

三次元乱流の数値シミュレーション

京大・数理研 木田重雄 (Shigeo Kida)

京大・理・物理 村上洋一 (Youichi Murakami)

1. はじめに

乱流は、自然界にも、また人工的に作られた環境の中においても我々の回りの至る所に存在する流体運動で、日常生活とも非常にかかわり合いが深い。この乱流現象の研究は、従来から実用的な応用を目的とした様々な現象論や乱流モデル等が数多く提案され、その中には既に実用化されているものもある。しかしながら、現象そのものの理解という面に関しては、乱流運動が極めて複雑なために、まだまだ未知の部分が多く残っている。

近年の目覚ましい計算機科学の発展のおかげで、最近ようやく乱流の微細構造——慣性領域における乱流の構造——を、ナビエ・ストークス方程式の直接数値シミュレーションによって捉えることが出来るようになって来た。観測や測定では到底見ることの出来ない乱流の空間的構造の断面を詳細に解析出来ることが数値シミュレーションの利点の一つであり、数値シミュレーションが乱流の微細構造の励起のメカニズムの解明に一役かってくれることが大いに期待されている所以である。しかしながら、時間的にも空間的

にも極めて広い範囲に渡るスケールの渦運動が共存している乱流場を精度よく計算するためには、膨大な記憶容量と計算時間を必要とし、現在のスーパー・コンピュータをもってしても、何か特別の工夫をしない限り、一般にはまだまだ意味のある計算の実行が困難なのが現状である。

さて、乱流の数値シミュレーションはその研究目的によって大きく二つに分けることが出来よう。その一つは、平均流等の大きなスケールの運動にのみ注目するもので、乱流の小さなスケールの運動の詳細は問題にせず、その大きなスケールの運動に対する効果だけを、ある種のモデル化によって、考慮するという立場で、Large eddy simulation と呼ばれている。もう一つは、これとは逆に、乱流の微細構造に着目するもので、乱流の小さなスケールの運動は大きなスケールの運動の詳細には依らない普遍的な構造をしていることを期待した上で、大きなスケールの運動に対する条件としては、出来るだけ簡単なもの（例えば周期境界条件）を採用してシミュレートするという、いわば Small eddy simulation と呼ばれるべきものである。前者は乱流の実用的応用に重きを置いた立場であり、一方後者は現象のメカニズムの解明を目指したものであると言えよう。この小論では、後者の立場に立った数値シミュレーションの一つの試みの報告を行なう。

ところで、数値計算の方法は、差分法とスペクトル法に大別される。これらの方法にはそれぞれ一長一短があり、前者は計算速

度、後者は計算精度において優っている。従って、小さなスケールの運動の詳細はそれほど気にしないが、一般に複雑な境界条件を取り扱わなければならない Large eddy simulation には差分法が適しているし、逆に、小さなスケールの運動を高精度で計算する必要のある Small eddy simulation に対してはスペクトル法が適している。

さて、ここで乱流をシミュレートする場合に必要な自由度の数について考えてみよう。上に述べたように、乱流は、大小様々な渦運動から成り立っていると考えられ、しかも、その存在する渦運動のスケールは非常に広範囲に渡って連続的に分布している。今、乱流エネルギーの大半を担っている最大渦の長さスケールを L 、粘性によって直接熱に変換される最小渦の長さスケール（コルモゴロフの長さ）を l とすると、その比 L/l は微小尺度レイノルズ数 R_λ を用いて、

$$\frac{L}{l} \sim 15^{-3/4} R_\lambda^{3/2} \quad (1.1)$$

と見積ることが出来る (Hinze 1975)。例えば、 $R_\lambda = 100, 200, 300$ の時には、 L/l はそれぞれ 130, 370, 682 となる。ところで、乱流の微細構造に関してこれまでになされてきた多くの実験及び観測の結果を総合すると、コルモゴロフ・スペクトル（第5節の(5.3)参照）を少なくとも 10 倍或は 100 倍の波数帯に渡って

観測するためには、それぞれ $R_\lambda \sim 100$ 或は $R_\lambda \sim 300$ 程度のレイノルズ数が必要であることが分かる (Monin & Yaglom 1975 参照)。

最大渦と最小渦のスケールの比の三乗 $(L/l)^3$ は、おおまかに言えば、乱流場に励起されているフーリエ成分の総数に対応する。従って、スペクトル法による数値計算でコルモゴロフ・スペクトルを観測するためには、少なくとも (数百)³ のモードをとる必要があるわけである。

スペクトル法によるナビエ・ストークス方程式の直接数値シミュレーションで最大規模の計算は、著者たちの知っている限りでは、一般の周期流に対しては Rogallo (1981) によるモード数 128^3 の計算であるが、「対称性」を課した流れ (テイラー・グリーン渦と呼ばれる流れ) を用いて記憶容量・計算時間を節約するという工夫が Brachet et al. (1983) によってなされモード数 170^3 の計算が実行された。この計算によって、慣性小領域におけるエネルギー・スペクトルの $-5/3$ 乗則が捉えられかけている。

ここでは、このテイラー・グリーン渦よりさらに対称性の高い流れ (Kida 1985) に対し、モード数 340^3 のスペクトル法で行なった直接数値シミュレーションの方法とその結果について報告する (Kida & Murakami 1986)。特に、乱流の微細構造に着目し、慣性小領域におけるエネルギー・スペクトルの $-5/3$ 乗則及び乱流場の間欠的構造の特徴を表す速度の空間微分の高次モーメントを計算し実在乱流の観測データとの比較を行なう。

2. 超対称流

非圧縮・粘性流体の運動は、層流・乱流を問わず、連続の式

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} = 0 \quad (2.1)$$

と、ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_\ell u_j}{\partial x_\ell} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} u_j, \quad (2.2)$$

そして、これらに適当な初期条件及び境界条件を付け加えることによって記述される。ここに、 $u_j(\underline{x}, t)$ 、 $p(\underline{x}, t)$ 、 ρ 及び ν は、それぞれ流体の速度、圧力、(一定)密度、及び動粘性係数である。

添字は 1、2、3 のいずれかの値をとり、それぞれ直交座標軸 x_1 、 x_2 、 x_3 方向の成分を表す。また、一つの項に添字が二度現れた場合には、その添字について 1 から 3 まで和をとるという約束を用いている。

ところで、これらの方程式 (2.1)、(2.2) は、次のような変数変換に関して不変であるという性質をもっている。即ち、

- (1) 時間移動、 (2) 空間平行移動、
- (3) 空間回転、 (4) 空間反転、

$$(5) \text{ ガリレイ変換 } \underline{u}(\underline{x}, t) \longrightarrow \underline{u}(\underline{x} - \underline{U}t, t) + \underline{U}$$

$$(\underline{U} \text{ は任意の定ベクトル}),$$

$$(6) \text{ スケール変換 } \underline{x} \longrightarrow \alpha \underline{x}, t \longrightarrow \alpha^{-1} - h t, \underline{u} \longrightarrow \alpha^h \underline{u}$$

$$(\alpha \text{ と } h \text{ は定数})$$

に対して不変である。

これらの不変変換の意味するところは、例えば、(2)、(3)、(4) という空間変換に関して言えば、境界が無く流体が無限に広がっている場合、速度場がある時刻に (2) ~ (4) に属する変換のある組合せに対して不変であるといった対称性を持っていたとすれば、その対称性は後の時刻にも保存されるということである。

さて、数値計算の便宜のために、速度場は三つの座標軸 (x_1 , x_2 , x_3) 方向に周期的であるとしよう。また、不必要な非等方性が入って来ないようにそれら三つの周期は同じであるとしよう。

ただし、スケール変換 (6) により、この周期を 2π ととっても一般性を失わない。また、この周期条件は (2) の性質により保存される。

一般に数値計算においては、基本周期領域 $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2\pi$ を N^3 個の一辺 $2\pi/N$ の立方体に分け、速度場を N^3 個の格子点 (例えば、各立方体の頂点) における値を用いて近似的に表すのが普通である。一般の周期流は、これら N^3 個の格子点上の三次元ベクトルを指定することによって決定されるから、総計 $3N^3$ 個のデーターを必要とする。ところで、速度場に空間対称性

(勿論、ナビエ・ストークス方程式によって保存される対称性)がある場合には、より少ないデータで、同じ周期 2π の周期流を表わすことが出来る。上にあげた (2)、(3)、(4) という空間変換の組合せに対して不変な対称性の中で、基本周期領域が $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2\pi$ で、かつ、どの方向にもその周期が $\sqrt{2}\pi$ より短くはないという (準等方性) 条件のもとで、速度場を最も少ないデータで表すことの出来る対称性が Kida (1985) によって見出された。「超対称流」 (High - Symmetric Flow) と名付けられたその流れは、基本周期領域の $1/64$ の体積をもつ基本領域において速度のただ一つの成分だけを指定することによって決定されるので、データの数は $N^3/192$ で済むことになる。また、同時に、計算時間も一般周期流の $1/192$ に節約することが出来ることも分かっている。

