

BMO Functions and Algebras on the Unit Disc

坂城大 理 林 実樹広

単位円板 $U = \{ |z| < 1 \}$ 上で有界正則な関数の境界値関数の全体を H^∞ , 単位円周 $\partial U = \{ |z| = 1 \}$ 上の Lebesgue 測度を $d\theta$ で表わす. $f \in H^\infty$ が $|f| = 1$ a.e. $d\theta$ を満たすとき, inner 関数と云われる.

1968年に, Douglas は次の予想を提出した: 「 H^∞ を含む $L^\infty = L^\infty(d\theta)$ の (essential sup-norm に於いて) closed な subalgebra B は inner 関数のある族 I の複素共役 $\{ \bar{f} : f \in I \}$ と H^∞ によって生成されるか?」 この予想は, Douglas-Rudin (1969, *Pacific J. Math.*), Sarason (1973, *Bull. Amer. Math. Soc.*; 1975, *Trans. Amer. Math. Soc.*), Axler (preprint), Weight (1975, *Bull. Amer. Math. Soc.*), Chang (1977, *Amer. J. Math.*) によつて部分的に解かれた. そして, 最終的には, Chang (1976, [1]) 及び Marshall (1976, [8]) によつて肯定的に解決されたことは御存じの通りであります. (しかしながら, 彼等の証明には, Fefferman-Stein [5] による BMO 関数の理論や Corona 問題を解いた Carleson の手法などが用いられている

す。特に、[5] の場合 $\mathbb{R}^n$ 上で理論を展開しているため、単位円の場合との関係も確かめて見る必要があるように思われます。

本講演はこの間の橋渡しをすることと、合せて BMO 関数の理論の一部でも紹介できればということも目的に行なわせていただきます。なお、このノートの内容は、多くの部分で Professor J. Garnett の講義 (University of California, Los Angeles, 1976-77) に負っていることを付け加えておきます。

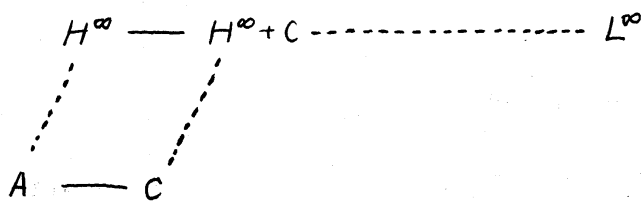
以下、このノートの内容を目次により示めておきます。

1. Douglas 予想の周辺
2. BMO 関数
3. Poisson kernel と BMO 関数
4. Carleson 測度と BMO 関数
5. Blaschke product
6. Douglas 予想の証明 (スケッチ)
7. その他の結果

1. Douglas 予想の周辺 Douglas 予想は, Teoplitz operator に関連して考えられたそうですが, これを関数環の問題として捕えた場合, どのような性格をもつものかをまず考えて見たい。

$\mathbb{D}$ 上の複素数値連続関数の全体を C , C の元でその多項式

により一様近似される関数全体を A と書く. 関数環 A は普通 disc algebra と呼ばれている. よく知られているように, Wermer (1953, Proc. Amer. Math. Soc.) は disc algebra A は C の中で極大であることを示めた. すなわち, $A \subseteq B \subseteq C$ なる closed subalgebra B があれば, $A=B$ または $C=B$ に限るというのである. これに対して, Hoffman-Singer (1960, Acta Math.) は, H^∞ と L^∞ の間には (essential sup-norm に就いて) closed T_0 subalgebra が無限に沢山あることを示めた. 更に, B が H^∞ を真に含む closed subalgebra T_0 ならば, $H^\infty + C \subseteq B$ とすることも示めた (1962, [6]). 従って, weakly* closed T_0 subalgebra に限って考えれば, H^∞ は L^∞ で極大な, ている: (しかしながら, 一方では norm closed T_0 subalgebra が H^∞ と L^∞ の間に沢山あると言う話である. その後, Sarason (1967, Trans. Amer. Math. Soc.) は代数和 $H^\infty + C$ が closed T_0 subalgebra とすることも示めた. 以上, わか, T_0 ことを図示すると



という関係にある. ここで, — 線の間には真の closed subalgebra は存在しない. すなわち, 換言すれば, Douglas予想とは, H^∞ と L^∞ の間の closed subalgebra の特徴付けに関係しているとも云

うこともできる.

2. BMO 関数 dm を $\mathbb{R}^n$ (又は, ∂U) 上の Lebesgue 測度とする. 可測集合 E に対して, $|E| = dm(E)$ と書く. 又, 以下で $\mathbb{R}^n$ の正方形と云えば, 座標軸に平行な辺をもつものに限ることにする.

局所可積分関数 f に対して,

$$\|f\|_* = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| dm, \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f dm$$

とおく. 但, I は $\mathbb{R}^n$ の正方形 (又は, ∂U の弧) 全体を走るものとする. $\|f\|_* < \infty$ と仮定すると, f は bounded mean oscillation をもつといい, 略して, f は BMO 関数とも云う. 定義より, $L^\infty \subset \text{BMO}$ と仮定することはすぐわかる. 又, 次の性質も明らか:

$$1^\circ \quad \|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

$$2^\circ \quad \|f+c\|_* = \|f\|_*, \quad \|cf\|_* = |c| \|f\|_* \quad (c \in \mathbb{C})$$

$$3^\circ \quad \|f\|_* = 0 \text{ ならば } f \equiv c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

従って, $\text{BMO}/\mathbb{C}$ は normed space である. 更にこれが Banach space となることも示される (定理 2.6).

