \rangle$ に対応する 三項積

$$(P_1 P_2 P_3) := (P_1 \times P_2) P_3 - \frac{1}{8} \{P_1, P_2\} P_3$$

は次のようになる.

$$\frac{1}{2} \langle X, U, \xi, \omega \rangle,$$

こゝで,

$$\begin{aligned} X &= 2(X_1 \times X_2) \times U_3 + 2(X_2 \times X_3) \times U_1 + 2(X_3 \times X_1) \times U_2 \\ &\quad - \omega_1(U_2 \times U_3) - \omega_2(U_3 \times U_1) - \omega_3(U_1 \times U_2) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}((x_3, u_2) - \omega_3 \xi_2) x_1 - \frac{1}{2}((x_3, u_1) - \omega_3 \xi_1) x_2 \\ - \frac{1}{2}((x_1, u_2) - \omega_1 \xi_2) x_3,$$

$$U = -2(u_1 \times u_2) \times x_3 - 2(u_2 \times u_3) \times x_1 - 2(u_3 \times u_1) \times x_2 \\ + \xi_1(x_2 \times x_3) + \xi_2(x_3 \times x_1) + \xi_3(x_1 \times x_2) \\ + \frac{1}{2}((u_3, x_2) - \xi_3 \omega_2) u_1 + \frac{1}{2}((u_3, x_1) - \xi_3 \omega_1) u_2 \\ + \frac{1}{2}((u_1, x_2) - \xi_1 \omega_2) u_3,$$

$$\xi = -(u_1 \times u_2, u_3) + \frac{1}{2} \xi_1(x_2, u_3) + \frac{1}{2} \xi_2(x_1, u_3) \\ + \frac{1}{2} \xi_3(x_2, u_1) - \xi_1 \xi_3 \omega_2 - \frac{1}{2} \xi_2 \xi_3 \omega_1,$$

$$\omega = (x_1 \times x_2, x_3) - \frac{1}{2} \omega_1(u_2, x_3) - \frac{1}{2} \omega_2(u_1, x_3) \\ - \frac{1}{2} \omega_3(u_2, x_1) + \omega_1 \omega_3 \xi_2 + \frac{1}{2} \omega_2 \omega_3 \xi_1,$$

[3, 4 を参照].

3. $\mathcal{J}$ -ternary algebra は M. Koecher の構成 [17] を含むように B. N. Allison [1] と W. Hein [10, 11] により独立に定義された概念である (Hein は始めこれを admissible situation とよんだ).

定義 (Allison, Hein) $\mathcal{J}$ を標数 $\neq 2, 3$ の体 k 上の有限次元の単位元 e をもつ Jordan algebra (積を xy で示す) とする. $\mathcal{A}$ は k 上の積 (abc) をもつ三項系で, Jordan algebra $\mathcal{J}$ の特殊表現モジュールとする, 即ち, $\sigma: \mathcal{J} \rightarrow \text{Hom}_k(\mathcal{A})$ が存在して次の 2 条件を満たす:

$$(J-T 1) \quad \sigma(xy) = \frac{1}{2} (\sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y)\sigma(x)),$$

$$(J-T 2) \quad \sigma(e) = \text{Id}_{\mathfrak{L}}.$$

さらに, $\mathfrak{L}$ から $\mathfrak{J}$ への交代双一次写像 $f: \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{J}$ が存在して以下の条件を満たすものとする:

$$(J-T 3) \quad [L(a, b), L(c, d)] = L((abc), d) + L(c, (bad)),$$

$$(J-T 4) \quad (abc) - (cba) = (L(c, a) - L(a, c))(b),$$

$$(J-T 5) \quad (abc) - (cba) = \sigma f(c, a)(b),$$

$$(J-T 6) \quad x f(a, b) = \frac{1}{2} \{ f(\sigma(x)a, b) + f(a, \sigma(x)b) \},$$

$$(J-T 7) \quad [\sigma(x), L(a, b)] = L(\sigma(x)a, b) - L(a, \sigma(x)b),$$

$$(J-T 8) \quad f((abc), d) + f(c, (abd)) = f(a, \sigma f(c, d)b),$$

$x, y \in \mathfrak{J}, a, b, c, d \in \mathfrak{L}$. ところで, $L(a, b)$ は $\mathfrak{L}$ での左側積 $x \mapsto (abx)$ を示す. このとき, $(\mathfrak{J}, \mathfrak{L}, \sigma, f)$ または単に $\mathfrak{L}$ を $\mathfrak{J}$ -ternary algebra といい.

[註] $\mathfrak{J}$ -ternary algebra の定義において, (J-T; 1, 3, 4, 5, 6) より

$$\sigma f(L(a, b)c, d) + \sigma f(c, L(a, b)d) = \sigma f(a, \sigma f(c, d)b)$$

が導かれる. これから, $\mathfrak{J}$ の表現 σ が faithful であるとき, (J-T 8) はこれらの5個の仮定より導かれる.