以下では、このような対称性をもった流れの数値シミュレーションの方法とその結果について述べる。

3. 数値計算

「超対称流」は周期 2π の周期流であるから、速度場 $\underline{u}(\underline{x}, t)$ を

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = i \sum_{k_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{k_2=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{k_3=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(k, t) \exp[i k \cdot \underline{x}] \quad (3.1)$$

のようにフーリエ展開することが出来る。ここに、 $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ は成分が整数の波数ベクトルである。整数 N は高速フーリエ変換 (FFT) を用いることが出来るように 2 の巾に選んでおく。

ナビエ・ストークス方程式 (2.2) の圧力 $p(\underline{x}, t)$ は連続の式 (2.1) を使って、速度 $\underline{u}(\underline{x}, t)$ を用いて表すことが出来るので、結局、速度のみについての発展方程式を解けばよいことになる。その方程式に (3.1) の展開を代入すればフーリエ成分 $\tilde{u}(\underline{k}, t)$ についての連立常微分方程式が得られる。特に「超対称流」の場合には、速度の x_1 成分だけについての閉じた方程式になる。その具体的な形は紙面の都合で割愛せざるを得ないが、渦度を用いたこれと同等な方程式が Kida (1985) に与えられているので参照されたい。

さて、その微分方程式には $\tilde{u}_1(\underline{k}, t)$ についての二次の非線形項が含まれている。スペクトル法によるシミュレーションでは、この項の計算に最も多くの時間をとるわけであるが、我々はこれを能率よく計算するために、いわゆる「擬スペクトル法」を採用する。ただし、aliasing error が生じないようにするために $N/3$ を越える波数成分をもつフーリエ成分は恒等的に零と置く (Orszag 1971)。

従って、最大波数成分は $[N/3]$ ($N/3$ を越えない自然数) で、有効モード数は $(2[N/3])^3$ となる。

三次元乱流の力学において重要なメカニズムの一つは、低波数

帯から高波数帯へのエネルギー輸送の過程である。これを調べるためには、低波数成分のみが励起されている速度場を初期条件として選ぶのが都合がよい。「超対称流」の中で可能な限り低波数成分にのみフーリエ成分をもち、かつ恒等的に零ではない速度場は、図 1 に示すようなもので、具体的には

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3; 0) &= u_2(x_3, x_1, x_2; 0) = u_3(x_2, x_3, x_1; 0) \\ &= \sin x_1 (\cos 3x_2 \cos x_3 - \cos x_2 \cos 3x_3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

と表され、波数 $(k_1, k_2, k_3) = (\pm 3, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 3, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 3)$ の計 24 個のフーリエ成分だけが励起されている速度場である。

我々は、これを初期条件とし、上に述べた $\tilde{u}_1(\underline{k}, t)$ に関する常微分方程式系の時間発展をルンゲ・クッタ・ジル法で求めた。以下に紹介する例は、主として $N = 2^9 (= 512)$ 、即ちモード数 $[2N/3]^3 \approx 340^3$ 、粘性係数 $\nu = 0.0002$ と $\nu = 0.0005$ 、時間間隔 $\Delta t = 0.005$ の場合の結果である。計算は京都大学の FACOM VP100 を用いて行なった。1 時間ステップ当りの計算時間は 30 秒強であった。

4. エネルギー減衰則

流体の単位質量当りの運動エネルギー

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_0^{2\pi} \frac{|\mathcal{U}(\mathbf{x}, t)|^2}{2} d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

は、乱流の大域的な特徴を表す基本的な量の一つである。また、渦度の自乗平均

$$\mathcal{Q}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_0^{2\pi} \frac{|\nabla \times \mathcal{U}(\mathbf{x}, t)|^2}{2} d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

はエントロピーと呼ばれる量で、これらはお互いに

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -2\nu \mathcal{Q}(t) [\equiv -\epsilon(t)] \quad (4.3)$$

という関係で結びついている。ここに、 $\epsilon(t)$ はエネルギー減衰率である。

図 2 は、エネルギーの時間変化である。 $\nu = 0.0002$ と $\nu = 0.0005$ の二つの場合が示されているが、いずれの場合も、エネルギーは、初期時間帯 ($t \lesssim 2$) においては、あまり変化せず、 $t \approx 2$ 付近から減衰が顕著になることが分かる。このことは、次のように解釈することが出来る。初期時刻には、低波数にのみフーリエ成分が存在するだけであった [(3.2) 参照] ので、今のように粘性率が非常に小さい場合には、粘性項は非線形項に比べて殆ど完全に無視される。ところで、非線形項の作用によって、高波数

成分が次々と励起され、図 8b に見られるような細長い高渦度領域が発達するが、 $t \approx 2$ の頃になると、その高渦度領域の内部（或は、その近傍）で、粘性によるエネルギー散逸が顕著に起るようになる（図 9b 参照）というわけである。

エネルギー減衰期におけるエネルギーの時間変化は、 $6 \lesssim t \lesssim 9.5$ の範囲では

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 + A e^{-Bt} \quad (4.4)$$

（ここに $\mathcal{E}_0 \approx 0.017$ 、 $A \approx 1.8$ 、及び $b \approx 0.54$ である）のように時間の指数関数で表され、 $\mathcal{E}(t) \propto (t-t_0)^{-p}$ の形の代数的減衰則には従わないことが分かった。

多くの実験では、エネルギー減衰則は、乱流の種類——大きなスケールの運動の性質——によって異なった巾法則を示すが、今回の指数関数型の減衰則（4.4）は、小さな波数成分に δ 関数的に励起された初期条件（3.2）から出発したためであろうと考えられる。

図 3 はエネルギー減衰率 $\varepsilon(t)$ （エンストロフィーの 2ν 倍）の時間変化である。これは初期時間帯（ $t \lesssim 2$ ）で指数関数的に増大し、 $3 \lesssim t \lesssim 5$ で頭打ちになって、その後、指数関数的に

$$\varepsilon(t) = AB e^{-Bt} \quad (4.5)$$

の形で減少する [(4.3) と (4.4) を参照]。図 3 において、特に注目すべき点は、粘性係数が異なる二つの場合の $\varepsilon(t)$ の値が $t \gtrsim 5.5$ において極めてよく一致していることである。これは、 $\nu \rightarrow 0$ の極限で $\varepsilon(t)$ が有限の極限值をもつこと [このことは Kolmogorov (1941) の普遍平衡理論の前提条件になっている (例えば、Tatsumi (1980) 参照)] を示唆している。実際、このエネルギー減衰最大の時刻を過ぎる頃から、次節に述べるように、エネルギー・スペクトルにコルモゴロフの慣性小領域が現れるのである。

5. エネルギー・スペクトル

乱流の小規模運動の構造の特徴を表す代表的な量の一つに帯平均したエネルギー・スペクトルがある。これは、色々なスケールの渦運動のもっている相対的な運動エネルギーの割合を表す量である。我々の数値計算では、三次元エネルギー・スペクトルは、

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k-\frac{1}{2} \leq |k'| < k+\frac{1}{2}} |\tilde{u}(k', t)|^2, \quad (5.1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, [N/3]$$

によって定義される。

乱流の小さなスケールにおけるエネルギー・スペクトルの形が

Kolmogorov (1941) によって詳しく研究された。彼によれば、乱流場の大きいスケールの運動は、初期条件や境界条件に直接影響されるため、乱流ごとに異なった構造をとるが、小さなスケールの運動は初期条件や境界条件の詳細には依らない普遍的な形をとる。

波数空間で言えば、乱流のレイノルズ数が大きい場合には、波数空間の高波数側に、普遍平衡領域と呼ばれる領域が存在して、そこでの統計法則はエネルギー減衰率 $\varepsilon(t)$ 及び粘性係数 ν のみに依存して決まる（コルモゴロフの第一仮説）。この時、次元解析からエネルギー・スペクトルについての相似則、

$$E(k, t) = (\nu^5 \varepsilon(t))^{1/4} F((\nu^3 / \varepsilon(t))^{1/4} k), \quad (5.2)$$

ただし、 $F(\cdot)$ は無次元の関数、が導かれる。更に、レイノルズ数が極めて大きい場合には、粘性率 ν に依存しない波数領域があって（コルモゴロフの第二仮説）、

$$E(k, t) = A \varepsilon(t)^{2/3} k^{-5/3} \quad (5.3)$$

が成立する。ここに A は普遍定数（コルモゴロフ定数）であって、実験により

$$1.2 \lesssim A \lesssim 2.0 \quad (5.4)$$

の範囲にあることが予想されている（例えば、Monin & Yaglom 1975 参照）。

以上のコルモゴロフの普遍平衡理論は、後に述べるように、乱流場の間欠的構造を考慮にいれて多少修正されなければならない。

しかし、速度の二次のモーメントであるエネルギー・スペクトルに対しては、その修正はあったとしてもごく僅かであると考えられている。

我々の数値シミュレーションでは、初期時刻においては低波数モードしか存在していなかったが、エネルギー減衰率が最大値をとる頃（ $3 \lesssim t \lesssim 4$ ）には、乱流の充分細かいスケールの運動成分も励起された状態になっており、この時刻以降においては、コルモゴロフの相似則（5.2）及びコルモゴロフ・スペクトル（5.3）が観測されるものと期待される。

