

一意性条件の存在条件による近似理論

筑波大 数学系 本橋信義

講演者が開発した新しい理論を紹介を行う。

L を等号をもった一階の述語論理 (古典論理でも直観主義論理のいずれでもよい) とし, R は L の中の述語記号のある集合とする. L の中の論理式 A が R -positive (R -negative) であるとは, A が R の元の negative (positive) occurrence をもたないことと定義し, A が R -free であるとは A が R の元を含まないこととする. そこで我々は L の内論理式 A に対し次の問題を考える。

問題. 次の条件 (i), (ii) をみたす R -positive な内論理式のある集合 S を求めよ.

(i) S の元はすべて syntactical で simple な半経路で A から得られる.

(ii) L の任意の R -positive な論理式 B について,

$A \supset B$ が L で証明可能になる条件は, S の元 C で,
 $C \supset B$ が L で証明可能になる C が存在することである。

今, (i), (ii) の条件を満たす R -positive な肉論理式の集合 S が得られたとしよう。 S の中の各肉論理式から, $R \in R$ ($R \in R$) の形の部分論理式をすべて $\bar{r} = \bar{r}$ の形の正し論理式でおきかえて得られる肉論理式の全体を K とする。
 すると,

(iii) L の任意の R -free な肉論理式 B について, $A \supset B$ が L で証明可能になる条件は $C \supset B$ が L で証明可能になるような K の元 C が存在することである。

が成り立つ。(iii) は条件 (ii) と Positive Lemma から明らかになる帰結である。(iii) は A から L の中で証明可能な R の元を含む肉論理式全体の公理系が K によって与えられることを示している。すなわち, 我々の問題の解は, n 階の肉論理式 $\exists RA(R)$ の n 階部分の公理化を常に与えることになる。

しかし, 上の問題を解くには, 条件 (i) の n の syntactical で simple な系統のきちんとした定義を与えなければならぬ

い。その一つの例として、我々は R の一意性条件とよばれる一群の R -negative 内論理式の R の存在条件とよばれる一群の内論理式による“近似”という年鑑を提出し、次のような定理を得た。

定理 A_1 は R の一意性条件, A_2 は R の存在条件で, A が $A_1 \wedge A_2$ のとき, A_1 の A_2 による近似の条件 S は上の問題の条件 (i), (ii) を満たす。

R の一意性条件, R の存在条件, R の一意性条件の R の存在条件による近似, といった概念の定義等, 詳細は次の論文を参照されたい。

N. Motohashi, Approximation theory of uniqueness conditions by existence conditions, to appear.

ここでは, ある特定の一意性条件と存在条件についての上の定理の特別な場合を説明し, その応用を2つ示すことにする。以下, R は唯一つの2項述語記号 $R \in \mathcal{F}$ からなる集合とする, i.e. $R = \{R\}$ 。そして, $\mathcal{U}$ は R -negative 内論理式;

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (R(x, y) \wedge R(u, v) \supset D(x, y, u, v)),$$

E は R -positive 内論理式；

$$\forall x \exists y R(x, y),$$

とする，さらに， $D(x, y, u, v)$ は R -free な論理式とする。

$\mathcal{U}$ は $\{R\}$ の一意性条件の一例であり， E は $\{R\}$ の存在条件の最も簡単な一例である。 X が $R(t, s)$ の形の原始論理式の有限集合とし， $X(R) = \{\langle t, s \rangle \mid R(t, s) \in X\}$ とする。

このとき，各自然数 k に対して，" A の B に対する X 上の k 次の近似" とよばれる論理式 $A_p^k(\mathcal{U}, E, X)$ を次の (iv)，

(v) で定義する。

$$(iv) \quad A_p^0(\mathcal{U}, E, X) = \bigwedge_{\langle t, s \rangle, \langle u, v \rangle \in X(R)} (R(t, s) \wedge R(u, v) \wedge D(t, s, u, v)),$$

$$(v) \quad A_p^{k+1}(\mathcal{U}, E, X) = \forall x_{k+1} \exists y_{k+1} A_p^k(\mathcal{U}, E, X \cup \{R(x_{k+1}, y_{k+1})\}).$$

" $\mathcal{U}$ の E による k 次の近似" とは 内論理式 $A_p^k(\mathcal{U}, E, \phi)$ のことをい、これを $A_p^k(\mathcal{U}, E)$ で表す。すると， $A_p^k(\mathcal{U}, E, X)$ は R -positive な論理式で， $A_p^k(\mathcal{U}, E, X)$ の ϕ に出てくる自由変数は X の ϕ に出てくるものだけであり，しかも，論理式 $\mathcal{U} \wedge E \wedge X \supset A_p^k(\mathcal{U}, E)$ は $\forall$ で $\mathcal{L}$ で証明可能になる。また， $A_p^k(\mathcal{U}, E)$ は次の形をしている；