補題 2.1. (Calderon-Zygmund 分解; $n=1$ のときは, H. Riesz にある) 関数 u を $\mathbb{R}^n$ の正方形 I_0 上で可積分で,

$$\frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} |u| dm \leq C$$

とする。このとき、互いに交わらない閉正方形 $I_1, I_2, \dots$ で、次の3つの性質をもつものが取れる：

$$a) \quad |u| \leq C \quad \text{a.e. on } I_0 \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \dots)$$

$$b) \quad C < \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |u| \, dm \leq 2^n C$$

$$c) \quad \sum_{k \geq 1} |I_k| \leq \frac{1}{C} \int_{I_0} |u| \, dm.$$

証明 まず I_0 の各辺を2等分するように、 I_0 を 2^n 個の正方形に分割する。細分された正方形を以下同様に分割して行って、この途中に現われた閉正方形の全体を $\{\omega\}$ とする。そこで、 $\{\omega\}$ の部分族を

$$\{I_k\} = \left\{ \omega : \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} |u| \, dm > C \text{ とする } \omega \text{ の中で極大} \right\}$$

と取りなす。実際、 I_k が互いに交わらないことは明らか。従って、c) はすぐわかる。 I_k が ω の各辺を2等分して得られたとすれば、

$$\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |u| \, dm \leq \frac{2^n}{|\omega|} \int_{\omega} |u| \, dm \leq 2^n C.$$

よって、b) が得られた。次に、 $x \in I_0 \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \dots)$ かつ $x \notin \bigcup_{\omega} \omega$ とすると、 x を含むすべての ω に対して、

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} |u| \, dm \leq C.$$

$|\bigcup \partial \omega| = 0$ であるから、これは $|u| \leq C$ a.e. on $I_0 \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \dots)$ を導びく。よって、a) も得られた。//

定理 2.2. (John - Nirenberg [7]) $f \in BMO$ とする。 $I \in \mathbb{R}^n$

の正方形 (又は, ∂U の弧) とすれば,

$$|\{x \in I : |f - f_I| > \lambda\}| \leq C_1 |I| \exp\left(-\frac{C_2 \lambda}{\|f\|_p}\right).$$

但, C_1, C_2 は $\mathbb{R}^n$ の次元 n に関し関係する定数.

証明 $\|f\|_p = 1$ とし示せば十分. $E_{\lambda, I} = \{x \in I : |f - f_I| > \lambda\}$ とおき, 更に

$$F(\lambda) = \sup_I |E_{\lambda, I}| / |I|$$

とする. このとき, 次の性質がある:

- i) $F(\lambda) \leq \min(1, \frac{1}{\lambda})$
- ii) $F(\lambda_1) \leq F(\lambda_2)$ if $\lambda_1 \geq \lambda_2$
- iii) $F(\lambda + 2^n c) \leq \frac{1}{c} F(\lambda)$ if $c \geq 1$.

実際, i) と ii) は容易に確かめられる. iii) を見るために, $I_0 \in \mathcal{I}$ 一つ固定する. $f_{I_0} = 0$ と仮定してよい. $\frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} |f| dm \leq \|f\|_p \leq c$ であるから, I_0 の Calderon-Zygmund 分解 $I_1, I_2, \dots$ を考える.

前補題, a) より

$$E_{\lambda + 2^n c, I_0} \subseteq \bigcup_{k \geq 1} I_k \quad \text{a.e.}$$

更に, 前補題, b) により, $x \in E_{\lambda + 2^n c, I_0} \cap I_k$ ならば

$$|f(x) - f_{I_k}| \geq |f(x)| - \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f| dm \geq \lambda.$$

すなわち, $E_{\lambda + 2^n c, I_0} \cap I_k \subseteq E_{\lambda, I_k}$ を得る. 故に,

$$|E_{\lambda + 2^n c, I_0}| \leq \sum_{k \geq 1} |E_{\lambda, I_k}| \leq F(\lambda) \sum_{k \geq 1} |I_k|.$$

よって, 前補題, c) により iii) も示めされた. さて, $\lambda > 1$ とすると, $1 + k2^n c < \lambda \leq 1 + (k+1)2^n c$ とある整数 k が決まる.

ここで, ii) 及び, $c=e$ として iii) を用いれば

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\leq F(1+k2^ne) \leq e^{-1} F(1+(k-1)2^ne) \\ &\leq \dots \leq e^{-k} F(1). \end{aligned}$$

i) より $F(1) \leq 1$, 又 $k \geq \lambda 2^{-n} e^{-1} - (2^{-n} e^{-1} + 1)$ であるから

$$F(\lambda) \leq e^{2^{-n} e^{-1} + 1} \exp(-\lambda 2^{-n} e^{-1})$$

この不等式は, $0 \leq \lambda \leq 1$ で成立 ($\because 2^{-n} e^{-1} + 1 \geq \lambda e^{-n} e^{-1}$).

よって求める不等式が得られた. //

系 2.3. f が $\mathbb{R}^n$ (又は, ∂U) 上の局所可積分関数ならば

$$\|f\|_*^p \leq \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I|^p dm \leq C_p \|f\|_*^p, \quad 1 \leq p < \infty.$$

ここで, C_p は p 及び, 次元 n に^(依存)関係した定数.