図 4 に $t = 4, 5, 6, 7$ における三次元エネルギー・スペクトルを示した。図を見易くするために、異なった時刻のスペクトルは縦方向にずらしてある。4本の直線は、コルモゴロフ定数 A を 2.0 とおいた時の、コルモゴロフ・スペクトル（5.3）である。

時刻 $t = 4$ において $10 \lesssim k \lesssim 60$ の範囲で、また、時刻 $t = 7$ においては $20 \lesssim k \lesssim 50$ の範囲でコルモゴロフ・スペクトルの成立する慣性小領域が存在することが分かる。因みに、 $t = 4, 5, 6, 7$ における微小尺度レイノルズ数 R_λ は、それぞれ 143、103、

83、71 であった。

また、 $t = 4, 5, 6, 7$ におけるエネルギー・スペクトルを粘性係数 ν とエネルギー減衰率 $\varepsilon(t)$ を用いて (5.2) のように規格化すると、それらは互いに重なり合い、コルモゴロフの相似則が成立していることが確かめられた。図 5 は $t = 4.5$ における規格化されたエネルギー・スペクトルである。直線はコルモゴロフ定数 A を 2.0 とおいた場合のコルモゴロフ・スペクトルである。

図 6 は $t = 5$ におけるエネルギー散逸スペクトル (エンストロフィー・スペクトル) $k^2 E(k, t)$ である。これを見ると、粘性によるエネルギー散逸は、波数 $k \approx 50$ 当りで最も強く起っていることが分かる。数値シミュレーションで用いた最大の波数は $k_{\max} = [N/3] = [512/3] = 170$ であるので、我々の計算はエネルギー消散領域を充分取り込んだものになっていることが分かる。これが、実測値 (5.4) と同程度のコルモゴロフ定数 ($A \approx 2.0$) を得た理由である。もし粘性領域を充分取り込んでいないと、異常に大きなコルモゴロフ定数を得ることになってしまう。例えば、Brachet et al. (1983) によるテイラー・グリーン渦を用いたシミュレーションでは $A \approx 4.0$ が得られており、取り込んだフーリエ成分の数がまだ充分ではないことを示している。

ところで、三次元エネルギー・スペクトルを実験で測ることは非常に難しく、実際は、その代りに縦及び横方向の一次元エネルギー・スペクトルの測定がなされている。そこで、我々も実験と比

較するために、縦及び横の一次元エネルギー・スペクトルをそれぞれ

$$E_1(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k_2, k_3} |\tilde{u}_1(k_1, k_2, k_3; t)|^2 \quad (5.5)$$

及び

$$E_2(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{k_2, k_3} |\tilde{u}_2(k_1, k_2, k_3; t)|^2, \quad (5.6)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, [N/3]$$

によって求めた。

図 7 (a)、(b) に、 $\nu = 0.0002$ の場合の $t = 5$ における規格化された一次元スペクトルを示した。直線は、速度場に等方性を仮定した場合のコルモゴロフ・スペクトル（但し、コルモゴロフ定数 $A = 2$ ）である。これらの図から、速度場の等方性（これは「超対称流」の持っている性質の一つ）及び、コルモゴロフ・スペクトルの成立が確認される。特に、図 7(a) と観測データ（例えば、Monin & Yaglom (1975) p. 491 図 76 c 参照）と比較すれば、グラフの縦・横のスケールを含め、スペクトルの形がぴったり一致していることが分かる。

6. 渦度集中領域とエネルギー散逸領域

乱流の小規模運動を励起するメカニズムは、一般に、ナビエ・ストークス方程式の非線形項に起因する渦度の引き伸ばし過程として理解されている。我々は、この引き伸ばし過程の様子を探るため、高渦度領域とエネルギー散逸領域の三次元構造の可視化を試みた。

図 8 は、高渦度領域の構造の変化を、 $N = 256$ 、 $\nu = 0.0005$ の場合のデーターを用いて示したものである。図 8(a)、8(b)、8(c) には、 $t = 0$ 、1.5、及び 5 において、渦度がそれぞれの時刻における渦度の絶対値の自乗の最大値 $|\omega|_{\max}^2$ の 70%、70% 及び 50% の値をとる面が描かれている。図 8(a) と 8(c) では領域 $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq \pi$ の範囲内での様子が、図 8(b) は、この時刻においてはこの領域の中央付近のみに高渦度領域が集中しているので、 $\pi/4 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 3\pi/4$ の範囲内での様子が示されている。初期時刻において球状に広がっていた渦度領域が $t = 1.5$ では細長く引き伸ばされているのが分かる。前節で述べたように、丁度この頃から粘性が効き始め、エネルギー減衰が目立って起るようになる。図 8(c) は、エントロフィーが最大値をとった後の時刻 ($t = 5$) における渦度領域の空間分布である。高渦度領域が多くの部分に分かれて場全体に広がっている様子がよく分かる。なお、 $|\omega|_{\max}^2$ は、 $t = 0$ 、1.5、5 においてそれぞれ 64、1772、4856 であった。

図 9 には、次節で述べる対数正規分布理論や β モデル理論等の「乱流場の間欠的構造」を考慮したエネルギー・カスケード理論において重要な役割を演じるエネルギー散逸領域の構造を示した。

図 9(a)、9(b)、9(c) には、 $t = 0, 1.5, 5$ において、局所的なエネルギー散逸率

$$\epsilon(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (6.1)$$

が、それぞれの時刻の最大値 $\epsilon_{\max}$ の 70%、80%、50% の値をとる面が描かれている。領域は、図 8 の対応する時刻のと同じである。

$t = 0$ においてずんぐりしていた散逸領域が $t = 1.5$ では非常に細長くなり、それが、後の時刻 ($t = 5$) では多くの小さな領域に分裂している様子が分かる。なお、 $\epsilon_{\max}$ は $t = 0, 1.5$ 及び 5 の時、それぞれ 30、826 及び 2864 であった。

局所的エネルギー散逸率と渦度の自乗は、

$$\frac{\epsilon}{\nu} = |\omega|^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (u_j u_k) \quad (6.2)$$

の関係で結ばれている。速度場が空間的に周期的な（或は、速度が有界である）場合には、(6.2) の空間平均をとると、エネルギー散逸率の平均と渦度の自乗平均は相等しく、

$$\left\langle \frac{\epsilon}{\nu} \right\rangle = \left\langle |\underline{\omega}|^2 \right\rangle \quad (6.3)$$

となることが証明出来る。しかしながら、図 8 と図 9 を見較べても明らかな様に、高渦度領域とエネルギー散逸領域はかなり異なった形をしている。これは、(6.2) の右辺第二項が無視出来ない量であることを示している。従って、従来から乱流の実験でしばしば行なわれて来た様に、 ϵ / ν の振舞を $|\underline{\omega}|^2$ のそれから類推するのは注意が必要である。

7. 間欠性

前節で述べたエネルギー散逸領域の空間的に局在した構造は、発達した乱流の特徴の一つとして、実験的に古くから知られているものである (Batchelor & Townsend 1949)。そして、これは第 5 節で述べた Kolmogorov (1941) の普遍平衡理論の基本的仮定に疑問を投げかける重要な実験事実でもある (Landau 1963)。即ち、普遍平衡理論では、エネルギー散逸率の平均値 $\langle \epsilon(\underline{x}, t) \rangle$ を支配的パラメーターとして用いているが、本来、時間的にも空間的にも大きく変動する $\epsilon(\underline{x}, t)$ のゆらぎの効果もその平均値と同様に重要なパラメーターとして取り入れなければならないのではないかという指摘である (Kraichnan 1974 も参照)。

さて、エネルギー散逸率の空間的変動の特徴を端的に表す量と

して、その二点相関 $\langle \varepsilon(\underline{x}, t) \varepsilon(\underline{x} + \underline{r}, t) \rangle$ がある。ここでは、一様等方性乱流を考えているので、この相関は $r = |\underline{r}|$ と t だけの関数となる。今、 r が或る長さスケールの範囲内 ($1 \ll r \ll L$) にある時、この相関関数に相似則

$$\langle \varepsilon(\underline{x}, t) \varepsilon(\underline{x} + \underline{r}, t) \rangle \propto r^{-\mu} \quad (7.1)$$

が成り立っていると仮定しよう。この μ は間欠指数と呼ばれ、実験的に

$$0.2 \lesssim \mu \lesssim 0.5 \quad (7.2)$$

の範囲にあることが知られている (Monin & Yaglom 1975)。(もし、 $\varepsilon(\underline{x}, t)$ に空間的変動がない場合には、 $\mu = 0$ である。)

