

Spreading Blaschke products and homeomorphic parts

新潟大・理 泉池敬司 (Keiji Izuchi)

D を単位円円板とし, D の上の有界解析関数よりなるバナッハ環を H^∞ とする。その maximal ideal space $\mathcal{M}$ は weak*-top. で compact Hausdorff 空間である。 H^∞ の関数とその Gelfand 変換を同一視することにより, H^∞ は $C(\mathcal{M})$ の closed subalg. と考えることができる。ゴロタ定理より $D \subset \mathcal{M}$ は dense である。
 $f \in H^\infty$ に対して,

$$Z(f) \equiv \{x \in \mathcal{M} \setminus D; f(x) = 0\}, \quad \{ |f| < 1 \} \equiv \{x \in \mathcal{M} \setminus D; |f(x)| < 1\}$$

とする。 $x, y \in \mathcal{M}$ に対して

$$g(x, y) \equiv \sup \{ |f(y)|; f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1, f(x) = 0 \}$$

とする。

$$P(x) \equiv \{z \in \mathcal{M}; g(x, z) < 1\}$$

を x の Gleason part と呼ぶ。 $P(x) \neq \{x\}$ の時, nontrivial と呼ばれ, Hoffman [4] より $\exists L_x: D \rightarrow P(x)$ continuous, $|L_x| \equiv 1$, onto map st. $f \circ L_x \in H^\infty \quad \forall f \in H^\infty$ である。 L_x が

homeomorphic に なる時, $P(x)$ を homeomorphic part といいよ。

$\{z_n\}_n \subset D$ を $\sum |z_n| < \infty$ とする。特に $H^\infty |_{\{z_n\}_n} \cong \ell^\infty$ の時 interpolating, $z \in Z$

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}, \quad z \in D$$

を IBP (interpolating Blaschke product) といいよ。この時, Carleson [1] により,

$$(1 - |z_n|^2) |b'(z_n)| \geq \delta > 0 \quad \forall n$$

と同値である。Hofman [] により,

$$P(x) \neq \{x\} \iff \exists b: \text{IBP s.t. } x \in Z(b)$$

である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|^2) |b'(z_n)| = 1$$

の時, b を sparse と呼ぶ。この時

$$(b \circ L_x)(z) = \lambda z, \quad z \in D, \quad |\lambda| = 1$$

と なることを知られており, $P(x), x \in Z(b)$, を sparse part と呼ぶ。当然この時, $P(x)$ は homeo. part である。

$P(x)$ が non trivial である

$$\exists b: \text{IBP s.t. } (b \circ L_x)(z) = \lambda z, \quad z \in D, \quad |\lambda| = 1$$

と なる時, $P(x)$ を locally sparse part といいよ。この part は

Gorkin, Lingenberg, Mortini [2] の中で詳しく調べられている。

そして locally sparse ではない homeomorphic part が存在するかどうかという問題を提出している。これに対して, 田中氏が

[6]の研究を通して, その存在を指摘している。ここではどのようなIBPはその零点の中にlocally sparseでないhomeo. partを決定するものがあるかについて述べる。

$\varphi, \psi \in \{z_n\}_n, \{w_n\}_n$ を零点とする Blaschke product とする。

$$d(\varphi, \psi) = \inf \{ \rho(z_n, w_k); n, k=1, 2, \dots \},$$

$$\delta_0(\varphi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{k \neq n} \rho(z_n, z_k)$$

とする。

まず田中氏の idea を使うと次の定理が得られる。

定理 1. b_n を infinite IBP であつ $b = \prod_{n=1}^{\infty} b_n \in \text{IBP}$ とする。

$$a) \quad d\left(\prod_{k=1}^n b_k, \prod_{k=n+1}^{\infty} b_k\right) \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$b) \quad \delta_0\left(\prod_{k=n+1}^{\infty} b_k\right) \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$c) \quad \{|b_n| < 1\} \supset \left\{ \left| \prod_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < 1 \right\} \quad \forall n$$

とする。この時, $\exists x_0 \in Z(b)$ s.t. $P(x_0)$ は homeomorphic part であつ non locally sparse。

注) 上の条件をみたす b は存在する。

$$\text{略証.} \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z\left(\prod_{k=n}^{\infty} b_k\right)$$

とする。 $x \in E$ に対してはその表現 measure μ_x の $\text{supp } \mu_x$ の包含関係によつて E に order を導入できる。 E_m を minimal な点の

集合とする。 $\forall x_0 \in E_m$ に $\exists \#(Z, P(x_0))$ は non sparse $\mathbb{R}$ homeo. part であることが証明できる。 ([3] 参照)

IBP b の零点列 $\{z_n\}_n$ が

$$s_0(b) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{k \neq n} s(z_n, z_k) = 1$$

と $\exists$ する時, spreading と呼ぼう。 sparse は spreading であり, sparse ではない spreading が存在する。

定理 2. $b \in$ spreading であるが non sparse である IBP とする。この時, $\exists x_0 \in Z(b)$ s.t. $P(x_0)$ は homeomorphic であるが non locally sparse である。

略証。 [2] より $\forall x \in Z(b)$ に $\exists \#(Z, P(x))$ は homeomorphic part になることが分かる。 $\varphi_0 \equiv b$ とする。 $Z(\varphi_0)_m$ の中 $\neq$ locally sparse ではない点があれば証明が終る (ストッパする)。 $z = z'$ $\forall x \in Z(\varphi_0)_m$ に $\exists \#(Z, P(x))$ は locally sparse とする。この時, 次のように分解 $\varphi_0 = \varphi_1 b_1$ が存在する。

i) φ_1, b_1 は non sparse,

ii) $\{|\varphi_1| < 1\} \subset \{|b_1| < 1\}$ 。

次に φ_1 に $\exists \#(Z)$ の同じ議論をする。途中でストッパした場合は証明が終る。無限に続いたとする。

$$\varphi_{n-1} = \varphi_n b_n$$

$$\{|\varphi_n| < 1\} \subset \{|b_n| < 1\}$$

と $\exists$ non sparse な $\{|\varphi_n|, |b_n|\}$ が取れる。

$$b_0 \equiv \prod_{k=1}^{\infty} b_k$$

とする。すると定理1が適用でき、 $z(b_0)$ の中には locally sparse ではない homeo と $\exists$ 点が存在する。当然 $z(b_0) \subset z(b)$ である。

参考文献

- [1] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math. 80 (1958), 921-930.
- [2] P. Gorkin, H.-M. Lingenberg and R. Mortini, Homeomorphic disks in the spectrum of H^∞ , Ind. Univ. Math. J. 39 (1990), 961-983.
- [3] C. Guillory and K. Izuchi, Maximal Douglas subalgebras and minimal support points, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 477-481.
- [4] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. of Math. (2) 86 (1967), 74-111.
- [5] K. Izuchi, Spreading Blaschke products and homeomorphic parts, Complex Variables, to appear.
- [6] J. Tanaka, Flows in fibers, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 779-804.