

## 熱浴中におけるカオス振動子集団の示す相転移

東工大 理 小野雅也 椎野正壽

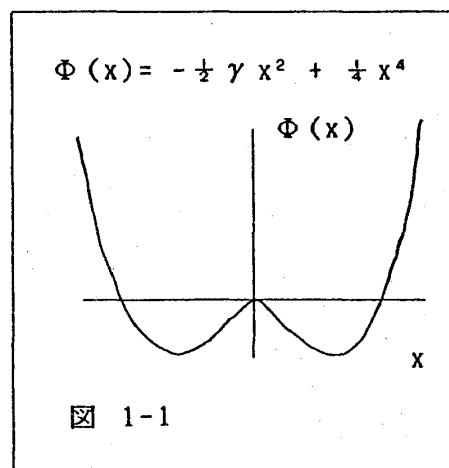
## 1. 序論 - 確率モデルと非平衡系相転移 -

近年、非平衡状態における相転移現象への関心が高まっている。この現象は生体系や化学反応系などの開放系でみられるような時間空間的な振動パターンの生成に代表されるものでありバラエティに富んでいる(1)。しかし、熱平衡系のものと比較してその研究は、非線形性が本質的役割を果たす散逸力学系の時間発展を直接問題にしなければならないことが多い点で、一般にはるかに難しく、系統的な解析手段を未だ見いだすに至っていない現状であると思われる。

非平衡系相転移の問題を統計物理学の立場から理解するためには、少なくとも一つの方法として、すでに確立されている熱平衡系相転移の概念を自然に非平衡系に拡張する行き方があってもよいであろうとの立場に立ち、我々は相転移一般の研究を進めている。即ち、熱平衡系相転移を起こす系における静的および動的挙動は臨界異常を含めてよく研究されているので、これをもとに非平衡系相転移の概念が熱平衡系のものよりどの様にして拡張され、またその性質は熱平衡系相転移とどこまで対応がとりうるのかを調べようというわけである。

それにはまず、非平衡系相転移を示す簡単なモデルを作り、その振舞いを調べることによって、非平衡系相転移の本質について議論することが不可欠である。そのとき系の動的挙動を論じ易いという理由から、微分方程式で表される散逸力学系に熱浴の効果を白色雑音として取り入れた、Langevin 方程式で記述される確率モデルがこれまでよく用いられてきた。

ところが、この方程式の取り扱いには注意が必要である。それは、たとえ元の力学系がパラメータの変化による分岐現象を示したとしても、その力学系の自由度が有限な場合は、それにノイズが加わった Langevin 方程式は全く分岐を示さないということである。例えば 図1-1 のような double well 構造を持つ一次元の非調和ポテンシャルで表される力学系はしばしば熱平衡系だけでなく、レーザー発振等の非平衡系相転移のモデルとしても引合いに出されるもの



であるが、分岐パラメータ  $\gamma$  の変化により生じる力学系の分岐現象は、単にそれにノイズを加えただけの Langevin 方程式のもとではもはや存在しえなくなるのである。これは、対応する有限次元の線形 Fokker - Planck 力学系では通常の H-定理が成立しており(2)、今の場合  $\gamma$  の値及びノイズパワー  $D$  の値がどんなであってもそれぞれ系は、初期条件によらないで時間の経過と共に唯一の定常分布に落ち着いてしまうという性質を持っているからである。

ここで振動子を結合強度  $\varepsilon (>0)$  の平均場相互作用で無限個結合させた系を取り扱うことにすると状況は一変するのである。すなわち、連立の Langevin 方程式

$$\frac{d}{dt} x_i = - \frac{d\Phi(x_i)}{dx_i} + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j \neq i} (x_j - x_i) + f_i(t),$$