$\varepsilon(\underline{x}, t)$ のパワー・スペクトル $E_\varepsilon(k)$ は、 $\langle \varepsilon(\underline{x}, t) \varepsilon(\underline{x} + \underline{r}, t) \rangle$ の三次元フーリエ変換として定義され、(7.1) の相似則が成り立っている場合には、

$$E_\varepsilon(k) \propto k^{-\frac{2}{\mu}} \quad (7.3)$$

の様な巾法則が現れる。ここに、

$$\xi = 1 - \mu \quad (7.4)$$

である。

図 10 に、 $\nu = 0.0002$ で $t = 5$ におけるエネルギー散逸率のパワー・スペクトル $E_\epsilon(k, t)$ を示した。 $k \approx 100$ 付近に僅かな折れ曲がりが見られるが (Kholmyanskiy 1972)、 $20 \leq k \leq 100$ の範囲で巾法則 (7.3) と最小自乗法で合わせると、

$$\mu \doteq 0.37 \quad (7.5)$$

が得られる。これは、これまでに実験で得られている値の範囲 (7.2) に含まれている。

エネルギー散逸率のこのような空間的ゆらぎの効果を取り入れた乱流の統計理論が、多くの人々によって提案されているが、中でも Kolmogorov (1962) 自身と Obukhov (1962) による対数正規分布理論と、Novikov & Stewart (1964) と Frisch et al. (1978) による β モデル理論が有力である。

これらの理論によれば、慣性小領域におけるエネルギー・スペクトルの巾法則は $-5/3$ 乗則より多少急にはなるが、間欠性によるこの修正はそれほど大きくはなく、実験的検証はなかなか難しいようである (エネルギー・スペクトルの巾は対数正規分布理論では $-5/3 - \mu/9$ 、 β モデル理論では $-5/3 - \mu/3$ で、 μ が (7.2) の範囲

にあるとすれば、その修正はそれぞれせいぜい 3 % 及び 9 % 程度である)。

むしろ、この間欠性の影響は、速度の空間微分の高次モーメントに顕著に現れる。今、規格化された速度の空間微分の n 次モーメント

$$F_n = \frac{\langle (-\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^n \rangle}{\langle (\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2 \rangle^{n/2}} \quad (7.6)$$

を考えよう。これは乱流の小さなスケールの構造に依存する量で、Kolmogorov (1941) の普遍平衡理論によれば、レイノルズ数に無関係な普遍量である。ところが、間欠性の存在する現実の乱流に対しては、これはレイノルズ数に依存して変化する。上述の間欠性を考慮したエネルギー・カスケード理論は

$$F_n \propto R_n^{\alpha_n} \quad (7.7)$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{3}{16} \mu n(n-2) & (\text{対数正規分布理論}) \quad (7.8) \\ \frac{3}{4} \mu(n-2) & (\beta \text{ モデル理論}) \quad (7.9) \end{cases}$$

を与える。

我々の数値計算は減衰乱流であるから、 R_λ は時間と共に変化する。従って、色々な時刻における F_n を求めれば、(7.7) の関係を調べる事が出来る。図 11 は、(7.7) の α_n を求めるために F_n と R_λ の関係を両対数目盛で表示したものである。 $\nu = 0.0002$ で $t = 2.5 \sim 7.5$ のデータを用いている。 $R_\lambda \approx 80$ を境として、 F_n の R_λ 依存性が大きく異なっているのが分かる (Antonia et al. 1982 p. 85 図 21 及び 図 22 参照)。定性的に異なる $R_\lambda \lesssim 80$ のデータを取り除き $90 \lesssim R_\lambda \lesssim 180$ の範囲で (7.7) の法則に合うように α_n を最小自乗法で求めてみた。

図 11 の直線はそうして求めた最適直線である。大きい n に対する数値データはかなりばらついているが、 α_n の n 依存性は β モデル理論の予測 (7.9) よりむしろ対数正規分布理論 (7.8) に良く一致することが分かった。

図 12 は (7.8) と比較するために、 α_n を $n(n-2)$ に対してプロットしたものである。計算値がこのグラフ上で直線的に並んでいるのは、対数正規分布理論を支持しているように思われる。直線の傾きを (7.8) と比較して、

$$\mu \approx 0.41 \quad (7.10)$$

が得られる。この値は、エネルギー散逸率のパワー・スペクトル

の中法則から得られた値 (7.5) と良く一致している。

図 13 及び図 14 には、それぞれ速度の空間微分の歪度 F_3 と扁平度 F_4 の時間変化が示されている。特に注目すべき点は、これらの値が、 $t \approx 2$ の付近で極端に大きくなることである。これは、この時刻付近で、初期条件 (3.2) から出発したナビエ・ストークス方程式の解が非粘性の局限で発散することを暗示するものである (Morf et al. 1980)。また、 F_3 及び F_4 の時間発展は、微小尺度レイノルズ数 R_λ で比較すると、対応する実験値と極めて良く一致していることが確かめられた (Antonia et al. 1982 p. 85 図 21 と図 22 参照)。

8. まとめ

速度場に空間的対称性を課して計算に必要なメモリーと時間を一般の周期流の場合の $1/192$ に節約することによって、モード数 340^3 という大規模な三次元ナビエ・ストークス乱流の直接数値シミュレーションを実行することが出来た。小さな波数のフーリエ成分のみが励起されている速度場から出発すると、ナビエ・ストークス方程式の非線形相互作用によって小さなスケールの運動が次々と励起される。やがて、エネルギー減衰率が最大値を取るようになる頃から、エネルギー・スペクトルに、慣性小領域の特徴を表す $-5/3$ 乗則が成立する波数領域が観測された。この時、微小尺度

レイノルズ数 R_λ はおおよそ 150 であった。

また、エネルギー減衰率が最大値を取った後の時刻において、エネルギーは、指数関数型の減衰則 $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 + A \exp(-Bt)$ を示した。

次に、高渦度領域とエネルギー散逸領域の三次元グラフィックスによる可視化によって、乱流場の間欠的構造を確認した。さらに、この間欠的特性を定量的に調べるため、エネルギー散逸率のパワー・スペクトルの巾法則、速度の空間微分の n 次モーメント ($n = 3, 4, \dots$) の R_λ 依存性を求め、間欠指数 μ を決定した。結果は、対数正規分布理論の予測するものと良く一致した。

速度の空間微分の歪度や扁平度、コルモゴロフ定数等、我々の求めた統計的諸量は、対応するレイノルズ数をもつ現実の乱流に対する測定値と極めて良く一致することが確かめられた。このことは、「超対称流」が、乱流の小さなスケールの構造の特徴を良く再現するものであることを示している。

今後の研究の主要な目標の一つとして計画しているのは、三次元グラフィックス等を用いて、流れ場の様々な断面の構造を調べ、乱流の微細構造を解明していくことである。

引用文献

R.A. Antonia, B.R. Satyaprakash & A.K.M.F. Hussain: J.

- Fluid Mech. 119 (1982) 55.
- G.K. Batchelor & A.A. Townsend: Proc. Roy. Soc. A199
(1949) 238.
- M.E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag, B.G. Nickel, R.H.
Morf & U. Frisch: J. Fluid Mech. 130 (1983) 411.
- U. Frisch, P.L. Sulem & M. Nelkin: J. Fluid Mech. 87
(1978) 719.
- J.O. Hinze: Turbulence (2nd ed.) (McGraw-Hill, New York
1975).
- M.Z. Kholmyanskiy: Izv. Atmos. and Oceanic Phys. 8 (1972)
818.
- S. Kida: J. Phys. Soc. Japan 54 (1985) 2132.
- S. Kida & Y. Murakami: J. Phys. Soc. Japan 55 (1986) 9.
- A.N. Kolmogorov: C. R. Acad. Sci. USSR 30 (1941) 301.
- A.N. Kolmogorov: J. Fluid Mech. 13 (1962) 82.
- R.H. Kraichnan: J. Fluid Mech. 62 (1974) 305.
- L.D. Landau & E. M. Lifschitz: Fluid Mechanics (Pergamon
Press 1963).
- A.S. Monin & A.M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics of
Turbulence (MIT Press 1975) Vol. 2.
- R.H. Morf, S.A. Orszag & U. Frisch: Phys. Rev. Lett. 44
(1980) 572.

E.A. Novikov & R.W. Stewart: Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser.

Geophys. 3 (1964) 408.

A.M. Obukhov: J. Fluid Mech. 13 (1962) 82.

S. Orszag: Stud. Appl. Math. 50 (1971) 293.

R.S. Rogallo: NASA TM-81315 (1981).

