

有限要素法における最近の話題

広島大学理学部 田端正久 (Masahisa Tabata)

1 はじめに

最近の有限要素法に関する研究から、2つの話題を取り上げる。初めの話題は、外部問題を等価な有界領域の問題に変換して解く方法 (Han-Bao[1]) である。新たに必要となる境界条件に、いわゆる DtoN (Dirichlet データを Neumann データに写す作用素) が現れる。この作用素は非局所的 (non-local) なので、対応する剛性行列に非零成分が増える。次の話題は、3次元軸対称問題の解析 (Tabata [2],[3]) である。円筒座標系を用いて、問題は2次元化されるが、そのために軸での特異性を持った微分作用素が現れる。複数の重み付関数空間の設定とそこでの種々の解析が展開される。

以下では、領域 Ω の要素分割に関して、正則な分割列 [4] を考え、 h は各分割の最大要素長を表すものとする。

2 外部問題の有限要素解析

Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域で、ある有界閉領域の補集合とする。流速 $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ 、圧力 $p: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ を未知関数とする Stokes 方程式

$$-\nu \Delta u + \text{grad} p = f, \quad (1)$$

$$\text{div} u = 0 \quad (2)$$

を考える。ここに、 ν は粘性係数、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ は与えられた関数であり、 $\text{supp}[f]$ はコンパクトであるとする。境界条件は

$$u = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \quad (3)$$

であり、

$$|u| = O(1), \quad |p| = O(|x|^{-1}), \quad |\text{grad} p| = O(|x|^{-2}) \quad (|x| \rightarrow +\infty) \quad (4)$$

となるものを求める。非有界領域 Ω での問題 (1)-(4) を解くのが目標である。

$R > 0$ を

$$\Omega_a \equiv \{x \in \mathbf{R}^2; |x| < R\} \cap \Omega$$

が $\text{supp}[f]$ を含むように定める. 領域 Ω での解 (u, p) を Ω_a に制限した関数は有界領域 Ω_a で問題 (1)-(3) と境界条件

$$\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(u, p) n_j = T_i(u) \quad (x \in \Gamma_R, i = 1, 2) \quad (5)$$

の解になっている [1]. ここに,

$$\Gamma_R = \{x; |x| = R\},$$

$$\sigma_{ij}(u, p) = -p\delta_{ij} + 2\nu D_{ij}(u), \quad D_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

$$T_i(u)(\theta) = \frac{2\nu}{\pi R} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi - \theta)}{n} \frac{\partial}{\partial \phi} u_i(R \cos \phi, R \sin \phi) d\phi \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

である. このようにして, 元の問題は有界領域 Ω_a の問題に帰着されるが, (5) は非局所境界条件である.

境界条件 (5) は次のようにして導かれる. 非有界領域 Ω での解 (u, p) は外部領域

$$\Omega_R = \{x; |x| > R\}$$

で方程式

$$-\nu \Delta u + \text{grad} p = 0, \quad (8)$$

と (2) を満たし, 遠方での条件 (4) も満足している. $g: \Gamma_R \rightarrow \mathbf{R}^2$ を与えられた関数とし, 境界条件

$$u = g \quad (x \in \Gamma_R) \quad (9)$$

を課すると, この問題は一意的に解を持ち,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\theta) r^{-n}, \quad p(r, \theta) = \sum_{n=2}^{+\infty} p_n(\theta) r^{-n},$$

と表現できる. ここに, $u_n(\theta), p_n(\theta)$ は g の Fourier 係数を使って陽に表現できる. したがって, Γ_R での応力ベクトルである (5) 式左辺を $g = u|_{\Gamma_R}$ の Fourier 係数で表現することができ, それが (7) で与えられる $T_i(u)$ に他ならない. この T_i が Dirichlet データを Neumann データに写す作用素である.

Ω_a での問題を変分形式で表現するために, 関数空間

$$V = \{v \in (H^1(\Omega_a))^2; v = 0 \ (x \in \partial\Omega_a \setminus \Gamma_R)\}, \quad Q = L^2(\Omega_a)$$

を導入する. 変分問題は, $(u, p) \in V \times Q$ で

$$a(u, v) + b(v, p) + a_0(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (\forall v \in V), \quad (10)$$

$$b(u, q) = 0 \quad (\forall q \in Q) \quad (11)$$

を求めることである。ここに,

$$a(u, v) = 2\nu \int_{\Omega_a} \sum_{i,j=1}^2 D_{ij}(u) D_{ij}(v) dx, \quad b(v, q) = - \int_{\Omega_a} q \operatorname{div} v dx,$$

$$a_0(u, v) = \frac{2\nu}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n(\phi - \theta)}{n} \frac{\partial}{\partial \phi} u(R \cos \phi, R \sin \phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} v(R \cos \theta, R \sin \theta) d\phi d\theta,$$