$$\Phi(x) = - \frac{\gamma}{2} x^2 + \frac{x^4}{4}, \quad (1.1)$$

$$\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

を考えると、振動子数  $N \rightarrow \infty$  のいわゆる熱力学的極限では、系の経験分布関数

$$p(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \quad (1.2)$$

の時間発展は次の非線形 Fokker - Planck 方程式(以下 NFPE と記述)に支配されることになるのである(3,4,5)。

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ - \frac{d\Phi(x)}{dx} + \varepsilon \langle x \rangle - \varepsilon x \right] p + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p$$

$$\langle x \rangle = \int dx x p(t, x) \quad (1.3)$$

ここで、NFPE ではドリフト項の中に未知の分布関数  $p$  自身についての  $x$  の平均値が入っていることに注意されたい。この非線形性の故に(1.3)はノイズパワー  $D$  の変化による分岐現象を呈するのである。

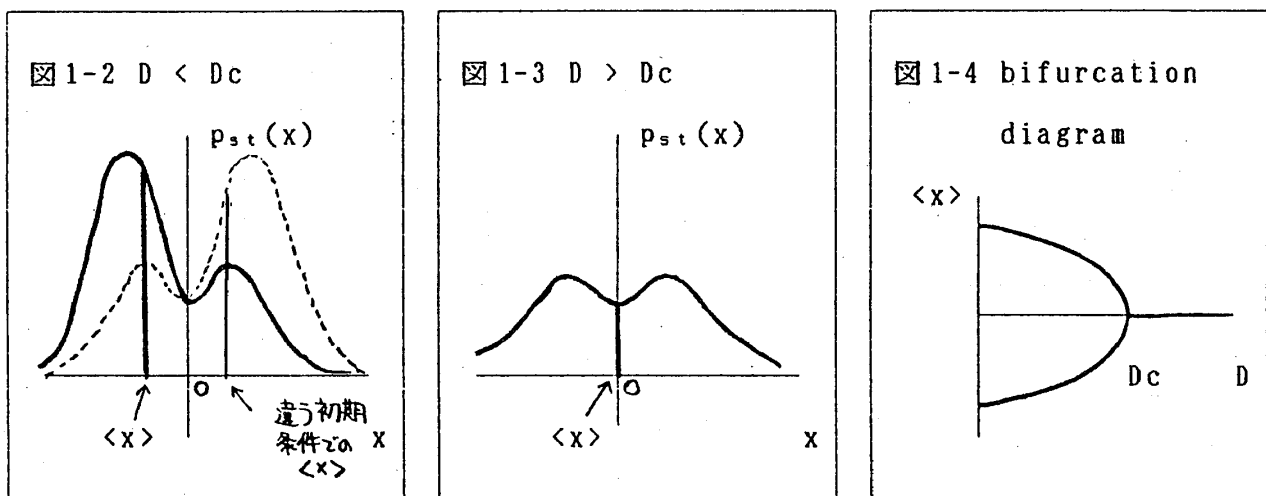
この方程式の場合にも Lyapunov functional であるフリーエネルギー  $F$  が存在し、 $dF/dt \leq 0$  となるいわゆる H-定理が成立し、定常分布への収束が保証されているのであるが、今度は線形 Fokker - Planck 方程式とは異なり、一般に定常分布は初期条件によることになるのである。実際、(1.3)の定常分布は Gibbs 分布

$$p_{st}(x, x_0) = \frac{\exp \{ (-\Phi - \varepsilon x^2/2 + x_0 x) / D \}}{\int dx \exp \{ (-\Phi - \varepsilon x^2/2 + x_0 x) / D \}} \quad (1.4)$$

で与えられ、オーダーパラメータ  $\langle x \rangle_{st}$  はセルフコンシステント方程式

$$\langle x \rangle_{st} \equiv x_0 / \varepsilon = \int dx \, x \, p_{st}(x, x_0) \quad (1.5)$$

で決定されるので、ノイズパワー  $D$  の変化に伴い (1.5)、従って (1.3) が強磁性型の二次相転移に対応する pitchfork 型分岐を示すことを導くことができ、そのため  $D < D_c$  では図に示すごとく初期分布の違いによって行き着く先の定常分布が異なるという、対称性の破れの生じることがわかる。(図1-2, 1-3, 1-4)