T. Tatsumi: Adv. Appl. Mech. 20 (1980) 39.

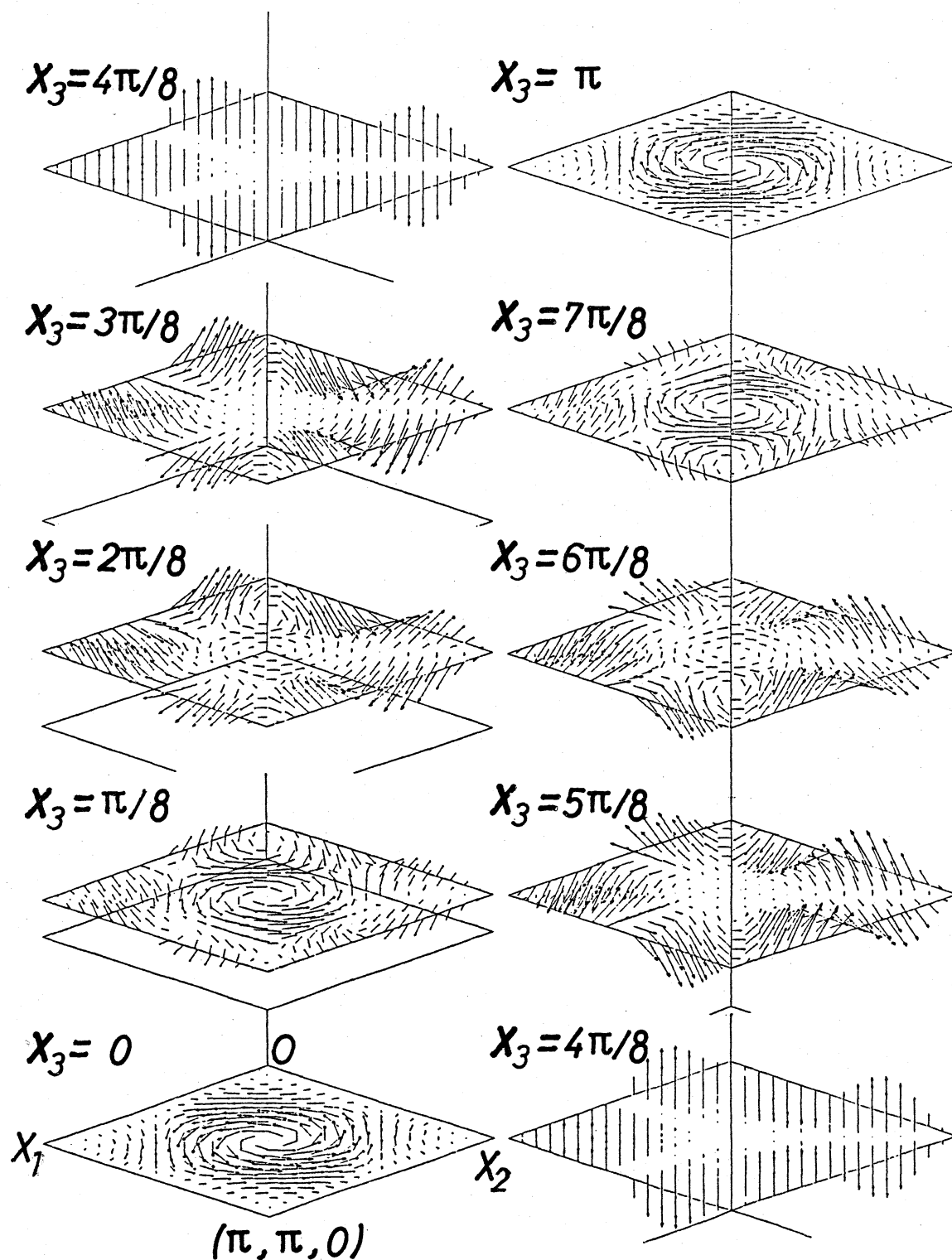


図 1. 初期速度場。 (x_1, x_2) 平面に平行な面内における速度ベクトル。

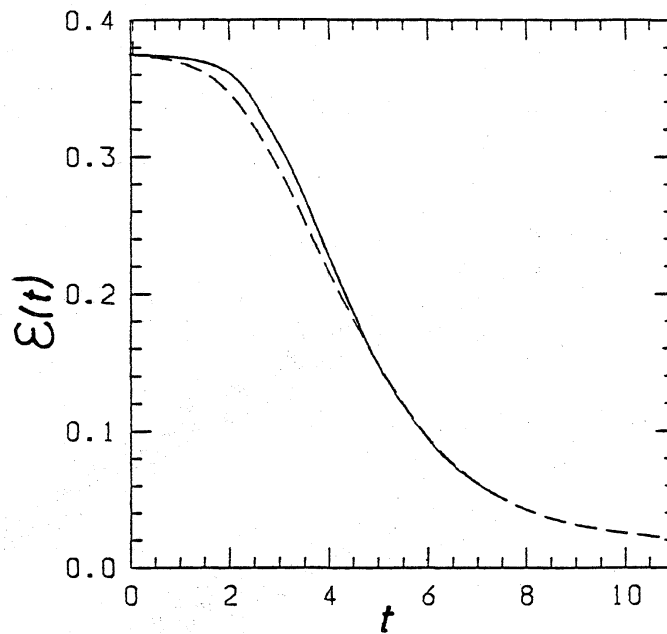


図 2. エネルギーの時間変化。実線は $\nu = 0.0002$ 、破線は $\nu = 0.0005$ の場合を表す。

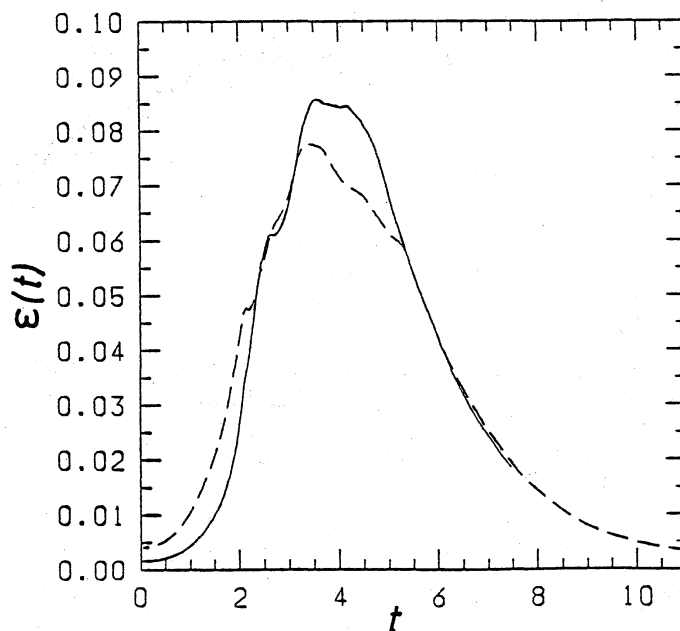


図 3. エネルギー減衰率の時間変化。実線は $\nu = 0.0002$ 、破線は $\nu = 0.0005$ の場合を表す。

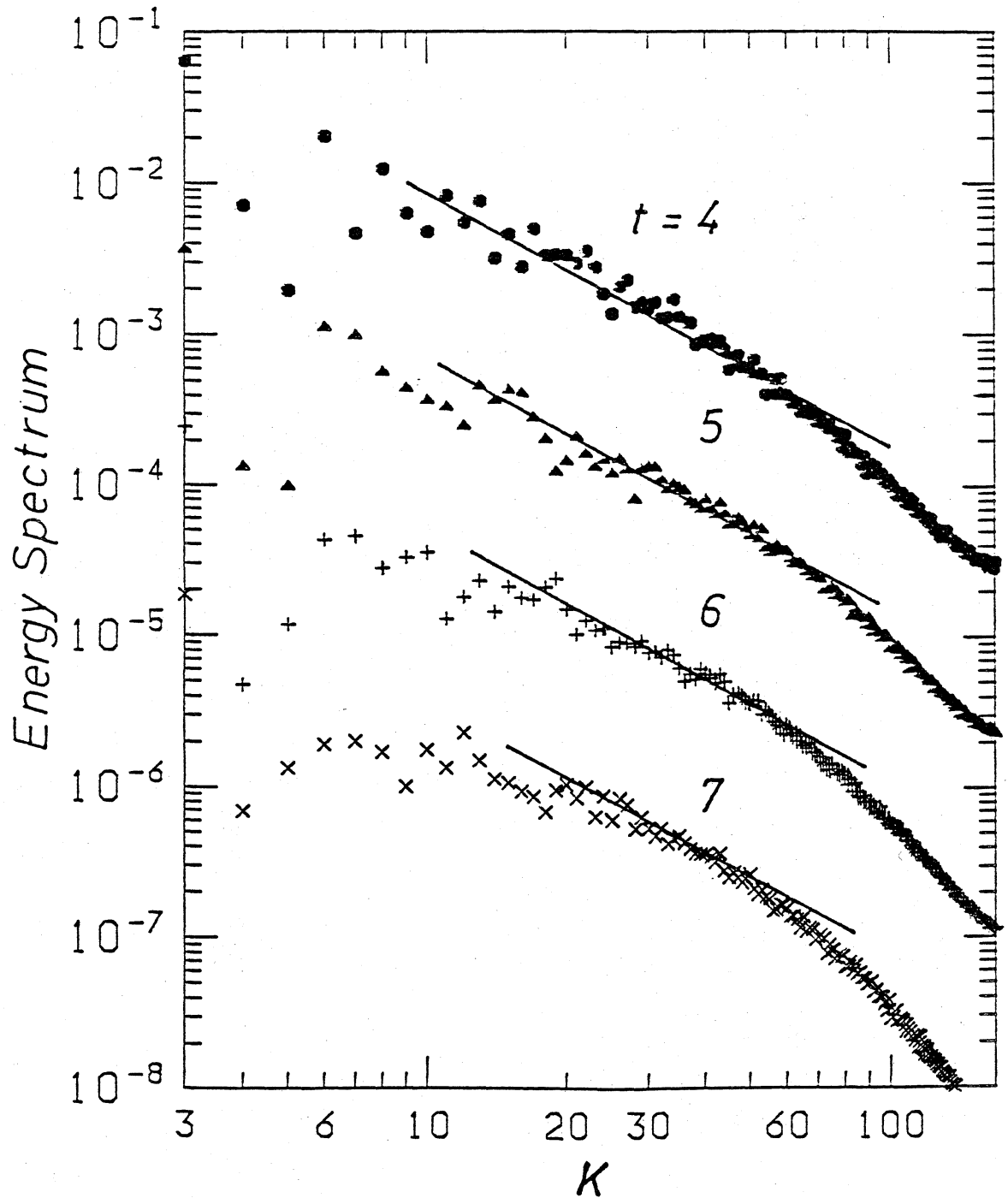