証明 才1の不等式は自明. 才2の不等式を示め. I を一つ固定して, $m_I(\lambda) = |\{x \in I : |f - f_I| > \lambda\}|$ とおく. 図形 $\{(x, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq |f(x) - f_I|^p\}$ の面積と思て, Fubini の定理を使うと

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I|^p dm &= \frac{p}{|I|} \int_0^\infty m_I(\lambda) \lambda^{p-1} d\lambda \\ &\leq p \int_0^\infty C_1 e^{-C_2 \lambda / \|f\|_*^p} \lambda^{p-1} d\lambda \\ &= p C_1 C_2^{-p} \|f\|_*^p \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \\ &= (p C_1 C_2^{-p} \Gamma(p)) \|f\|_*^p // \end{aligned}$$

系 2.4. $f \in \text{BMO} \Leftrightarrow$ ある(後, τ , q べての) $1 \leq p < \infty$ が図

定されたとき, すべての正方形 (又は, 弧) I に対して, 数 $c_I \in \mathbb{C}$ があつて

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f - c_I|^p dm \leq M \quad (M \text{ はある定数}).$$

又, このとき, $\|f\|_*^p \leq 2^p M$ が成立つ.

証明 必要性は明らか. 十分を示めるには, 最後の不等式を示めればよい. 実際, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ ($a, b \geq 0, 1 \leq p < \infty$) に注意すれば, $\left(\text{任意の } c \in \mathbb{C} \text{ に対して} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I|^p dm &\leq 2^{p-1} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f - c|^p dm + |f_I - c|^p \right) \\ &\leq 2^p \frac{1}{|I|} \int_I |f - c|^p dm. \end{aligned}$$

よつて, 前系により $\|f\|_*^p \leq 2^p M$ を得る. //

補題 2.5. $f \in BMO$ とする. 2つの正方形 (又は, 弧) $I_0 \subseteq I$ があれば, 次の不等式が成立.

$$a) \quad |f_{I_0} - f_I| \leq \frac{|I|}{|I_0|} \|f\|_*$$

$$b) \quad |f_{I_0} - f_I| \leq e \left(1 + \log \frac{|I|}{|I_0|} \right) \|f\|_*.$$

証明 a) $|f_{I_0} - f_I| = \frac{1}{|I_0|} \left| \int_{I_0} (f - f_I) dm \right|$
 $\leq \frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} |f - f_I| dm \leq \frac{|I|}{|I_0|} \|f\|_*$

b) $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_m = I$ なる増加列で

$$|I_k| = e |I_{k-1}| \quad (1 \leq k < m), \quad |I_m| \leq e |I_{m-1}| = e^m |I_0|$$

と取るものを取る. $m \leq 1 + \log \frac{|I|}{|I_0|}$ に注意すれば, a) を使って

$$|f_{I_0} - f_I| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |f_{I_{k-1}} - f_{I_k}| + |f_{I_{m-1}} - f_I|$$

$$\leq e m \|f\|_X \leq (1 + \log \frac{|I|}{|I_0|}) \|f\|_X //$$

上の補題は、次節で使うためのものであるが、ここでは、この補題を使って $BMO/\mathbb{C}$ が Banach space となることを示めておく。

定理 2.6. BMO 空間は complete である。

証明 $\mathbb{R}^n$ の場合を示そう。 $\|f_n - f_m\|_X \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) とする。正方形 I_0 を一つ固定する。このとき、すべての n に対して、 $(f_n)_{I_0} = 0$ と仮定してよい。任意の正方形 I に対して、 I_0 と I の両方を含む正方形 I' を取って固定すると

$$\begin{aligned} |(f_n)_I - (f_m)_I| &\leq |(f_n - f_m)_I - (f_n - f_m)_{I'}| \\ &\quad + |(f_n - f_m)_{I'} - (f_n - f_m)_{I_0}| \\ &\leq e(1 + \log \frac{|I'|}{|I|}) + 1 + \log \frac{|I'|}{|I_0|} \|f_n - f_m\|_X \end{aligned}$$

ここで、最後の不等式を得るために前補題を用いた。これより、 $(f_n)_I$ がある数 a_I に収束することかわかった。次に、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I |f_n - f_m| dm &\leq \frac{1}{|I|} \int_I |f_n - f_m - (f_n - f_m)_I| dm \\ &\quad + |(f_n)_I - (f_m)_I| \end{aligned}$$

右辺は 0 に収束することから、各 I 上では f_n は L^1 収束している。

そこで、 $I_k = 2^k I_0$ として、各 I_k 上で $f_n \rightarrow g$ (L^1) とすれば、 g は I_k によらず $a.e.$ に $\mathbb{R}^n$ 上 well-defined である。又、任意の正

I に対しては, $I \subset I_k$ なるものを取れば, f_n は I 上 g に L^1 収束している. 従って,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|I|} \int_I |f_n - g - (f_n - g)_I| dm \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|I|} \int_I |f_n - f_m - (f_n - f_m)_I| dm \\ &\leq \sup_{m > n} \|f_n - f_m\|_X \end{aligned}$$

従って, $f_n \rightarrow g$ in BMO が得られた.

3. Poisson kernel と BMO 関数 単位円の場合に考

える.

$$P_t(\varphi - \theta) = \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos(\varphi - \theta) + t^2}$$

を Poisson kernel とする. ∂U 上の関数 $f \in L^1(d\theta)$ は

$$f(te^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_t(\varphi - \theta) f(e^{i\theta}) d\theta$$

によって, U 上の調和関数とも見なす.