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \cdots \forall x_k \exists y_k \left(\bigwedge_{i,j=1}^k R(x_i, y_i) \wedge D(x_i, y_i, x_j, y_j) \right).$$

すると、純粋に証明論的な手法を用いて、次の。

- (vi) 任意の R-positive な論理式 B について、 $\sigma \wedge E, \wedge X. \supset B$ が L で証明可能になる条件は、ある自然数 k で $A_p^k(\sigma, E, X) \supset B$ が証明可能になることである。

を得ることができた。以上の結果を無限論理 $L_{\omega, \omega}$ に拡張するには、各可算順序数 α に対して $A_p^\alpha(\sigma, E, X)$ を定義すればよい。 $\alpha=0$ の場合、亦即ち α が limit ordinal であることは (iv), (v) をそのまま用い、 α が limit ordinal のときは、

$$(vii) \quad A_p^\alpha(\sigma, E, X) = \bigwedge_{\beta < \alpha} A_p^\beta(\sigma, E, X)$$

を用いて定義する。すると (vi) は次のように拡張できる。

- (viii) $L_{\omega, \omega}$ の中の任意の R-positive な論理式 B について、 $\sigma \wedge E, \wedge X. \supset B$ が $L_{\omega, \omega}$ で証明可能になる条件は、ある可算順序数 α で、 $A_p^\alpha(\sigma, E, X) \supset B$ が証明可能になるものである。
さらに、 B が有限論理の論理式の場合は α とは有限の順序数に限られる。

上記の結果, (vi), (viii) は単純なものであるが, それでもいくつかの意味ある応用をもっている.

$\mathcal{U}_n R$ を次のような R -negative 内論理式とする;

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (R(x, y) \wedge R(u, v) \supset (x = u \supset y = v)).$$

すると $A_p^k(\mathcal{U}_n R, E)$ は

$$\forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_k \exists y_k \left(\bigwedge_{i,j=1}^k R(x_i, y_i) \wedge (x_i = x_j \supset y_i = y_j) \right),$$

となる。この内論理式を $Ex^k R$ であらわし, $Ex^1 R$ を $Ex R$ であらわすと, $Ex R$ が E となる。そして (vi) より,

(ix) 任意の R -positive な論理式 B について, $Ex R \wedge \mathcal{U}_n R \supset B$ が L で証明可能になる条件は, $Ex^k R \supset B$ が L で証明可能になるような自然数 k が存在することである。

特に, $Ex R \supset Ex^k R$ はすべて古典論理の中で証明可能だから,

(x) 任意の R -positive な論理式 B について, $Ex R \wedge \mathcal{U}_n R \supset B$ が古典論理で証明可能になる条件は, $Ex R \supset B$ が古典論理の中で証明可能になることである。

が得られる。(ix), (x) は“一意性条件の消去定理”といえる。

る定理の一部である。

次に、無限論理での応用を一つ示そう。まず、 L は一々の項述語記号 " $<$ " と無限個の個体定数記号 " $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ " を少なくとももっているものとする。1つの L -構造 Ω が順序 (整列順序) 構造であるとは、 Ω の中での " $<$ " の解釈、すなわち $\Omega(<)$ が Ω のユニバース $|\Omega|$ 上の全順序 (整列順序) を与えていることをとする。 W として次の R -negative 内論理式を取る；

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (R(x, y) \wedge R(u, v) \supset \bigwedge_{n < m} (x = c_n \wedge u = c_m \supset v < y)).$$

W は R の $L_{\omega, \omega}$ の中での一貫性条件の一つである。 W の定義と W の E による近似の定義から、

(xi) 任意の順序 L -構造 Ω について、

$$\Omega \models \exists R(W \wedge E) \Leftrightarrow \Omega \text{ は 整列順序構造である}$$

(xii) 任意の整列順序 L -構造 Ω と $\alpha < \omega_1$ について、

$$\Omega \models \exists R A_p^+(W, E) \Leftrightarrow \Omega(<) \text{ の order type } \geq \alpha.$$

が得られる。今、 C が $L_{\omega, \omega}$ の内論理式で、 C のモデルはすべて整列構造であったとする。 C は R を含んでいると仮定してよい。すると (xi) より $C \wedge W \wedge E$ はモデルをもたない。

従って, $W \wedge E, \supset \neg C$ は $L_{\omega, \omega}$ で証明可能である。

すなわち (viii) より, $A_p^d(W, E) \supset \neg C$ が証明可能にあることが取れる。 C は R を含んでいるから $\exists R A_p^d(W, E) \supset \neg C$ が valid になる。よって, $C \wedge \exists R A_p^d(W, E)$ はモデルをもたない。(xi) より, C のモデルの order type は $\aleph_1^2$ より小さいことになる。以上から,

(xiii) $L_{\omega, \omega}$ の中で表現できる整列順序は可算整列順序に
 1つである。

という良く知られた結果が得られる。