図 4. 三次元エネルギー・スペクトルの時間変化。● $E(k,4)$,
 ▲ $E(k,5) \times 10^{-1}$, + $E(k,6) \times 10^{-2}$, × $E(k,7) \times 10^{-3}$.
 直線はコルモゴロフ・スペクトル
 $E(k,t) = 2 \varepsilon(t)^{2/3} k^{-5/3}$ を表す。

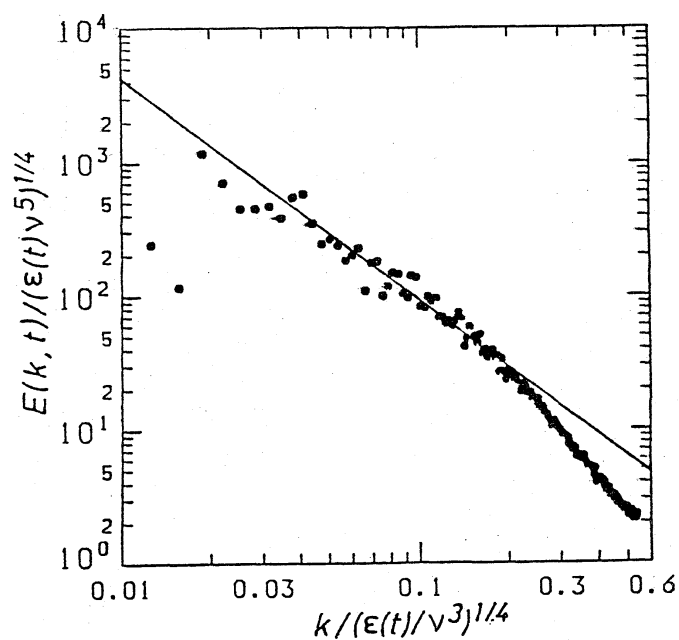


図 5. 規格化されたエネルギー・スペクトル。直線はコルモゴロフ・スペクトル $E(k, t) = 2 \varepsilon(t)^{2/3} k^{-5/3}$ を表す。

$t = 4.5$.

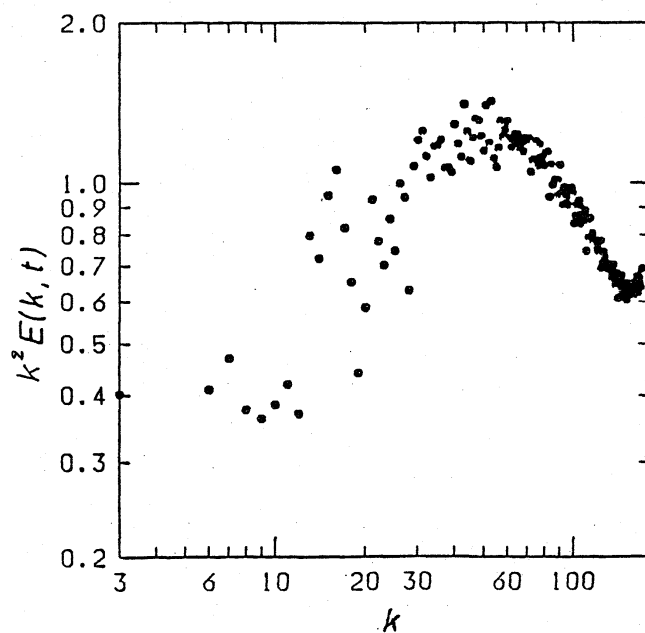


図 6. エネルギー散逸スペクトル。 $t = 4.5$.