定理 3.1. $f \in L^1(d\theta)$ とする. $1 \leq p < \infty$ への関数 p 定数

C_p があて

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_X^p \leq \sup_{t, \varphi} \frac{1}{2\pi} \int P_t(\theta - \varphi) |f - f(te^{i\varphi})|^p d\theta \leq C_p \|f\|_X^p.$$

証明 ∂U 上の弧 $I = \{\theta : |\theta - \varphi| < 1 - t\} \quad (1 - \pi \leq t < 1)$ があて

は, $\cos \theta \geq 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (-\infty < \theta < +\infty)$ より

$$P_t(\varphi - \theta) \geq \frac{1 - t^2}{1 - 2t(1 - \frac{[1-t]^2}{2}) + t^2} = \frac{1}{1-t} \quad \text{for } \theta \in I.$$

よ, て, $|I| = 2(1-t)$ より

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f - f(te^{i\varphi})|^p d\theta \leq \frac{1}{2} \int_{P_t(\varphi-\theta)} |f - f(te^{i\varphi})|^p d\theta.$$

前節, 系 2.4 より $\star 1$ の不等式が得られる.

$\star 2$ の不等式を示めるために, $z = te^{i\varphi} \in U$ と固定して, $I = \{\theta: |\theta - \varphi| < 1-t\}$ とおく.

$$\int_0^{2\pi} P_t(\theta - \varphi) |f - f(te^{i\theta})|^p d\theta \leq 2^p \int_0^{2\pi} P_t(\theta - \varphi) |f - f_I|^p d\theta$$

であるから, この右辺を標値すればよい. $|t| < \frac{1}{2}$ ならば,

$$P_t(\theta) \leq \frac{1+t}{1-t} \leq 3, \quad |I| > 1. \quad \text{よ, て}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_t(\theta - \varphi) |f - f_I|^p d\theta &\leq 3 \int_0^{2\pi} |f - f_I|^p d\theta \\ &\leq 3 \cdot 2^{p-1} \cdot 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - f(\omega)|^p d\theta + |f(\omega) - f_I|^p \right). \end{aligned}$$

$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\theta$ であるから, 補題 2.5 より, $|f(\omega) - f_I| \leq 2\pi \|f\|_p$.

$|t| \geq \frac{1}{2}$ のときは, 今の方法をより精密に行なう. $\varphi = 0$ とし

て一般性を失わない. $I_k = e^k I$, $N = \max \{k: e^k(1-t) < \frac{\pi}{2}\}$ とし

て $I_\infty = [-\pi, \pi] \setminus I_N$ とおく. 然らば,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_t(\theta) |f - f_I|^p d\theta &= \sum_{k=0}^N \int_{I_k \setminus I_{k-1}} + \int_{I_\infty} \\ &\leq P_t(0) \int_I |f - f_I|^p d\theta + \sum_{k=1}^N P_t(e^{k-1}(1-t)) \int_{I_k} |f - f_I|^p d\theta \\ &\quad + P_t(e^N(1-t)) \int_{I_\infty} |f - f_I|^p d\theta. \end{aligned}$$

$|I| = 2(1-t)$ であるから,

$$(1) \quad P_t(0) \int_I |f - f_I|^p d\theta = \frac{1+t}{1-t} \int_I |f - f_I|^p d\theta \leq 4 \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I|^p d\theta.$$

又, $P_t(e^k(1-t)) \leq \frac{e^{-2k}}{1-t}$ ($\because \cos \theta \leq 1 - \frac{\theta^2}{3}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) より

$$P_t(e^{k-1}(1-t)) \int_{I_k} |f - f_I|^p d\theta$$

$$\leq \frac{e^{-2(k-1)}}{1-t} |I_k| 2^{p-1} \left(\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f - f_{I_k}|^p d\theta + |f_{I_k} - f_I|^p \right) \\ \leq e^{-k+2} 2^p \left(\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f - f_{I_k}|^p d\theta + e^p (1+k)^p \|f\|_X^p \right)$$

最後の不等式を得るのに補題 2.5 及び $|I_k| = e^k |I| = 2(1-t)e^k$ を使

った。 $\sum_{k \geq 1} e^{-k} (1+k)^p < \infty$ であるから、系 2.3 より

$$(2) \quad \sum_{k=1}^N P_t(e^{k-1}(1-t)) \int_{I_k} |f - f_{I_k}|^p d\theta \leq C_p \|f\|_X^p.$$

同様に、 $P_t(e^N(1-t)) \leq 1-t^2 \leq 1$ ($\because e^N(1-t) \geq \frac{\pi}{2}$) に注意して次の

項を評価すると、

$$(3) \quad P_t(e^N(1-t)) \int_{I_\infty} |f - f_{I_\infty}|^p d\theta \\ \leq 2\pi \cdot 2^{p-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - f_{(0)}|^p d\theta + |f_{(0)} - f_{I_\infty}|^p \right)$$

$|I_\infty| = 2e^N(1-t) \geq \pi/e$ であるから、補題 2.5 により $|f_{(0)} - f_{I_\infty}|$

$\leq e \|f\|_X$. よって、(1), (2), (3) をまとめれば求める不等式が

得られる。//

[注意] 1 次変換 $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ によって、単位円と上半平面に等角に

写像するとき、 $BMO(\mathbb{R})$ に対しても上半平面の Poisson kernel を用

いて定理が成立つ。よって、この等角写像を媒介にして、

$BMO(\partial D)$ と $BMO(\mathbb{R})$ は同じ関数空間とみなされる。 H^p ($1 \leq p < \infty$)