ここでは, 表現空間 $\mathfrak{L}$ の方に重点をおいて上の公理の reformation をしてみる ($K(a, b) := -\sigma f(a, b)$ とおいて, (J-T 1), (J-T, 4, 5), (J-T, 1, 6) からそれぞれ次の (

(AH 1), (AH 2), (AH 3) とする)。

積 (abc) をもつ三項系 T において, $L(a, b): x \mapsto (abx)$,
 $K(a, b): x \mapsto (axb) - (bxa)$ とおく. 次の3条件がみた
 されるとき, T は Allison-Hein triple system といい.

$$(AH 1) \quad [L(a, b), L(c, d)] = L((abc), d) + L(c, (bad)),$$

$$(AH 2) \quad -L(a, b) + L(b, a) = K(a, b),$$

$$(AH 3) \quad K(a, b)K(c, d) + K(c, d)K(a, b) \\ = K(K(a, b)c, d) + K(c, K(a, b)d).$$

$K(a, b) = 0$ のときは, T の一次写像 $x \mapsto (abx)$ は T の
 triple derivation である. $\mathcal{J}$ -ternary algebra は Allison-
 Hein triple system である. 積 (abc) をもつ symplectic
 algebra はこの積に関して Allison-Hein triple system
 である. V をその次元 ≥ 2 なるベクトル空間, $\langle, \rangle$ を V 上
 の交代形式とすると, V は積 $(abc) := \langle b, c \rangle a$ に関して
 Allison-Hein triple system であるが, 一般には symplectic
 algebra でない.

もし, Allison-Hein triple system において, $K(a, b) \\ = \langle a, b \rangle \text{Id}$, $\langle a, b \rangle$ は基底体の元, が成立つときは Allison-
 Hein triple system の条件は balanced symplectic algebra
 の条件に reduce する. $\mathcal{J}$ -ternary algebra と symplectic
 triple system との関係については Kakichi [13] を参照.

symplectic triple system から導かれる Allison-Hein triple system において, $\sum K(a_i, b_i)$ により張られるベクトル空間は 1 次元であるので一般の次元の場合になるようにするためには symplectic triple system の定義を次のように一般化すればよい.

$\tilde{S}$ を 2 つの trilinear な積 $\{abc\}$ と $\langle abc \rangle$ をもつ system で次の条件を満たすものとする.

$$\{abc\} = \{bac\}, \quad \langle abc \rangle = -\langle bac \rangle,$$

$$\lambda(a, b): x \mapsto \{abx\}, \quad \mu(a, b): x \mapsto \langle abx \rangle \text{ とおくとき,}$$

$$\{abc\} - \{acb\} + \langle abc \rangle - \langle acb \rangle - 2\langle bca \rangle = 0,$$

$$[\lambda(a, b), \lambda(c, d)] = \lambda(\{abc\}, d) + \lambda(c, \{abd\}),$$

$$[\lambda(a, b), \mu(c, d)] = \mu(\{abc\}, d) + \mu(c, \{abd\}),$$

$$[\mu(a, b), \lambda(c, d)] = -\mu(\langle abc \rangle, d) + \mu(c, \langle abd \rangle),$$

$$[\mu(a, b), \mu(c, d)] = -\lambda(\langle abc \rangle, d) + \lambda(c, \langle abd \rangle),$$

$$\mu(a, b)\mu(c, d) + \mu(c, d)\mu(a, b) = \mu(\langle abc \rangle, d) + \mu(c, \langle abd \rangle).$$

$\tilde{S}$ において $\langle abx \rangle = \langle a, b \rangle x$, $\langle a, b \rangle$ は基礎体の元, かつねに成立すれば, 上の条件式は symplectic triple system の条件式 (S1), (S2), (S3) に reduce する. $\tilde{S}$ は積 $(abc) := \{abc\} - \langle abc \rangle$ に関して Allison-Hein triple system になり, 逆に Allison-Hein triple system は $\{abc\} := \frac{1}{2}((abc) + (bac))$, $\langle abc \rangle := \frac{1}{2}(-(abc) + (bac))$ に

関して, system $\tilde{J}$ になる.

4. この節で I. L. Kantor によって定義された generalized Jordan triple system of second order のプロジェとして, Allison-Hein triple system を一般化する. 体 K 上の積 (abc) をもつ 3項系 $U(\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1$, を次の条件をみたすものとして定義する.

$$(J1) \quad (ab(cde)) = ((abc)de) + \varepsilon(c(bad)e) + (cd(a be)),$$

$$(J2) \quad \text{Alt}_{a,b} \{((acb)ed) - (de(acb)) - (dc(aeb)) + \varepsilon(a(cde)b)\} = 0,$$

ただし, $\text{Alt}_{a,b}[\dots]$ は a と b に関する交代化を示す. $\varepsilon = -1$ のときは上の2条件は Kantor による2次の generalized Jordan triple system の定義式である. $\varepsilon = 1$ のとき, $U(1)$ を Freudenthal-Kantor triple system とよぶ.

[註] (J1) は J. R. Faulkner, On the geometry of inner ideals, J. of Algebra, 26, 1-9 (1973) に (1.5) としてでてくる.