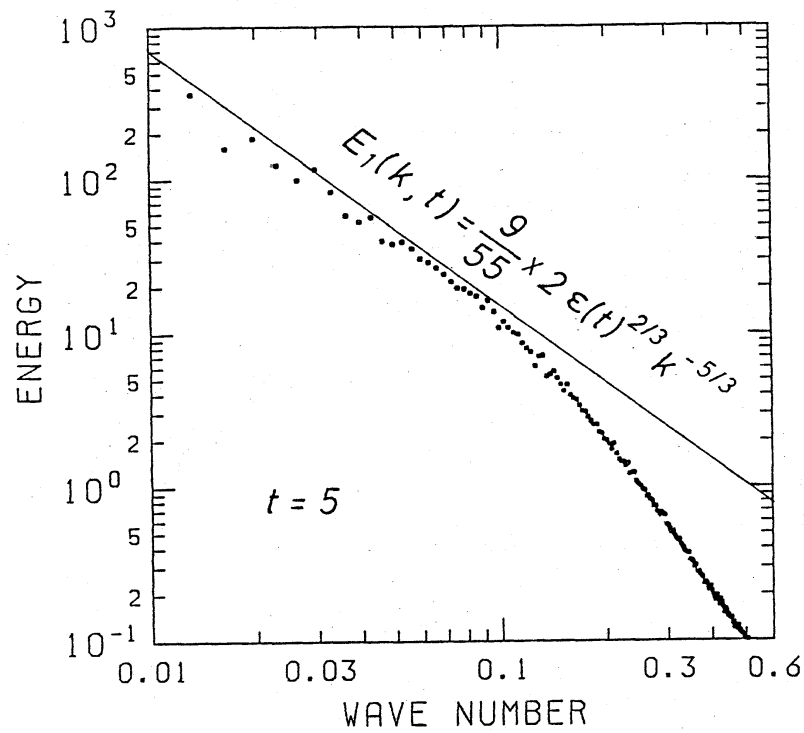


図 7(a). 縦一次元エネルギー・スペクトル。

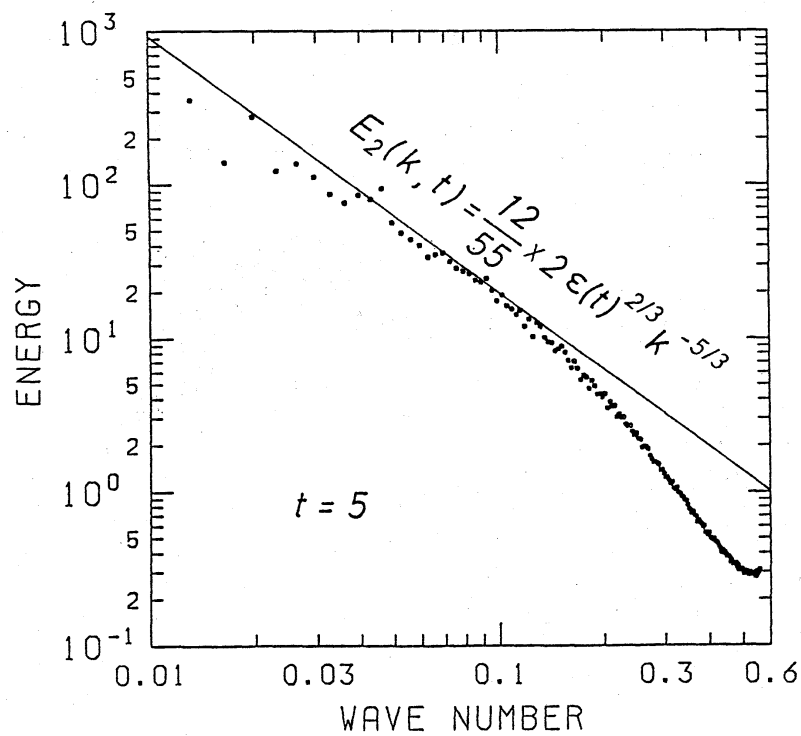


図 7(b). 横一次元エネルギー・スペクトル。

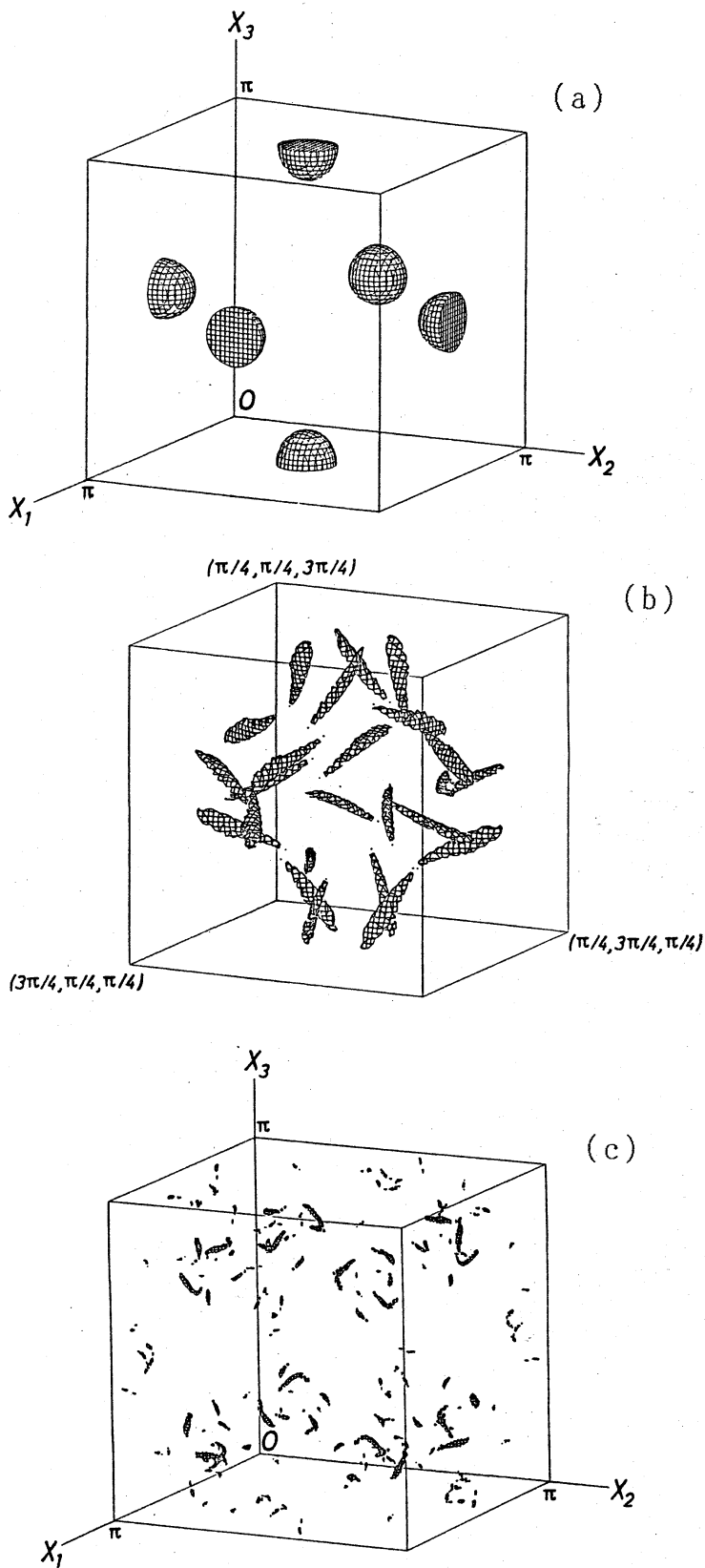


図 8. 高渦度領域。

それぞれ (a) $t = 0$

$$|\underline{\omega}|^2 = 0.7 |\underline{\omega}|_{\max}^2$$

$$|\underline{\omega}|_{\max}^2 = 64,$$

(b) $t = 1.5,$

$$|\underline{\omega}|^2 = 0.7 |\underline{\omega}|_{\max}^2$$

$$|\underline{\omega}|_{\max}^2 = 1772,$$

(c) $t = 5,$

$$|\underline{\omega}|^2 = 0.5 |\underline{\omega}|_{\max}^2$$

$$|\underline{\omega}|_{\max}^2 = 4856$$

の面を表す。

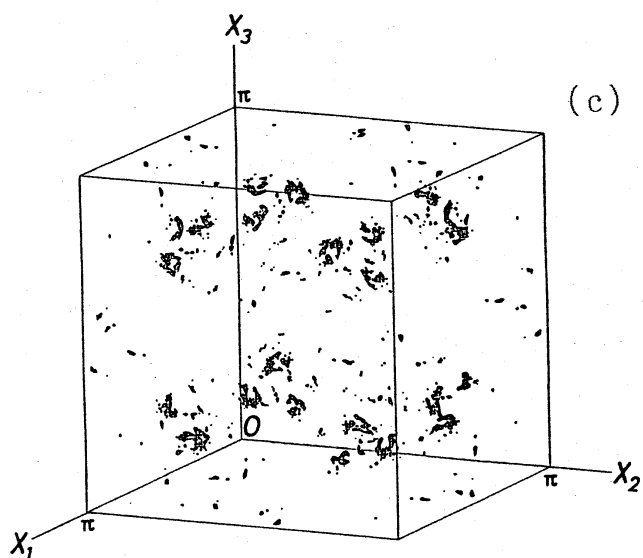
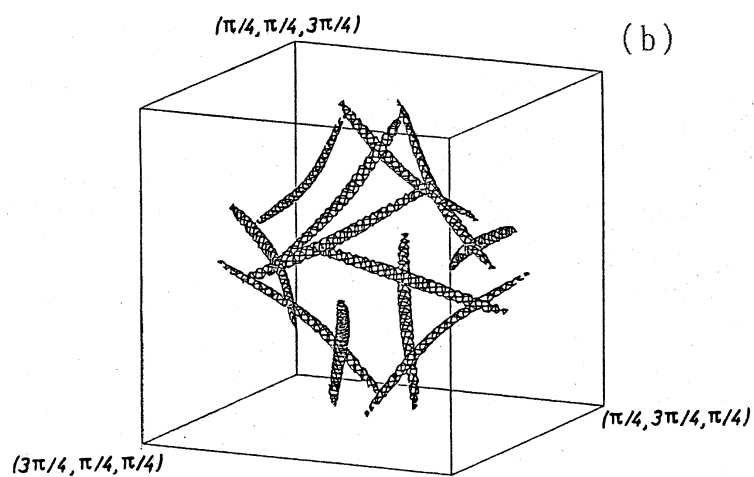
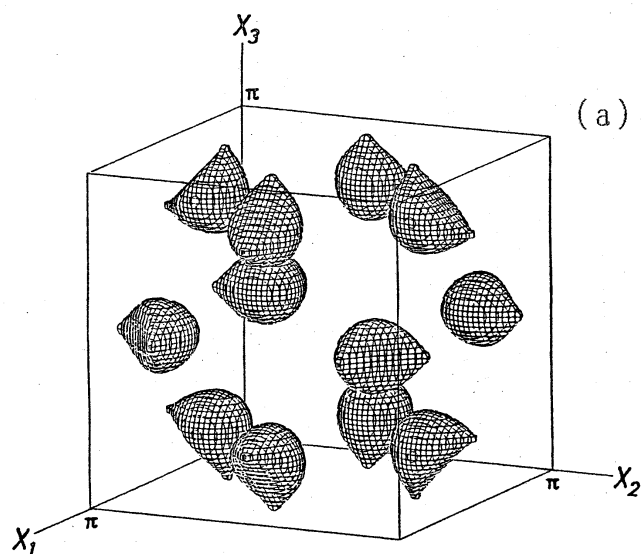


図 9.