なおこの系では (1-4) で求まる定常分布の局所安定性の議論及び臨界点近傍の動的挙動についても厳密な解析が容易にできるのである(4)。

上に述べたことは熱平衡系相転移に対応した相転移を確率モデルで表現したものであるといえるが、本質的に非平衡系の相転移を考えるために、上の議論をリミットサイクル型の振動子について当てはめてみる。即ち、ここでは簡単のため、以下のようなリミットサイクル型振動子を平均場相互作用で無限個結合させた系についての Langevin 方程式を考える(6)。

$$\frac{d}{dt} x_i = -\omega_0 y_i + \{1 - (x_i^2 + y_i^2)\} x_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - x_i) + f_i^{(x)}(t)$$

$$\frac{d}{dt} y_i = \omega_0 x_i + \{1 - (x_i^2 + y_i^2)\} y_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - y_i) + f_i^{(y)}(t)$$

$$\langle f_i^{(a)}(t) f_j^{(b)}(t') \rangle = 2D \delta_{ab} \delta_{ij} \delta(t - t') \quad (1.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (a, b = x, y)$$

$N \rightarrow \infty$  では、系の経験分布関数  $p(t, x, y)$  の時間発展を支配する NFPE は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} [ -\omega_0 y + \{1 - (x^2 + y^2)\}x + \varepsilon \langle x \rangle - \varepsilon x ] p \\ & - \frac{\partial}{\partial y} [ \omega_0 x + \{1 - (x^2 + y^2)\}y + \varepsilon \langle y \rangle - \varepsilon y ] p \\ & + D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] p \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$[ \langle x \rangle = \int dx dy x p(t, x, y), \langle y \rangle \text{ も同様 } ]$$

となる。この場合、充分時間が経った後の定常解として、系の経験分布関数は次のごとく書き表せるのである。

$$p(t, x, y) = \frac{\exp [H(t, x, y)]}{\int dx dy \exp [H(0, x, y)]} \quad (1.8)$$

$H(t, x, y) = \{ \frac{1}{2}(1-\varepsilon)(x^2+y^2) - \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 + x_0(x \cos \omega t + y \sin \omega t) \} / D$   
 オーダーパラメータの絶対値  $x_0 / \varepsilon$  は、先の例と同様にセルフコンシステント方程式より求められる。

$$\frac{x_0}{\varepsilon} = \frac{\int dx dy x \exp [H(0, x, y)]}{\int dx dy \exp [H(0, x, y)]}$$

上式より、分布関数全体従ってオーダーパラメータが周期  $\omega$  の回転運動を行い、その振幅がノイズパワーの増加と共に減少し、ある臨界値  $D_c$  において振幅が消えるというリズム、非リズムの相転移（非平衡相転移）の起こることがわかるのである。即ちここでの相転移は NFPE (1.7) の Hopf 分岐に対応していることになる。（図1-5）

さらに、これは後で詳しく述べるが、分布関数の形を Gauss 型で置き換える Gaussian Decouple 近似によって求めた臨界値  $D_c$  が、厳密解とかなり良い一致を示すという結果も得た。

また、この系で振動子の固有周波数に分布のある場合には、振動子間結合強度と周波数分布の広がり程度との競合による同期、非同期という引き込みに関する別のタイプの相転移が起こることになるが、これらの結果についてはここでは省略する(7)。

以上のように、振動子を平均場相互作用で無限個結合させた系は非平衡系相転移の概念を熱平衡系相転移のそのの自然な拡張として議論するうえで最も簡単な

モデルの一つであり、厳密に取り扱えるという利点もあるのである。そこでのポイントは非平衡系相転移が NFPE の分岐現象として把握されるということであろう。我々の扱っている NFPE は非線形マスター方程式の一種であるが、非線形マスター方程式の表す分岐現象が非平衡系相転移を記述できるという点に関して、最近我々は非対称神経ネットワークモデルにおける Glauber ダイナミクスに対しても解析を行い、非平衡系相転移の存在を示すことができたことを付け加えておく(8)。