$L(a, b): x \mapsto (abx)$, $K(a, b): x \mapsto \text{Alt}_{a,b}(axb) = (axb) - (bxa)$ を用いると, (J1), (J2) は次のようにかける.

$$(J1)' \quad [L(a, b), L(c, d)] = L((abc), d) + \varepsilon L(c, (bad)),$$

$$(J2)' \quad K(K(a, b)c, d) - L(d, c)K(a, b) + \varepsilon K(a, b)L(c, d) = 0.$$

定理 (標数 $\neq 2$ の体上の) Allison-Hein triple system T は同じ積に関して Freudenthal-Kantor triple system

である。とくに, f -ternary algebra もそうである。

[証] 仮定 (AH 1, 2) より容易に関係式 $(\alpha): [K(a, b), L(c, d)] = L(K(a, b)c, d) - L(c, K(a, b)d)$, $(\beta): [K(a, b), K(c, d)] = -L(K(a, b)c, d) - L(d, K(a, b)c) + L(K(a, b)d, c) + L(c, K(a, b)d)$ をうる。 (β) と (AH 3) より

$$(\gamma) \quad K(a, b)K(c, d) = -L(K(a, b)c, d) + L(K(a, b)d, c).$$

これから, (α) , (γ) , (AH 2) を用いて, $(\square 2)'$ の左辺
 $= K(K(a, b)c, d) + [K(a, b), L(d, c)] - K(a, b)(-L(c, d) + L(d, c)) = 0$ が導かれる。

命題 Freudenthal-Kantor triple system $U(1)$ が Allison-Hein triple system に reduce するための必要十分条件は $U(1)$ において (AH 2) が成立つことである。

$U(1)$ において, $K(a, b) = \langle a, b \rangle Id$, $\langle a, b \rangle \in k$, $\langle, \rangle \neq 0$ がつねに成立つときは, 公理 $(\square 2)'$ から (AH 2) が導かれる。ゆえに, この場合は symplectic algebra, Allison-Hein triple system の概念は Freudenthal-Kantor triple system のそれと一致して balanced symplectic algebra になる。

例 V をベクトル空間, $(,)$ を V 上の双一次形式で $(a, b) = -\varepsilon(b, a)$, $(\varepsilon = \pm 1)$ をみたすものとするとき, V は積 $(abc) := (b, c)a$ に関して triple system $U(\varepsilon)$ になる。

例 V をベクトル空間, $\langle, \rangle$ を V 上の交代双一次形式とする. V は積 $(abc) := \langle b, c \rangle a - \langle a, b \rangle c$ に関して Freudenthal-Kantor triple system になるか必ずしも Allison-Heim triple system ではない.

定理 triple system $\mathcal{U}(\varepsilon)$ において, $L(a, b): x \mapsto (abx)$, $M(a, b): x \mapsto (axb)$, $R(a, b): x \mapsto (xab)$, $\lambda(a, b) := \frac{1}{2}(L(a, b) + \varepsilon L(b, a)) (= \varepsilon \lambda(b, a))$ とおく, 次の関係式が成立つ.

- (i) $R(a, (bcd)) = R(c, d)R(a, b) + \varepsilon M(b, d)M(a, c) + L(b, c)R(a, d)$,
- (ii) $M(a, (bcd)) = R(c, d)M(a, b) + \varepsilon M(b, d)R(a, c) + L(b, c)M(a, d)$,
- (iii) $[\lambda(a, b), L(c, d)] = L(\lambda(a, b)c, d) + L(c, \lambda(a, b)d)$,
- (iv) $[\lambda(a, b), \lambda(c, d)] = \lambda(\lambda(a, b)c, d) + \lambda(c, \lambda(a, b)d)$,
- (v) $L(a, b)M(c, d) - \varepsilon M(c, d)L(b, a) = M((abc), d) + M(c, (abd))$,
- (vi) $L(a, b)K(c, d) - \varepsilon K(c, d)L(b, a) = K((abc), d) + K(c, (abd))$,
- (vii) $[\lambda(a, b), M(c, d)] = M(\lambda(a, b)c, d) + M(c, \lambda(a, b)d)$,
- (viii) $[\lambda(a, b), K(c, d)] = K(\lambda(a, b)c, d) + K(c, \lambda(a, b)d)$,
- (ix) $[L(a, b), R(c, d)] = \varepsilon R((bac), d) + R(c, (abd))$,
- (x) $[\lambda(a, b), R(c, d)] = R(\lambda(a, b)c, d) + R(c, \lambda(a, b)d)$,
- (xi) $L((abc), d) + L((cda), b) + \varepsilon L(c, (bad)) + \varepsilon L(a, (dcb)) = 0$,
- (xii) $L(K(a, b)c, d) - L(K(a, b)d, c) = \varepsilon L(a, K(c, d)b) - \varepsilon L(b, K(c, d)a)$,

- (xiii) $(R(a,b) - L(b,a))K(c,d) - M(b, K(c,d)a) + \varepsilon K(c,d)R(b,a) = 0,$
- (xiv) $K((abc), d) + K(c, (abd)) + K(a, K(c,d)b) = 0,$
- (xv) $\varepsilon K(a,b)M(c,d) + L(K(a,b)c, d) - R(d, K(a,b)c) - R(c, K(a,b)d) = 0,$
- (xvi) $(R(a,b) - L(b,a))(R(c,d) - L(d,c)) - L(b,c)(R(a,d) - L(d,a)) + \varepsilon(R((cba), d) - L(d, (cba))) = 0,$
- (xvii) $2\varepsilon[K(a,b), \lambda(c,d)] + K(K(a,b)c, d) + \varepsilon K(K(a,b)d, c) = 0,$
- (xviii) $\varepsilon K(a,b)K(c,d) + L(K(a,b)c, d) - L(K(a,b)d, c) = 0,$
- (xix) $K(a,b)K(c,d) + L(a, K(c,d)b) - L(b, K(c,d)a) = 0,$
- (xx) $[K(a,b), K(c,d)] + 2\varepsilon(\lambda(K(a,b)c, d) - \lambda(K(a,b)d, c)) = 0,$
- (xxi) $[K(a,b) [K(c,d), K(e,f)]] = K(K(a,b)K(c,d)e, f) - \varepsilon K(K(a,b)e, K(c,d)f) - \varepsilon K(K(c,d)e, K(a,b)f) + K(e, K(a,b)K(c,d)f),$
- (xxii) $[[K(a,b), K(c,d)] K(e,f)] = K([K(a,b), K(c,d)]e, f) + K(e, [K(a,b), K(c,d)]f).$