については、 $H^p(\partial D) \cong H^p(\mathbb{R})$ であるからこれは trivial なことで

はなす。しかし、 BMO が H^1 の dual space ([5]) であるから、 L^∞

と近いものと考えれば、この事実は合理的である。

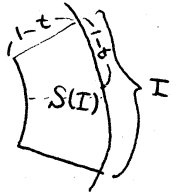
4. Carlson 測度と BMO 関数 単位円板 D 上の正値

測度 μ について, 次の性質は同値である.

a) μ は Carleson 測度, i.e., $I = \{\theta: | \theta - \varphi | < 1-t\}$ に対して, $S(I) = \{re^{i\theta}: | \theta - \varphi | \leq 1-t < r < 1\}$ (図を参照) とすれば,

$$A = \sup_I \mu(S(I)) / |I| < \infty$$

(便宜上, 以下では $A = \|\mu\|_{\text{Car}}$ と書く)



b) 定数 A' があつて,

$$(4.1) \quad \int_D |f(z)|^2 d\mu(z) \leq A' \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \quad \text{for } f \in L^2(d\theta).$$

実際, A' が b) の最小定数とすると, 絶対定数 C, C' があつて

$$(4.2) \quad C' \|\mu\|_{\text{Car}} \leq A' \leq C \|\mu\|_{\text{Car}}.$$

この同値性の証明には興味深いものがあるが, 多少準備を必要とするので省略する. (たとえば, [4] を参照).

関数 f の gradient を ∇f と書き, $|\nabla f|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2$ とする.

定理 4.2. (Fefferman-Stein[5]) $f \in \text{BMO}(\partial D)$ ならば

$$d\mu = (1-|z|) |\nabla f|^2 dx dy$$

は Carleson 測度で, 逆も成立つ. より正確には, 絶対定数 C, C' があつて

$$C' \|\mu\|_{\text{Car}} \leq \|f\|_*^2 \leq C \|\mu\|_{\text{Car}}.$$

[注意] Douglas 予想の証明に使われるのは, 本 1 の不等式だけなので, ここでは本 2 の不等式の証明はしない. 本 1 の不等式でも, 実際に使われるのは, $f \in L^\infty$ のときで, このときは以下の証明より, 直接 $C' \|\mu\|_{\text{Car}} \leq \|f\|_\infty^2$ が示される. こ

のことに注意すれば, Douglas 予想の証明には, 本節以降の結果だけでも十分である.

補題 4.2. $f, g \in L^2(d\theta)$ かつ $\int_0^{2\pi} g d\theta = 0$ とする. このとき,

$$\frac{1}{\pi} \iint_U \log \frac{1}{|z|} \underbrace{\nabla f \cdot \nabla g}_{\text{実内積}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g} d\theta$$

特に, $f \in L^2(d\theta)$ かつ $\int_0^{2\pi} f d\theta = 0$ ならば,

$$\frac{1}{\pi} \iint_U \log \frac{1}{|z|} |\nabla f|^2 dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 d\theta.$$

証明 命題 2 の等式を示めれば, polarization を使って一般の場合が得られる. よって, 命題 2 の等式を示めよう. $f \in L^2(d\theta)$ の Fourier 展開 $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ を考える. 仮定より $a_0 = 0$. よって U 上では, $f(z) = \sum_{n>0} a_n z^n + \sum_{n<0} a_n \bar{z}^{|n|}$ と展開される.

$$|\nabla f|^2 = 2(|f_{\bar{z}}|^2 + |f_z|^2)$$

に注意すれば, 項別微分により

$$|\nabla f|^2 = 2 \left\{ \left| \sum_{n<0} n |a_n| \bar{z}^{|n|-1} \right|^2 + \left| \sum_{n>0} n a_n z^{n-1} \right|^2 \right\}$$

右辺を極座標を用いて積分してやれば

$$\frac{1}{\pi} \iint_U \log \frac{1}{|z|} |\nabla f|^2 dx dy = \sum_{-\infty < n < \infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 d\theta$$

を得る. //

定理 4.1 の証明 $\int_0^{2\pi} f d\theta = 0$ としてよい. $z_0 = te^{i\varphi}$ を固定

して, $I = \{\theta: |\theta - \varphi| < 1-t\}$ とおく. $1-|z| \leq \log \frac{1}{|z|}$ on U に注意する. $|z_0| \leq \frac{1}{2}$ ならば,

$$\mu(S(I)) \leq \iint_{S(I)} \log \frac{1}{|z|} |\nabla f|^2 dx dy \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 d\theta$$

定理 3.1 より, $\mu(S(I)) \leq C |I| \|f\|_4^2$ (C は絶対定数), 但し $|I| \geq 1$

を仮定, $|z_0| > \frac{1}{2}$ とする.

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} = u + iv$$

と置いて, $F(w) = f(z)$ と変数変換する. このとき,

$$|\nabla_w F|^2 dw \wedge d\bar{w} = |\nabla_z f|^2 dz \wedge d\bar{z}$$

$$1 - |w|^2 = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}$$

と取る. また, $z \in S(I)$ ならば,

$$|1 - \bar{z}_0 z| \leq |z_0| \left(\left| \frac{1}{\bar{z}_0} - \frac{z_0}{|z_0|} \right| + \left| \frac{z_0}{|z_0|} - z \right| \right) \leq 4(1-t)$$