さてこの振動子をカオスを示すものに代えた系は、振動子間結合強度  $\varepsilon$  とノイズパワー  $D$  の競合によってどのような相転移を示すのであろうかという問題は非常に興味あるものと思われる。

すでにカオスを起こす系にノイズを加えたものについてはいくつかの研究が行われてきた。その例を挙げると、period doubling 型分岐の周期解 - カオス転移においてノイズによる bifurcation gap の生じる例(9)や、ノイズの大きさを零に近づけた極限での scaling 則(10)、ノイズを加えることによりカオスが消失した事例(11)などが報告されている。しかし、いずれの場合もはじめに述べたことと同様の理由から、系の分布関数の時間発展は自明なアトラクターへの漸近であり統計的平均値及び分布関数はカオス運動とは無関係で分岐・相転移現象は何も起こらないことになる。

そこで我々はカオス振動子の無限個結合集団を取り上げ、振動子間結合強度  $\varepsilon$  とノイズパワー  $D$  をパラメータとする分岐現象、すなわち非平衡系相転移の有無および詳細についてモンテカルロシミュレーションと Gaussian Decouple 近似とによって議論を行った。その結果を次章で述べて行くことにする。

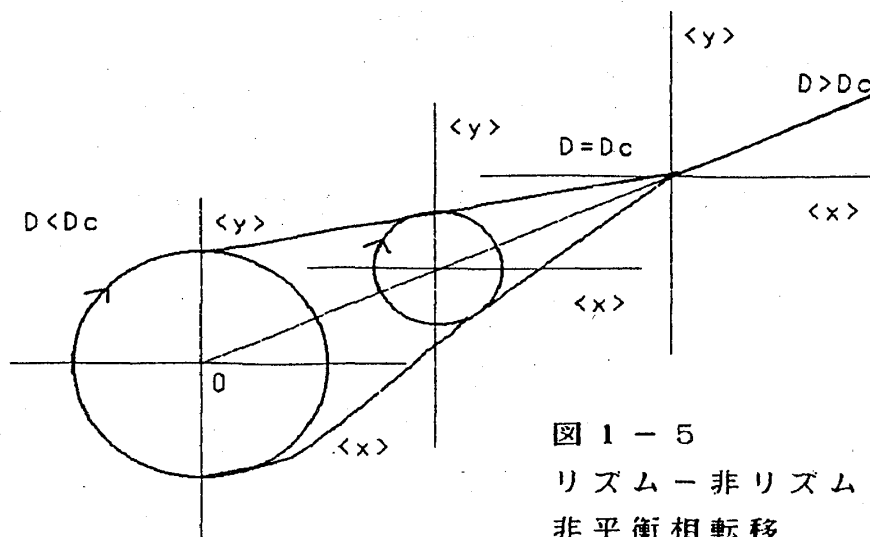


図 1 - 5

リズム - 非リズムの  
非平衡相転移

## 2. カオス振動子集団の示す非平衡系相転移

### 2. 1 モンテカルロシミュレーション

カオス振動子として力学系の性質のよく知られている Lorenz カオス方程式を取り上げ、便宜上パラメーターを以下の様に設定する。

$$\frac{d}{dt} x = -Q x + Q y$$

$$\frac{d}{dt} y = -x z + R x - y \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} z = x y - b z$$

$$Q = 10, R = 28, b = 8/3$$

このとき相空間内には安定なカオス軌道のみ存在することが知られている。

(図 2-1, 図 2-2)