[注意] 定理の (i), (ii), (vi), (x) のいずれも公理 (□1) を特性づけ, (xiv), (xvii), (xviii) のいずれも公理 (□2) を特性づける. (iv) より $\lambda(a,b)$ は system $\mathcal{U}(\varepsilon)$ の triple derivation である.

系. L と R をそれぞれ一次写像 $\sum_i \lambda(a_i, b_i)$ と $\sum_i$

$K(a_i, b_i)$ とで張られるベクトル空間とする。ベクトル空間としての直和 $\mathfrak{L} \oplus \bar{K}$ はリ-環で $\bar{K}$ は Lie triple system である。

2 次の generalized Jordan triple system $U(-1)$ に対して Kantor は Lie triple product および V enveloping (graded) Lie algebra を定義した [15, Proposition 1]. symplectic algebra に対応する Faulkner と Ferrar による, および J -ternary algebra に対応する Hein による Lie triple system の構成は Freudenthal - Kantor triple system $U(1)$ に対しても成立する (また [24], [25], [26] を参照)。

$\mathcal{V} := U(\varepsilon) \oplus U(\varepsilon)$ (ベクトル空間としての直和) とおき, $\mathcal{V}$ の元を $a \oplus b$ またはベクトルの形で $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表わす。 $\mathcal{V}$ 内の三項積は次により定義される:

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} L(a_1, b_2)a_3 - L(a_2, b_1)a_3 + K(a_1, a_2)b_3 \\ \varepsilon L(b_2, a_1)b_3 - \varepsilon L(b_1, a_2)b_3 - \varepsilon K(b_1, b_2)a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L(a_1, b_2) - L(a_2, b_1) & K(a_1, a_2) \\ -\varepsilon K(b_1, b_2) & \varepsilon L(b_2, a_1) - \varepsilon L(b_1, a_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ただし, $a_i, b_i \in U(\varepsilon)$. すると上の定理の関係式を用いて直接計算により $\mathcal{V}$ はこの三項積に関して Lie triple system

であることがわかる。Lie triple system $\mathcal{V}$ において、次が成立する。

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} (abc) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$-\varepsilon \left[\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ (abc) \end{pmatrix},$$

$$[u(\varepsilon) \oplus (0), (0) \oplus u(\varepsilon), u(\varepsilon) \oplus (0)] \subset u(\varepsilon) \oplus (0),$$

$$[u(\varepsilon) \oplus (0), (0) \oplus u(\varepsilon), (0) \oplus u(\varepsilon)] \subset (0) \oplus u(\varepsilon),$$

$$[u(\varepsilon) \oplus (0), u(\varepsilon) \oplus (0), u(\varepsilon) \oplus (0)] = (0) \oplus (0).$$

$\varepsilon = -1$ のとき： $u(-1)$ は Jordan triple system であるときは、次が成立つ。

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\varepsilon = 1$ のとき： $u(1)$ は Allison-Hein triple system であるときは、次が成立つ。

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u(1)$ は symplectic algebra のときには、さらに

$$\left[\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right] \right] = - \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right] \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立し, *balanced* のときは,

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \right] = \langle a, b \rangle \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立する. $u(1)$ が symplectic triple system から
 $(abc) := \{abc\} - \langle a, b \rangle c$ によって導かれた所の
 symplectic algebra のときは, 次が成立する.

$$- \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 2 \langle a, b \rangle \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lie triple system $\mathcal{V} = \mathcal{U}(\varepsilon) \oplus \mathcal{U}(\varepsilon)$ において, 一次
 写像 $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ は $\mathcal{V}$ の微分である.

命題 [cf. 11, 2.2 Lemma] Lie triple system $\mathcal{V} = \mathcal{U}(1) \oplus \mathcal{U}(1)$ において, 次の3条件は等値である:

- (i) $K(a, b) = -L(a, b) + L(b, a)$ for all $a, b \in \mathcal{U}(1)$.
- (ii) 一次写像 $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathcal{V}$ の微分.
- (iii) 一次写像 $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ は $\mathcal{V}$ の微分.