(図を参照) である. 以上注意すると,

$$\begin{aligned} \iint_{S(I)} (1 - |z|) |\nabla f|^2 dx dy &= \iint_{w(S(I))} \frac{|1 - \bar{z}_0 z|^2 (1 - |w|^2)}{(1 - |z_0|^2)(1 + |z|)} |\nabla F|^2 du dv \\ &\leq \frac{16(1-t)^2}{1-t} \iint 2(1 - |w|) |\nabla F|^2 du dv \\ &\leq 32(1-t) \iint \log \frac{1}{|w|} |\nabla F|^2 du dv \\ &= 16|I| \int_0^{2\pi} |F - F(w_0)|^2 d\varphi, \quad (w = re^{i\varphi}) \\ &= 16|I| \int_0^{2\pi} P_t(\theta - \varphi) |f(e^{i\theta}) - f(z_0)|^2 d\theta. \end{aligned}$$

従って, 定理 3.1 より, $|z_0| \geq \frac{1}{2}$ のとき

$$\mu(S(I)) \leq C|I| \|f\|_X^2 \quad (C: \text{絶対定数})$$

を得る. //

5. Blashke product

単位円板 D 上の点列 a_n (重複を許す) が, $\sum_n (1 - |a_n|) < \infty$ を満たせば,

$$b(z) = z^k \prod_{a_n \neq 0} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \quad (k \text{ は } a_n = 0 \text{ とする回数})$$

は収束して、 a_n においてその重複回数の零点をもつ有界正則関数となる。実際、

$$|b(z)| < 1 \text{ on } U, \quad |b(e^{i\theta})| = 1 \text{ a.e. on } \partial U$$

となるので、 $b(z)$ は inner 関数になっている。

a_n がすべて互いに異なり、 n によらない数 $\delta > 0$ があつて、

$$(*) \quad \prod_{m \neq n} \left| \frac{a_n - a_m}{1 - \bar{a}_n a_m} \right| > \delta \quad \text{for all } n$$

と仮定すると、 $b(z)$ は interpolating Blaschke product と云われる。

(*) が成り立てば、任意の有界複素数列 c_n に対して、 $f(a_n) = c_n$ と仮定する有界正則関数 f が存在し、この逆も云えるので interpolating という名がある。

6. Douglas 予想の証明 Chang [1] と Marshall [8] は結局次のことを証明した。

定理 6.1. $B \in H^\infty \subseteq B \subseteq L^\infty$ なる closed subalgebra とする。このとき、 B において invertible な interpolating Blaschke product の族 $\{b_\alpha\}$ があつて、 B は H^∞ と $\{\bar{b}_\alpha\}$ により生成される、i.e.,

$$B = [H^\infty, \{\bar{b}_\alpha\}].$$

彼等の論文の中で本質的な部分は、それぞれ次の補題を示すところにある。

補題 6.2. (Marshall) $0 < \alpha < 1$ とすると, $\beta = \beta(\alpha); \alpha < \beta < 1$ なる数 β が存在して, 次の性質を満たすように出来る: $u \in L^\infty$ かつ $\beta < u \leq 1$ a.e. on ∂U ならば, ある interpolating Blaschke product $b(z)$ があって

$$a) \quad b(z) = 0 \text{ ならば } |u(z)| \leq \beta$$

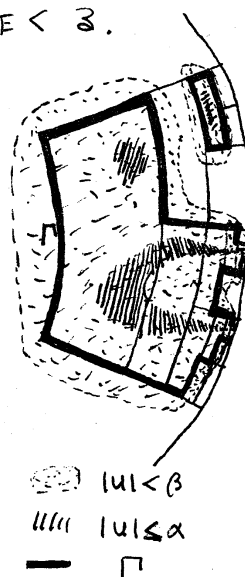
$$b) \quad |u(z)| \leq \alpha \text{ ならば } |b(z)| \leq \frac{1}{10}$$

となる.

略証 まず, 長さ 1 が Carleson 測度となるような曲線 Γ を

$\Gamma \subset \{z \in U \mid \alpha < |u(z)| < \beta\}$ とするようにつくる.

β を 1 に近づけると, 領域 $\{\alpha < |u(z)| < \beta\}$ の幅が広くなる. 適当に β を定めて, このよう曲線 Γ を作るのは, Carleson の作り方を修正して行われる. このよう Γ が出来てしまえば, Γ 上に hyperbolic metric でほぼ等間隔に零点を配置して, その Blaschke product を $b(z)$ とする. このとき, a) は自



動的に満たれる. 又, Γ が Carleson 測度を与えることと, 零点が等間隔であることから, $b(z)$ は interpolating Blaschke product であることも従う. 更に, この零点の間隔を適当に狭めておけば, Γ 上で $|b(z)| \leq \frac{1}{10}$ と容易に出来る. $|u| > \beta$ a.e. on ∂U であるから, Γ は a.e. に $\{|u(z)| \leq \alpha\}$ を囲んでいる. よって, 最

大値の原理から, $|b(z)| \leq \frac{1}{10}$ が Γ で囲まれる領域上で成立つ.

(実際に, 上のような曲線 Γ を作ることは簡単ではない. くわしくは直接論文 [8] を参照されたい) //

補題 6.3. (Chang) $b \in H^\infty$ を inner 関数とする. $0 < \delta < 1$ に対して, $G_\delta = \{z \in U : |b(z)| > \delta\}$ とおく. 更に, $G_\delta \subseteq \{ |z| \geq \frac{1}{2} \}$ と仮定する ($b(z)$ が定数でない限り, $\delta \rightarrow 1$ に近づくことにより常に可能). このとき, $f \in L^\infty$ が $0 < \varepsilon < 1$ に対して,

$$\|f\|_\infty \leq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(z)| \geq 1 - \varepsilon \quad \text{on } G_\delta$$

が成立つならば,

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} d(fb^n, H^\infty) \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad (C: \text{絶対定数})$$

略証 L^∞/H^∞ の dual space は $H_0^1 = \{g \in H^1 : g(0) = 0\}$ である.