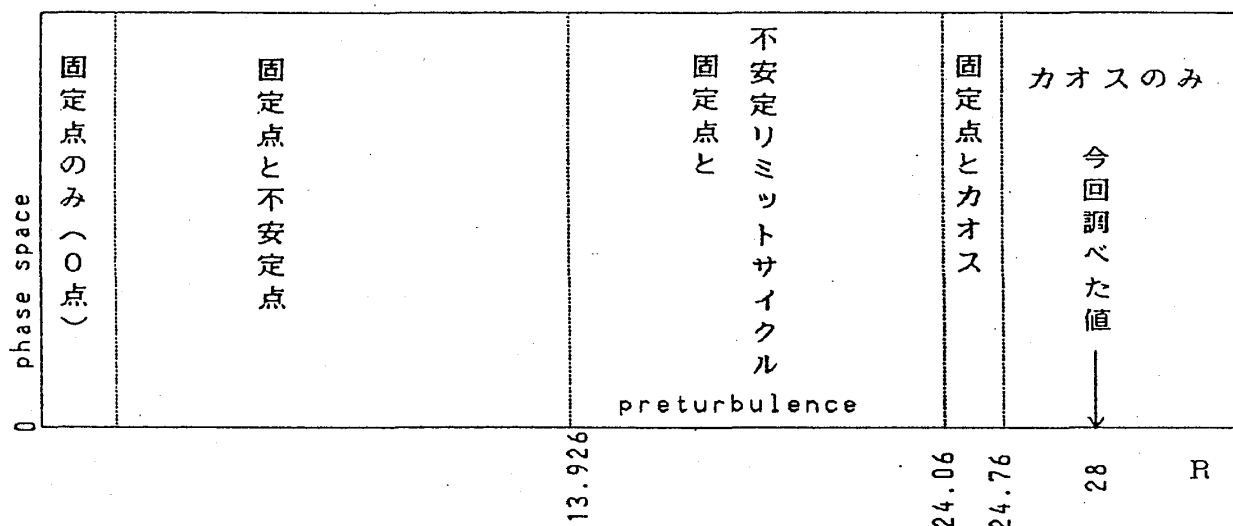


図 2 - 1 Lorenz カオス ( 2.1 ) の Bifurcation diagram

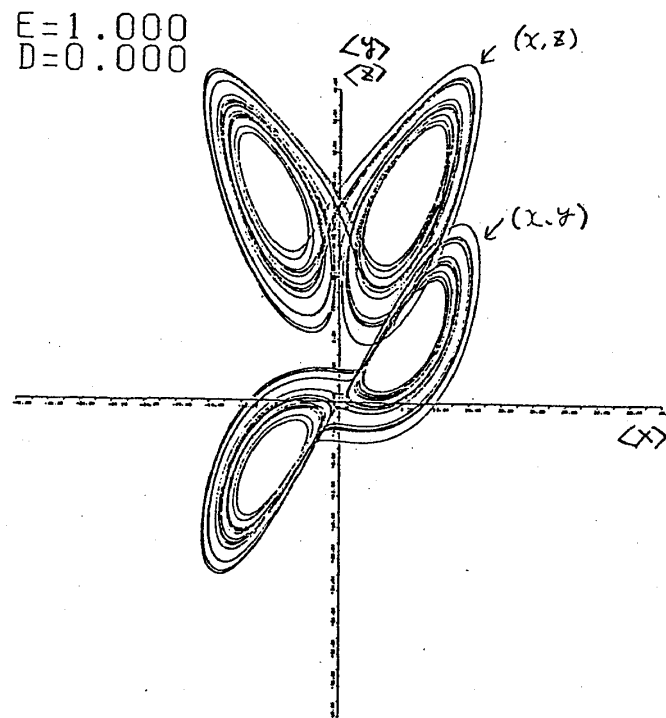


図 2 - 2  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

$(x, y)$  は  $xy$  平面への  
 $(x, z)$  は  $xz$  平面への射影

この振動子を平均場相互作用で無限個結合させ、熱浴として各々独立なノイズを加えたシステムは次の Langevin 方程式で記述される。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} x_i &= -Q x_i + Q y_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j \neq i} (x_j - x_i) + f_i^{(x)}(t) \\ \frac{d}{dt} y_i &= -x_i z_i + R x_i - y_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j \neq i} (y_j - y_i) + f_i^{(y)}(t) \\ \frac{d}{dt} z_i &= x_i y_i - b z_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j \neq i} (z_j - z_i) + f_i^{(z)}(t) \quad (2.2)\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad Q = 10, \quad R = 28, \quad b = 8/3$$