したがって, Freudenthal-Kantor triple system
 $\mathcal{U}(1)$ が Allison-Hein triple system になる必要十分
 条件は $\mathcal{U}(1)$ から上の方法で Lie triple system を構成し
 たとき, $\mathcal{V}$ が $\mathcal{V}$ である W が Lie triple system として

での微分になることである。

次に Lie triple system の内での $U(\varepsilon)$, Jordan triple system, Allison-Heim triple system, symplectic algebra, symplectic triple system の特性づけを与える, これは本質的に Heim [11, 2.3 Satz] の証明に負う。

ベクトル空間 $V = U \oplus \bar{U}$ が Lie triple system で次の条件を満たす V の一次写像 f が存在すると仮定する。

$$(1) \quad f(U) = \bar{U}, \quad f(\bar{U}) = (0),$$

$$(2) \quad [U \bar{U} U] \subset U,$$

$$(3) \quad [U \bar{U} \bar{U}] \subset \bar{U},$$

$$(4) \quad [U U U] = (0),$$

任意の $x \in U$ に対して $\bar{x} := f(x)$ とおくとき,

$$(5) \quad \overline{[a \bar{b} c]} = -\varepsilon [\bar{a} b \bar{c}] \quad \text{for all } a, b, c \in U,$$

ここで $\varepsilon = \pm 1$ 。

補題 仮定 (1), (2), ..., (5) のもとで次が成立つ。

$$(i) \quad [U U \bar{U}] \subset U,$$

$$(ii) \quad [\bar{U} \bar{U} U] \subset \bar{U},$$

$$(iii) \quad \overline{[a b \bar{c}]} = -\varepsilon [\bar{a} \bar{b} c].$$

仮定 (1), (2), ..., (5) のもとで

$$(abc) := [a \bar{b} c] \quad \text{for } a, b, c \in U$$

とおくと, ベクトル空間 U は積 (abc) に関して triple

system $U(\varepsilon)$ になる.

[証] 一次写像 $x \mapsto [a\bar{b}x]$ は $\mathcal{U}$ の微分であること
 から, (U1) の左辺 $= [a\bar{b}[c\bar{d}e]] - [[a\bar{b}c]\bar{d}e]$
 $+ [c[a\bar{b}\bar{d}]e] - [c\bar{d}[a\bar{b}e]] = 0$. 次に (axb)
 $- (bxa) = [ab\bar{x}]$ であることを注意して, (U2)
 の左辺 $= [[ab\bar{x}]\bar{y}z] - [z\bar{y}[ab\bar{x}]] - [z\bar{x}[ab\bar{y}]]$
 $- [ab[\bar{x}z\bar{y}]] = [[ab\bar{x}]\bar{y}z] + [\bar{x}z[ab\bar{y}]] -$
 $[ab[\bar{x}z\bar{y}]] = 0$ が $x \mapsto [abx]$ が $\mathcal{U}$ の微分である
 ことと (4) を用いて導かれる.

同様にして以下の結果が得られる.

$\varepsilon = -1$ のとき:

$$(6) \quad [a\bar{b}\bar{c}] = 0 \quad \text{for all } a, b, c \in U$$

と仮定すると, 仮定 (1), (2), ..., (6) のもとで U は

Jordan triple system になる.

$\varepsilon = 1$ のとき:

$$(7) \quad [\bar{a}bc] + [a\bar{b}c] + [ab\bar{c}] = 0$$

と仮定すると, 仮定 (1), (2), ..., (5), (7) のもとで, U は

Allison-Hein triple system になる. さらに次を仮定する.

$$(8) \quad [c\bar{d}[ab\bar{x}]] = -[ab[\bar{c}d\bar{x}]]$$

$$= [[ab\bar{c}]\bar{d}x] = [[\bar{a}\bar{b}d]\bar{c}\bar{x}]$$

条件 (1), (2), ..., (5), (7), (8) のもとで, U は symplectic

algebra になる。また、次を仮定する。

$$(9) \quad -[a\bar{b}c] + [b\bar{a}c] = \langle a, b \rangle c$$

すなわち、

$$[a\bar{b}c] = \langle a, b \rangle c,$$

ただし、 $\langle, \rangle$ は U 上の交代双一次形式。条件 (1), (2), ..., (5), (7), (9) のもとで U は balanced symplectic algebra になる。もし、 U 内の積を $\{abc\} := \frac{1}{2}([a\bar{b}c] + [b\bar{a}c])$ によって定義すると、 U は積 $\{abc\}$ と (9) からの交代形式 $\frac{1}{2}\langle a, b \rangle$ に関して symplectic triple system になる。

triple system $U(\varepsilon)$ から Lie triple system $\mathcal{V} = U(\varepsilon) \oplus U(\varepsilon)$ を上のようには定め、 $\mathcal{G}$ を $\mathcal{V}$ の standard enveloping Lie algebra とする: $\mathcal{G} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{D}(\mathcal{V})$, $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ は $\mathcal{V}$ の内部微分のなす Lie algebra を示す。すると $\mathcal{G}$ は graded Lie algebra になる。

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{-2} \oplus \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2,$$

$$[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j},$$

ここで、 $L(t_1, t_2)$ を $\mathcal{V}$ の内部微分 $t \mapsto [t_1, t_2, t]$ とすると $\mathcal{G}_i$ は次のようである。

$$\mathcal{G}_{-2} : \sum_i L\left(\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ なる形の微分により張られるベクトル空間}$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{u}(\varepsilon) \oplus (0)$$

$\mathfrak{g}_0 : \sum_i \mathbb{C} \left(\begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b_i \end{pmatrix} \right)$ なる形の微分により張られるベクトル空間

$$\mathfrak{g}_1 = (0) \oplus \mathfrak{u}(\varepsilon)$$

$\mathfrak{g}_2 : \sum_i \mathbb{C} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b_i \end{pmatrix} \right)$ なる形の微分により張られるベクトル空間.