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega_a} f v dx$$

である。

補題 1. (i) a_0 は $V \times V$ 上の連続一次形式である。

(ii) a_0 は非負

$$a_0(v, v) \geq 0 \quad (\forall v \in V)$$

である。

定理 1 [1]. 任意の $f \in V'$ に対して, 問題 (10), (11) の解は存在し一意である。

V_h, Q_h を V, Q の有限要素近似空間とする。 N を自然数として, 双一次形式 a_0 を有限和で近似した

$$a_0^N(u, v) = \frac{2\nu}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n(\phi - \theta)}{n} \frac{\partial}{\partial \phi} u(R \cos \phi, R \sin \phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} v(R \cos \theta, R \sin \theta) d\phi d\theta$$

を定義する。有限要素近似問題は $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ で

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) + a_0^N(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad (\forall v_h \in V_h), \quad (12)$$

$$b(u_h, q_h) = 0 \quad (\forall q_h \in Q_h) \quad (13)$$

を満たすものを求めることである。

定理 2 [1]. V_h, Q_h が下限上限条件を満たしていると仮定する, すなわち, ある正定数 β が存在して, すべての h に対して,

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V \|q_h\|_Q} \geq \beta \quad (14)$$

が成立するとする。さらに, ある正整数 $k (\geq 1)$ が存在して, 任意の要素 K 上で流速, 圧力の近似空間は, それぞれ $k, k-1$ 次の多項式を含んでいるとする,

$$(\mathcal{P}_k)^2 \subset V_h(K), \quad \mathcal{P}_{k-1} \subset Q_h(K).$$

このとき,

(i) 任意の $f \in V'$ に対して, 有限要素解 (u_h^N, p_h^N) は存在して一意である。

(ii) 厳密解 (u, p) が $(H^{k+1}(\Omega_a))^2 \times H^k(\Omega_a)$ に属しているとき, 誤差評価

$$\|(u_h^N, p_h^N) - (u, p)\|_{V \times Q} \leq c \{ h^k (\|u\|_{(H^{k+1}(\Omega_a))^2} + \|p\|_{H^k(\Omega_a)}) + \frac{1}{(N+1)^k} \|u\|_{(H^{k+1/2}(\Gamma_R))^2} \}$$

が成立する. ここに, c は h, N, u, p に依存しない正定数である.

上の定理から, $N \sim 1/h$ なら,

$$\|(u_h^N, p_h^N) - (u, p)\|_{V \times Q} \leq ch^k (\|u\|_{(H^{k+1}(\Omega_a))^2} + |p|_{H^k(\Omega_a)})$$

が得られる.

3 軸対称問題の有限要素解析

$\tilde{\Omega}$ を 3 次元軸対称領域とし, Stokes 方程式 (1), (2) を考える. 流れは軸対称であるとする. Ω を子午面とし, 円筒座標系 $x = (x_1, x_2)$ を用いる. x_1 は軸からの距離, x_2 は軸方向の座標である. このとき, $u = (u_1, u_2)(x)$ を流速, $p = p(x)$ を圧力として, 元の問題は 2 次元領域 Ω での問題

$$\nu Lu + \text{grad } p = f \quad (x \in \Omega), \quad (15)$$

$$\text{div}_1 u = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (16)$$

に帰着される. ここに

$$\text{div}_1 u = \frac{1}{x_1} \text{div}(x_1 u), \quad \Delta_1 = \text{div}_1 \cdot \text{grad}, \quad L = \begin{bmatrix} -\Delta_1 + \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\Delta_1 \end{bmatrix}$$

である. Ω の境界 $\partial\Omega$ は 3 つの部分

$$\partial\Omega = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (\Gamma_0 \equiv \partial\Omega \cap \{x_1 = 0\})$$

に分かれており, 境界条件

$$u = g^1 \quad (x \in \Gamma_1), \quad [\sigma(u, p)]n = g^2 \quad (x \in \Gamma_2) \quad (17)$$

が課されている. ここに, $\sigma(u, p)$ は応力テンソル (6) である.

この問題の微分作用素は軸上で特異性をもっている. 重み付関数空間

$$X_{1/2}^{\ell, 2}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega); x_1^{\frac{1}{2}-\ell+|\beta|} D^\beta v \in L^2(\Omega), 0 \leq |\beta| \leq \ell\},$$

$$W_{1/2}^{\ell, 2}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega); x_1^{\frac{1}{2}} D^\beta v \in L^2(\Omega), 0 \leq |\beta| \leq \ell\}$$

を導入し,

$$V(g^1) = \{v \in X_{1/2}^{1, 2}(\Omega) \times W_{1/2}^{1, 2}(\Omega); v = g^1 \quad (x \in \Gamma_1)\},$$

$$V = V(0), \quad Q = L_{1/2}^2(\Omega) \equiv W_{1/2}^{0, 2}(\Omega)$$

を定義する.