従って,

$$d(fb^n, H^\infty) = \sup \left\{ \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} fb^n g d\theta \right| : g \in H_0^1, \|g\|_1 \leq 1 \right\}$$

である. 右辺の中で, f を $f - f(0)$ で置き換えても積分の値は同じである. 又, $g \in H^1, \|g\|_1 \leq 1$ ならば, 常に $g = g_1^2 + g_2^2$, $g_1, g_2 \in H^2, \|g_i\|_2 \leq 1$ と書くことが出来る. よって,

$$d(fb^n, H^\infty) \leq 2 \sup \left\{ \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (f - f(0)) b^n h^2 d\theta \right| : h \in H^2, \|h\|_2 \leq 1 \right\}$$

と取る. 更に, H^∞ は H^2 の中で dense と取っていいので, 必要ならば, $h \in H^\infty$ と仮定してもよい. 以下この積分を標語す

証であるが、補題 4.2 により

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t - f(\omega)) b^n h^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \iint_U \nabla f \cdot \nabla (b^n h^2) \log \frac{1}{|z|} dx dy.$$

右辺の積分は適当に分解することによって評価される。この際、 G_δ の外では $|b| \leq (1-\delta)$ ということから、 $(1-\delta)$ の項が出る。又、

$$\int d\mu = \chi_{G_\delta}(z) (1-|z|) |\nabla f|^2 dx dy$$

が Carleson 測度で、1 から、 $|f| \geq 1-\varepsilon$ on G_δ ならば

$$\|f\|_{Car} \leq C_1 \varepsilon \quad (C_1: \text{絶対定数})$$

ということから、 G_δ 上では $|\nabla f|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy$ から $\sqrt{\varepsilon}$ の項が現れる。残りの部分では、 $\|f\|_* \leq 2\|f\|_\infty \leq 2$, $\|b^n\|_* \leq 2\|b^n\|_\infty \leq 2$ ということから、定理 4.2 と不等式 (4.1), (4.2) を使うことにより定数によっておさえることができる。最終結果は、

$$d(fb^n, H^\infty) \leq C(\sqrt{\varepsilon} + n(1-\delta)^{n-1}) \|h\|_2$$

である。 $\|h\|_2 \leq 1$ より $n \rightarrow \infty$ とすれば求める主張が得られる。

Chang の補題は、 $d(fb^n, H^\infty) = d(f, \bar{b}^n H^\infty)$ であるから、

$$d(f, [H^\infty, \bar{b}]) \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

ということを導びいている。

定理 6.1 の証明: $B_f = [H^\infty, f]$ を 1 つの element $f \in L^\infty \in H^\infty$ に

何加えて生成されたものとする。この場合に示めされれば、

$$\text{一般の場合は } B = \bigcup_{f \in B} [H^\infty, f] = \bigcup_{f \in B} [H^\infty, \{\bar{b}_\alpha, f\}] = [H^\infty, \{\bar{b}_\alpha, f\}]$$

と取る。よ、て、 $B = [H^\infty, f]$ として考えれば十分。 $f \notin H^\infty$ の

と主張されるはよい。更に, $[H^\infty, f] = [H^\infty, cf+d]$ ($c \neq 0, c, d \in \mathbb{C}$) であるから, f は B で invertible で $\|f\|_\infty \leq 1$ と主張されるはよい。又, $\log(H^\infty)^\perp = L^\infty_{\mathbb{R}}$ (cf. [6]) より, invertible 元 $g \in H^\infty$ があ, て, $|g| = |f|$ a.e. と取る。 $u = fg^{-1}$ とおけば,
 $[H^\infty, f] = [H^\infty, u]$. しかた, $u^{-1} \in B$ と取る。さて, $|u| = 1$ a.e. であるから, Marshall の補題によ, て, 各 $0 < \alpha < 1$ に対して

$$a) \quad b_\alpha(z) = 0 \Rightarrow |u(z)| \leq \rho(\alpha)$$

$$b) \quad |u(z)| \leq \alpha \Rightarrow |b_\alpha(z)| \leq \frac{1}{10}$$

と取るように, 数 $\rho(\alpha) < 1$, interpolating Blaschke product $b_\alpha(z)$ を取ることも出来る。 $B = [H^\infty, \{b_\alpha\}]$ と取ることを示そう。

$G^\alpha = \{z \in \mathbb{D} : |b_\alpha(z)| > \frac{1}{10}\}$ とおく。 又より $G^\alpha \subseteq \{|u| > \alpha\}$. u は定数でないから, $\|u\|_\infty = 1$ であるから, $|u(z)| \leq \alpha_0 < 1$ on $|z| \leq \frac{1}{2}$ である。よ, て, $\alpha_0 < \alpha < 1$ に対しては, $G^\alpha \subseteq \{|u| > \alpha\} \subseteq \{|z| > \frac{1}{2}\}$ と取, ておく。 Chang の補題により,