浅野氏は symplectic triple system $\mathcal{S}$ 上の交代形式 $\langle, \rangle$ と $\mathcal{S}$ から導かれる Lie triple system の Killing 形式との関係をしらべられた [2], 同氏の方法は $\mathfrak{u}(\varepsilon)$ に対してもそのまま成立つ.

triple system $\mathfrak{u}(\varepsilon)$ 上の双一次形式 γ を次により定義する.

$$\gamma(a, b) := \frac{1}{2} \operatorname{sp} [2(R(a, b) - \varepsilon R(b, a)) + \varepsilon L(a, b) - L(b, a)],$$

ただし, $L(a, b)$ および $R(a, b)$ は $\mathfrak{u}(\varepsilon)$ における左-, 右側積である. $\gamma(a, b) = -\varepsilon \gamma(b, a)$ が成立つ.

Lie triple system 上の Killing 形式 α は

$$\alpha(a, b) = \frac{1}{2} \operatorname{sp} [R(a, b) + R(b, a)]$$

により定義される [19, 20, 22] (ここで Ravisankar の式による).

triple system $\mathfrak{u}(\varepsilon)$ 上の形式 γ と $\mathfrak{u}(\varepsilon)$ から導かれる Lie triple system $\mathfrak{V} = \mathfrak{u}(\varepsilon) \oplus \mathfrak{u}(\varepsilon)$ の Killing 形式 α

との関係は

$$\begin{aligned} \chi \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \text{sp} \left[2\{R(b_1, a_2) - \varepsilon R(a_2, b_1)\} + \varepsilon L(b_1, a_2) \right. \\ &\quad \left. - L(a_2, b_1) + 2\{R(b_2, a_1) - \varepsilon R(a_1, b_2)\} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon L(b_2, a_1) - L(a_1, b_2) \right] \\ &= \chi(b_1, a_2) + \chi(b_2, a_1), \end{aligned}$$

となり, これから次の結果を得る.

定理 triple system $u(\varepsilon)$ に associate された Lie triple system $\mathcal{V} = u(\varepsilon) \oplus u(\varepsilon)$ に対して, 形式 χ が非退化であることと, $\mathcal{V}$ の Killing 形式が非退化であることとは等値である.

例 J を積 ab をもつ Jordan algebra とすると, J は積 $(abc) := a(bc) - b(ac) + (ab)c$ に関して Jordan triple system である. $\chi(a, b) = \text{sp } L(ab)$, さらに, $L(a)$ は J における左側積 $x \mapsto ax$ である.

(H. Asano) symplectic triple system S から $(abc) := \{abc\} - \langle a, b \rangle c$ により導かれた Freudenthal-Kantor triple system $u(1)$ において, $\chi(a, b) = (\dim S + 4)\langle a, b \rangle$.

5. Allison-Hein triple system T において, 次の

が成立つ。

$$(R(a,b) - R(b,a))x = K(a,b)x - K(b,x)a - K(x,a)(b),$$

$$\mathcal{M} := \{a \in T \mid L(a,a) = 0\} \quad \text{と} \quad \mathcal{M} < \mathcal{M},$$

$$a \in \mathcal{M}, K(a,b) = 0 \Rightarrow (aba) = (baa) = 0,$$

$$a \in \mathcal{M}, K(a,b) = 0, [L(a,b), K(a,x)] = 0 \Rightarrow K(a, xba) = 0,$$

$$a, b \in \mathcal{M}, K(a,b) = 0, [L(a,b), K(b,x)] = 0 \Rightarrow (a(bxb)a) = 0.$$

これから、

定理 Allison-Hein triple system T において, $\mathcal{M} := \{a \in T \mid L(a,a) = 0\}$ とおく. $a, b \in \mathcal{M}$ に対して

$$K(a,b) = 0, [L(a,b), K(a,x)] = [L(a,b), K(b,x)] = 0$$

が任意の $x \in T$ に対して成立するならば, $(L(a,b))^2 = 0$

が成立つ。

系 symplectic algebra M において, $a, b \in \mathcal{M}$ に対して $K(a,b) = 0$ ならば $(L(a,b))^2 = 0$.

系 (Freudenthal) 5-dim. symplectic geometry において, $P, Q \in \mathcal{M} = \{P \in R \mid P \times P = 0\}$, $\{P, Q\} = 0$ ならば $(P \times Q)^2 = 0$, すなわち, P と Q が交わる = 平面のとき $(P \times Q \neq 0$ ならば) $P \times Q$ は点である。

D を Allison-Hein triple system T での微分で $D^2 = 0$ とすると, $D\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, したがって, $a, b \in \mathcal{M}$ に対して $K(a,b) = 0$ のとき, $L(a,b)$ は T の微分になり,

$[L(a, b), K(a, x)] = [L(a, b), K(b, x)] = 0$ ならば, 上の定理より $L(a, b)M \subset M$. これから $\exp L(x, y) := I + L(x, y) + \frac{1}{2!} L(x, y)^2 + \dots$ とおくと, $\exp L(a, b)M \subset M$ となり $\exp L(a, b)$ は多様体 M を不変にする.