(15)-(17) に対応する変分問題は, $(u, p) \in V(g^1) \times Q$ で

$$a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle \quad (\forall v \in V), \quad (18)$$

$$b(u, q) = 0 \quad (\forall q \in Q) \quad (19)$$

を満たすものを求めることである。ここに、

$$a(u, v) = 2\nu \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 D_{ij}(u) D_{ij}(v) + \frac{u_1 v_1}{x_1^2} \right\} x_1 dx, \quad b(v, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div}_1 v \, x_1 dx,$$

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f \cdot v \, x_1 dx + \int_{\Gamma_2} g^2 \cdot v \, x_1 ds$$

である。

ϕ_i, ψ_j をそれぞれ節点 $P_i, P_j (\in \bar{\Omega})$ での流速, 圧力の基底関数とする。これらは, Descartes 座標系で下限上限条件 (14) を満たしているとする (例えば, P2/P1 要素, P1+/P1 要素 [5])。各要素上で、

$$\mathcal{P}_k \subset \{\phi_i\}, \quad \mathcal{P}_{k-1} \subset \{\psi_j\}$$

であると仮定する。ここに、 $\mathcal{P}_k$ は k 次の多項式である (P2/P1 要素のときは $k=2$, P1+/P1 要素のときは $k=1$ となる)。

補題 2. 次の式が成立する、

$$\phi_i \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega) \quad (P_i \notin \Gamma_0), \quad \phi_i \in W_{1/2}^{1,2}(\Omega) \quad (\forall i), \quad \psi_j \in L_{1/2}^2(\Omega) \quad (\forall j).$$

近似空間 W_h を

$$(\phi_i, 0)^T \quad (P_i \notin \Gamma_0), \quad (0, \phi_i)^T \quad (\forall i),$$

の線形結合の全体, Q_h を $\psi_j (\forall j)$ の線形結合の全体とする。 $V_h(g^1)$ と V_h を

$$V_h(g^1) = \{v_h \in W_h; v_h(P_i) = g^1(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_1)\}, \quad V_h = V_h(0)$$

により定義する。

問題 (18), (19) の有限要素近似は, $(u_h, p_h) \in V_h(g^1) \times Q_h$ で

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle \quad (\forall v_h \in V_h), \quad (20)$$

$$b(u_h, q_h) = 0 \quad (\forall q_h \in Q_h) \quad (21)$$

を満たすものを求めることである。Descartes 座標系のとときと同様に、円筒座標系でも上述の要素に対して下限上限条件が成立する。

補題 3 [2]. h に依存しない正定数 β が存在して

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|q_h\|_Q \|v_h\|_V} \geq \beta$$

が成立する。

関数空間 $X_{1/2}^{\ell,2}(\Omega)$ と $W_{1/2}^{\ell,2}(\Omega)$ での近似理論を構成して、次の誤差評価を得ることができる。

- 定理 3 [3]. (i) 問題 (20), (21) の解 (u_h, p_h) は存在して一意である.
(ii) (18), (19) の厳密解 (u, p) が $(W_{1/2}^{k+1,2}(\Omega))^2 \times W_{1/2}^{k,2}(\Omega)$, $k \geq 1$, に属しているなら,

$$\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq ch^k \{ \|u\|_{(W_{1/2}^{k+1,2}(\Omega))^2} + \|p\|_{W_{1/2}^{k,2}(\Omega)} \}$$

が成立する. ここに, c は h, u, p に依存しない正定数である.

安定化有限要素法 [6] を用いれば下限上限条件は必要でない. 軸対称問題 (18), (19) の安定化有限要素近似に対しても, 定理 3 と同様な結果が得られる [3].

4 おわりに

最近の有限要素近似の研究から 2 つの話題を取り上げた. これらは, 無限領域の問題, 特異性の問題を解決している. どちらの話題でも Stokes 問題を取り扱ったが, 得られた解析結果は, 流体問題だけでなく構造問題でも有用である. その手法は一般的であり, いろいろな方向への発展が可能である.

参考文献

- [1] H. Han and W. Bao. The artificial boundary conditions for incompressible viscous materials on an unbounded domain. in preprint, 1995.
- [2] M. Tabata. Mixed and stabilized finite element approximations to axisymmetric flow problems. In S. Wagner et al., editors, *Computational Fluid Dynamics '94*, pages 176–180, John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester, 1994.
- [3] M. Tabata. Finite element analysis of axisymmetric flow problems. In *Proceedings of ICIAM 95*, Akademie Verlag, Berlin, to appear.
- [4] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer, Berlin, 1986. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 5.
- [6] L. P. Franca, S. L. Frey, and T. J. R. Hughes. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95:253–276, 1992.