エネルギー散逸領域。

それぞれ (a) $t = 0$

$$\varepsilon = 0.7 \quad \varepsilon_{max}$$

$$\varepsilon_{max} = 30,$$

(b) $t = 1.5$

$$\varepsilon = 0.8 \quad \varepsilon_{max}$$

$$\varepsilon_{max} = 826,$$

(c) $t = 5$

$$\varepsilon = 0.5 \quad \varepsilon_{max}$$

$$\varepsilon_{max} = 2864$$

の面を表す。

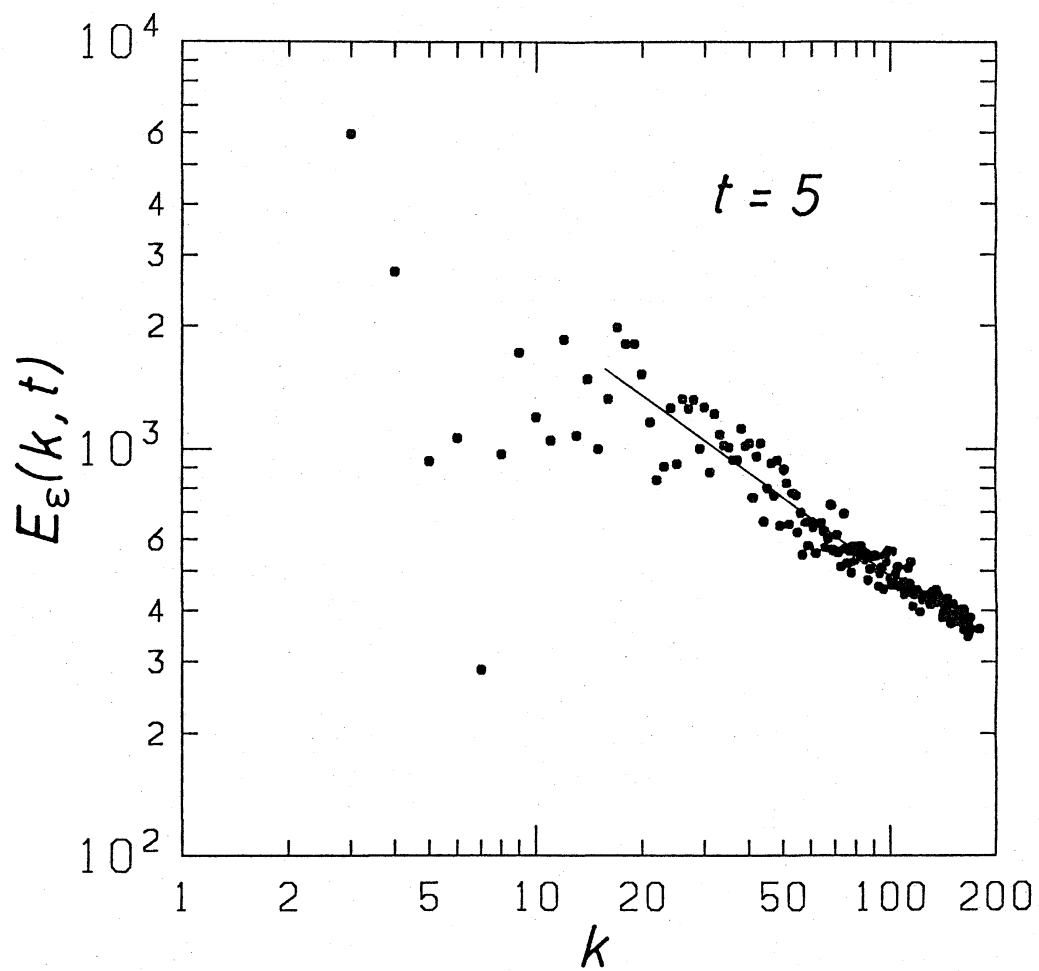


図 10. エネルギー散逸率のパワー・スペクトル。

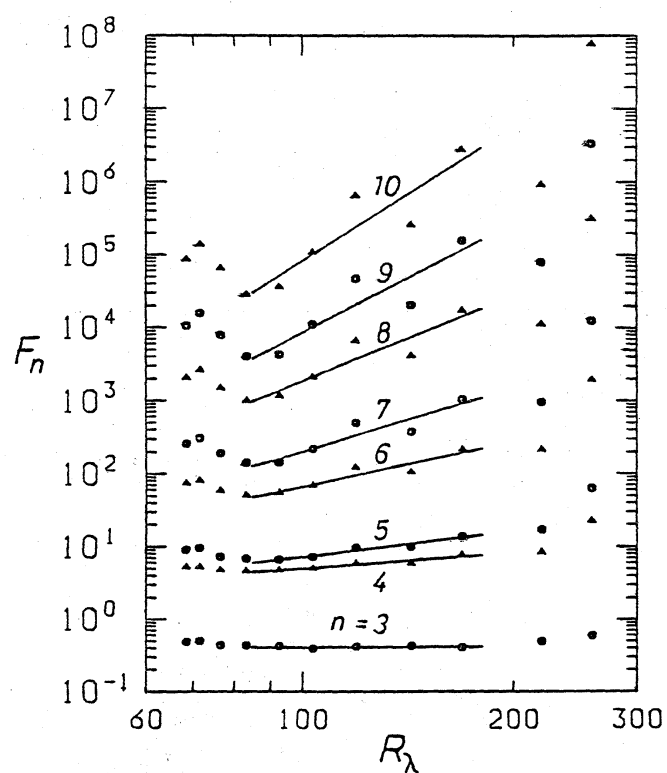


図 11. 速度微分の n 次モーメントのレイノルズ数依存性。

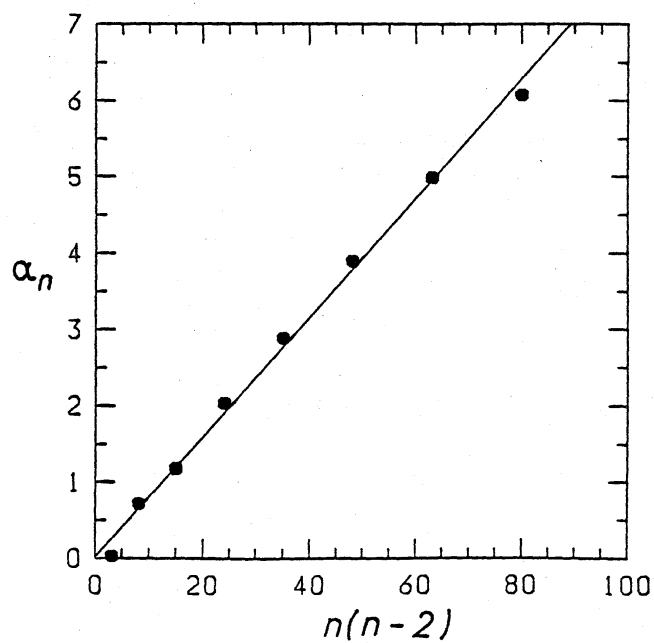


図 12. 特性指数 α_n . 直線は $\alpha_n = 0.078 n(n-2) + 0.04$.

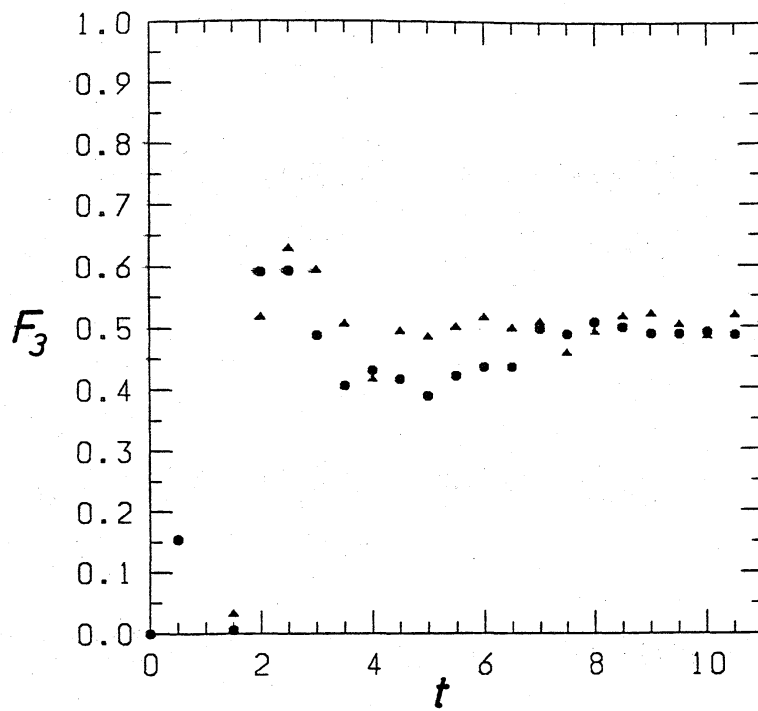


図 13. 速度の歪度の時間変化。 ● $\nu = 0.0002$, ▲ $\nu = 0.0005$.

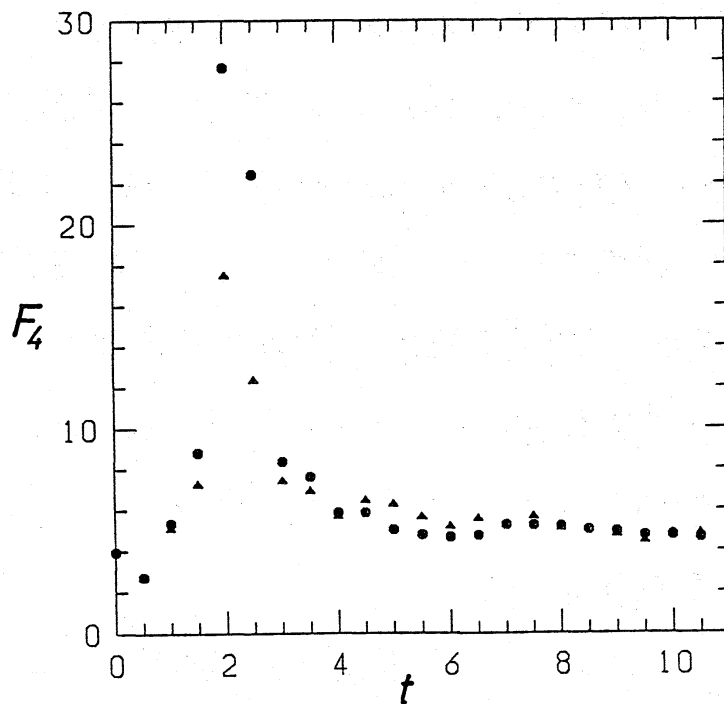


図 14. 速度の扁平度の時間変化。 ● $\nu = 0.0002$, ▲ $\nu = 0.0005$.