6. $\mathcal{V}$ を Lie triple system, $(,)$ を $\mathcal{V}$ の非退化対称双一次形式で, $\mathcal{V}$ の内部微分で不変なものとする:

$$([abx], y) + (x, [aby]) = 0.$$

半単純 Lie triple system $\mathcal{V}$ の Killing form はこの条件を満たす. Freudenthal に於ける symplecton の定義は Lie triple system に対しても適用できる. $a, b \in \mathcal{V}$ に対し $\mathcal{V}$ の一次写像 $\langle a, b \rangle$ を次式により定義する:

$$\langle a, b \rangle x = \frac{1}{2}(R(a, b) + R(b, a))x - \frac{1}{2}(a, x)b - \frac{1}{2}(b, x)a + \epsilon(a, b)x, \\ x \in T, \quad \epsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } \dim \mathcal{V} \text{ is even} \\ -1 & \text{if } \dim \mathcal{V} \text{ is odd} \end{cases}$$

$\mathcal{N} := \{a \in \mathcal{V} \mid \langle a, a \rangle = 0\}$ とおく. 容易にわかるように $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow [xaaa] = (a, x)a$ for all $x \in \mathcal{V}$, かつ $\langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow (a, a) = 0$.

補題 $a, b \in \mathcal{N}$ に対して, 次の式が成立する.

$$2R(a, b)^2 x - R(b, a)R(a, b)x + (a, b)R(a, b)x = (a, b)(a, x)b \\ \text{for all } x \in \mathcal{V}.$$

この補題で, さらに $(a, b) = 0$ を仮定すると次が得られ

3.

$$(i) \quad 2R(a, b)^2 = R(b, a)R(a, b) = R(a, b)R(b, a) = 2R(b, a)^2,$$

$$(ii) \quad R(a, b)^2 = L(a, b)R(a, b) = R(a, b)L(a, b),$$

$$(iii) \quad L(a, b)^2 + 2R(a, b)^2 = 0.$$

$a_1, a_2 \in \mathcal{N}$ に対して, 関係式

$$\langle a_1, a_2 \rangle^k a_i = (\epsilon - 1)^k (a_1, a_2)^k a_i, \quad (i = 1, 2)$$

が成立するから, $\langle a_1, a_2 \rangle^k = 0 \Rightarrow (a_1, a_2) = 0$.

定理 $a, b \in \mathcal{N}$ に対して

$$(i) \quad \langle a, b \rangle^2 = 0 \iff R(a, b)^2 = 0 \text{ または } L(a, b)^2 = 0,$$

$$(ii) \quad \langle a, b \rangle^3 = 0 \iff (a, b) = 0.$$

[証] もし $(a, b) = 0$ ならば, 形式 $(,)$ が内部微分に対し不変であることから $4\langle a, b \rangle^2 x = (R(a, b) + R(b, a))^2 x$ が成立することを注意する. 上の補題により次が得られる.

$$(*) \quad 4\langle a, b \rangle^2 = 6R(a, b)^2 = -3L(a, b)^2.$$

(i) の証: $\langle a, b \rangle^2 = 0$ ならば $(a, b) = 0$. ゆえに $R(a, b)^2 = L(a, b)^2 = 0$. 逆に $R(a, b)^2 = 0$ [または, $L(a, b)^2 = 0$] と仮定すると, $0 = R(a, b)^2 b = (a, b)^2 b$ [または, $0 = L(a, b)^2 b = (a, b)^2 b$] となり $(a, b) = 0$. ゆえに, $(*)$ より $\langle a, b \rangle^2 = 0$ が得られる.

(ii) の証: $(a, b) = 0$ と仮定する. 上の補題の後の

結果より, $R(a, b)^3 = R(a, b)R(b, a)^2 = 2R(a, b)^2R(b, a)$
 $= 4R(a, b)^3$ となり $R(a, b)^3 = 0$ が得られる.

$2(x, R(a, b)^2y) = -(x, L(a, b)^2y) = -(L(a, b)^2x, y)$ であるから (*) より $4\langle a, b \rangle^3 x = 3\{(R(a, b) + R(b, a))R(a, b)^2x - (a, R(a, b)^2x)b - (b, R(a, b)^2x)a\} = 0$, $L \neq 0$ として, $\langle a, b \rangle^3 = 0$ が得られる.

系 $a, b \in \mathcal{N}$ に対して $\langle a, b \rangle = 0 \Rightarrow R(a, b)^2 = L(a, b)^2 = 0$, $R(a, b)^2 = 0$ または $L(a, b)^2 = 0 \Rightarrow (a, b) = 0$.