$$d(u, [H^\infty, b_\alpha]) \leq \lim_n d(u b_\alpha^n, H^\infty) \leq C(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$\alpha \rightarrow 1$ とすれば, $u \in [H^\infty, \{b_\alpha\}]$. よ, て, $B \subseteq [H^\infty, \{b_\alpha\}]$. 逆の包含関係を示すために, H^∞, B, L^∞ の maximal ideal space をそれぞれ $M(H^\infty), M(B), M(L^\infty)$ と書く。 H^∞ は $M(L^\infty)$ 上 logmodular であるから, 各 $\varphi \in M(H^\infty)$ は $M(L^\infty)$ 上の表現測度を唯一持つ。よ, て, $M(B)$ は $M(H^\infty)$ の subset とみとせる。もし, 仮に, $\varphi \in M(B)$ があ, て $b_\alpha(\varphi) = 0$ とすると, b_α が

interpolating Blaschke product ということから, φ は $M(H^\infty)$ の中で b_α の零点の closure に含まれる ([6, p205]). さて, a) により $|\varphi(u)| \leq \beta(\alpha) < 1$ と取るべきであるが,

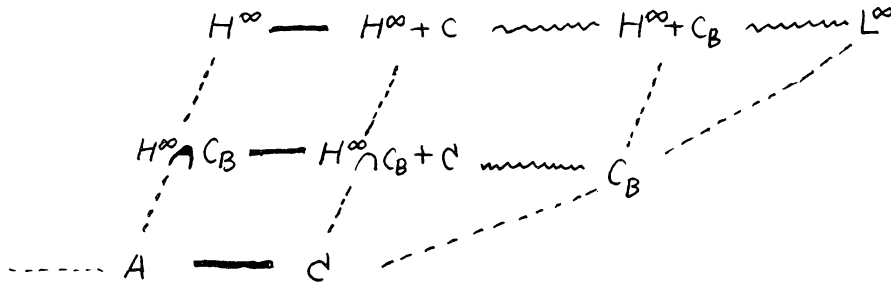
$$\varphi(u) \overline{\varphi(u)} = \varphi(u) \varphi(\bar{u}) = \varphi(u\bar{u}) = 1, \text{ i.e. } |\varphi(u)| = 1$$

ということに反する. 従って, b_α は $M(B)$ 上での零点を取らず, δ , ε B の invertible 元である. すると, $1/b_\alpha = \bar{b}_\alpha \in B$. これは, $[H^\infty, \{\bar{b}_\alpha\}] \subseteq B$ を示す. //

上に述べて "定理の証明" は, N. Jewell (thesis, Univ. of Edinburgh, Scotland) による, 2 簡易化されたものといわれる (cf. [37]).

7. その他の結果 $B \in H^\infty \subseteq B \subseteq L^\infty$ とする closed subalgebra とする. $C_B \in B$ で invertible な Blaschke product から生成される L^∞ の C^* -subalgebra とすると, $B = H^\infty + C_B$ (代数和) と書ける (Chang [2]). 更に, $H^\infty \cap C_B$ は C_B の箇の closed subalgebra に属し, Douglas の性質が成立つ (Chang-Marshall [3]): すると, $D \in H^\infty \cap C_B \subseteq D \subseteq C_B$ とする closed subalgebra とすると, D で invertible な Blaschke product から生成される C^* -algebra を $C_{B,D}$ として, $D = H^\infty \cap C_B + C_{B,D}$ (代数和) となる. これらの結果により, 第 1 節で述べた図式を補えば, 次頁のようになる. その図で, $\sim$ 部分では Douglas の性質が成立する. 又, $H^\infty \cap C_B + C$ が $H^\infty \cap C_B$ を含む closed subalgebra であることは容

易にわかる。よって、——部分の間に真にはさまる closed subalgebra は 2 つ。



A と H^∞ の間の subalgebra については、まだ未知の部分が多い。J. Wermer が「 A と H^∞ の間の closed subalgebra で Corona property を満たすのはどんなものか？」と問うている。[37] は $H^\infty \cap C_B$ は corona property をもつことを示している。一方、D. Dawson が $(1-z)^i$ で生成される algebra は Corona property をもたないことを示したという (cf. [37])。ついでに云えば、 A の subalgebra についても未解決の問題がある。また、 H^∞ にどんな L^∞ の C^* -subalgebra $\mathcal{C}$ を加えると、 $H^\infty + \mathcal{C}$ は closed subalgebra になるだろうか？

その他、このノートでは述べなかったが、^(実数) $f \in BMO$ が

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|I| < \delta} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| dm = 0$$

と取ると、 f は vanishing mean oscillation をもつという。簡単に VMO と呼ばれる。 VMO 実数は Sarason によって研究され、単位円上で $(H^\infty + C) \cap (\overline{H^\infty} + C) = VMO \cap L^\infty$ という関係にある。これは、Chang [27] による、 $H^\infty \subseteq B \subseteq L^\infty$ と取る closed subalgebra

に一般化して, $VMO_B \cap L^\infty = B \cap \bar{B}$ を示している。

又, BMO 関数は singular operator や Hilbert transform との関係として色々と調べられている。

参考文献

1. S. Y. Chang, A characterization of Douglas subalgebras, Acta Math. 137 (1976), 81-89.
2. ———, Structure of subalgebras between L^∞ and H^∞ , Trans. Amer. Math. Soc. 227 (1977), 319-332.
3. S. Y. Chang and D. E. Marshall, Some algebras of bounded analytic functions containing the disk algebra, in Lecture Note in Math. 604, Springer.
4. P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, 1970.
5. C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-193.
6. K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
7. F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Applied Math. 26 (1961), 415-426.
8. D. E. Marshall, Subalgebras of L^∞ containing H^∞ , Acta Math. 137 (1976), 91-98.