$\mathcal{V}$ を Lie algebra から $[abc] = [[a, b]c]$ により導かれる Lie triple system とし, $(,)$ を $\mathcal{V}$ 上の双線形形式で, adjoint representation に対して不変, 即ち, $([ax], y) + (x, [a, y]) = 0$ とする. $a, b \in \mathcal{N}$, $(a, b) = 0$ のとき [7, §40] より 条件 $R(a, b)^2 = 0$ は $([a, b], x)[a, b] = 0$ とわかる. ゆえに $R(a, b)^2 = 0 \Leftrightarrow [a, b] = 0$. $L \neq 0$ として,

系 [7, 23] metasymplectic geometry において, symplecta Φ_1, Φ_2 に対して次が成立つ.

$$(i) \quad \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle^2 = 0 \iff [\Phi_1, \Phi_2] = 0,$$

$$(ii) \quad \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle^3 = 0 \iff (\Phi_1, \Phi_2) = 0.$$

[註] Freudenthal は symplecta Φ_1 と Φ_2 は $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$ のとき verbunden (joined), 上の系 (i), (ii) のときそれぞれ verflochten (interwoven), scharnierend (hinged)

とよんだ。symplecta Φ_1, Φ_2 の位置関係は $\Phi_1 = \Phi_2 \rightarrow$
 verbunden $\rightarrow$ verflochten $\rightarrow$ scharnierend $\rightarrow$
 一般の位置 になっている [7, §41]。くわしくは [7,
 8, 9, 21] を参照して下さい。

この小論の準備を通して浅野洋氏から色々とアドバイスを
 頂きましたことに感謝します。

References

- [1] B.N.Allison, A construction of Lie algebras from
 $\mathcal{J}$ -ternary algebras, Amer.J.Math. 98, 285-
 294 (1976).
- [2] H.Asano, On triple systems, Yokohama City University
 Ronsô, Ser.Nat.Sci., 27, 7-31 (1975) (in
 Japanese).
- [3] J.R.Faulkner, A construction of Lie algebras from
 a class of ternary algebras, Trans.Amer.
 Math.Soc., 155, 397-408 (1971).
- [4] J.R.Faulkner and J.C.Ferrar, On the structure of
 symplectic ternary algebras, Nederl.Akad.
 Wetensch.Proc.Ser.A, 75 = Indag.Math., 34,
 247-256 (1972).
- [5] H.Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur
 Oktavenebene, I,II, Nederl.Akad.Wetensch.
 Proc.Ser.A, 57 = Indag.Math., 16, 218-230;
 363-368 (1954).

- [6] H.Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, VIII, IX, Nederl.Akad.Wetensch. Proc.Ser.A, 62 = Indag.Math., 21, 447-465; 466-474 (1959).
- [7] _____, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, X, XI, Nederl.Akad.Wetensch. Proc.Ser.A, 66 = Indag.Math., 25, 457-471; 472-487 (1963).
- [8] _____, Lie groups in the foundations of geometry, Advances in Math., 1, 145-190 (1964).
- [9] H.Freudenthal and H.de Vries, Linear Lie groups, Academic Press, 1969.
- [10] W.Hein, A construction of Lie algebras by triple systems, Trans.Amer.Math.Soc., 205, 79-95 (1975).
- [11] _____, Innere Lie-Tripelsysteme und $\mathfrak{F}$ -ternäre Algebren, Math.Ann., 213, 195-202 (1975).
- [12] N.Jacobson, Structure and representations of Jordan Algebras, Amer.Math.Soc., 1971.
- [13] Y.Kakiichi, Relation between Hein's construction of Lie algebras and the construction of Lie algebras from symplectic triple systems, to appear.
- [14] I.L.Kantor, Некоторые обобщения йордановых алгебр, Тр.семинара по вект. и тенз.анализу, 16, 407-499 (1972).
- [15] _____, Models of exceptional Lie algebras, Soviet Math.Dokl., 14, 254-258 (1973).

- [16] M.Kikkawa, Geometry of homogeneous Lie loops,
Hiroshima Math.J., 5, 141-179 (1975).
- [17] M.Koecher, Imbedding of Jordan algebras into Lie
algebras, I, Amer.J.Math., 89, 787-815 (1967).
- [18] W.G.Lister, A structure theory of Lie triple systems,
Trans.Amer.Math.Soc., 72, 217-242 (1952).
- [19] K.Meyberg, Lectures on algebras and triple systems,
The University of Virginia, Charlottesville,
Va., 1972.
- [20] T.S.Ravisankar, Some remarks on Lie triple systems,
Kumamoto J.Sci.(Math.), 11, 1-8 (1974).
- [21] J.Tits, Groupes algébriques semi-simples et
géométries associées, Algebraical and
topological foundations of geometry. (Proc.
Colloq., Utrecht, 1959), 175-192, Pergamon,
1962.
- [22] J.A.Wolf, On the geometry and classification of
absolute parallelisms, I, II, J.Diff.Geo., 6,
317-334: 7, 19-44 (1972).
- [23] K.Yamaguti, Note on points and symplecta in the
metasymplectic geometry, Nederl.Akad.Wetensch.
Proc.Ser.A, 76 = Indag.Math., 35, 397-402 (1973).
- [24] _____, On weak representations of a class of
ternary systems, Mem.Fac.Gen.Ed., Kumamoto Univ.,
Ser.Nat.Sci., No.9, 1-8 (1974).
- [25] _____, Remarks on characterizations of the points
and symplecta in the metasymplectic geometry,
Mem.Fac.Gen.Ed., Kumamoto Univ., Ser.Nat.Sci.,
No.11, 1-8 (1976).

- [26] K.Yamaguti and H.Asano, On the Freudenthal's
construction of exceptional Lie algebras,
Proc.Japan Acad., 51, 253-258 (1975).