$$\langle f_i^{(a)}(t) f_j^{(b)}(t') \rangle = 2D \delta_{ab} \delta_{ij} \delta(t - t')$$

$$(a, b = x, y, z)$$

上式の振動子の数  $N$  を無限大にする（熱力学的極限）と、系の経験分布関数

$$p(t, x, y, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i)$$

の時間発展は、以下の非線形 Fokker - Planck 方程式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(t, x, y, z)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} [ -Qx + Qy + \varepsilon \langle x \rangle - \varepsilon x ] p \\
& - \frac{\partial}{\partial y} [ -xz + Rx - y + \varepsilon \langle y \rangle - \varepsilon y ] p \\
& - \frac{\partial}{\partial z} [ xy - bz + \varepsilon \langle z \rangle - \varepsilon z ] p \\
& + D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] p \quad (2.3)
\end{aligned}$$

[  $\langle x \rangle = \int dx dy dz x p(t, x, y, z)$ ,  $\langle y \rangle$ ,  $\langle z \rangle$  も同様 ]

この系は、それぞれの結合の大きさ  $\varepsilon$  において、ノイズ  $D$  の増加と共にどのような分岐を示すのであろうか。ここで方程式 (2.1) が  $(x, y)$  の符号の反転に対して不変であることから、(2.1) が  $(x, y)$  に対して対称な解を持っている事がわかる。したがってノイズ  $D$  が充分大きくなると分布が  $(x, y)$  に関して対称に広がって、オーダーパラメーター  $\langle x \rangle$ ,  $\langle y \rangle$  が共に零の値の固定点になる事が予想される。では、そのカオスと固定点との間では何が起きているのだろうか。

これらを調べるためには偏微分方程式 (2.3) を実際に解く事が必要であるけれども、これは解析的にも数値計算的にも困難である。そこで実際に (2.2) について振動子数  $N = 1000$  及び  $10000$  としたモンテカルロシミュレーションを行い、オーダーパラメーター  $\langle x \rangle$ ,  $\langle y \rangle$ ,  $\langle z \rangle$  の軌道 (phase portrait) を求めてみた。

なお、この軌道の Lyapunov 指数については、軌道がカオスの時に正值、固定点の時に負値を取ることは確かめられたが、後で述べるようなリミットサイクル的な軌道が現れる場合に関しては十分な結果をまだ得ていないので、本論文では議論を省略する。

以下にシミュレーション結果を示す。はじめにノイズの無い場合 (温度 = 零度) について、振動子間の結合の大きさ  $\varepsilon$  の各値における軌道の様子を述べ、次にノイズの大きさ  $D$  を変化させたときの軌道の変化について示す。

#### (1) ノイズ $D$ の無い場合

phase portrait の状態は初期条件依存性の有る場合と無い場合とに分けられ、

その場合分けは振動子間の結合の大きさ  $\varepsilon$  に依存している。なお、ここでのシミュレーションはすべて  $N = 1000$  のものである。

### ① 初期条件依存性の有る場合

$\varepsilon = 1$  では以下の結果を得た。

- ・初期条件を  $N$  個すべて同じ値にすると、もとのカオスと同様の phase portrait を得た (図 2-2)。  $N$  個の分布も一点に集中している。
- ・初期条件を  $N/2$  個ずつ  $x$  ,  $y$  の値の符号を反転させると、その  $N/2$  個ずつが  $x$  ,  $y$  に関して対称な二点に固定した (図 2-3)。 平均値は、 $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$  である。
- ・初期条件をランダムにガウス分布 (平均 = 0 , 標準偏差 = 10 ) で与えると、ほぼ  $N/2$  個ずつ ( 522 : 478 ) が  $x$  ,  $y$  に関して対称な二点に固定した。 (図 2-4)

$\varepsilon = 2, 4, 5$  でも  $\varepsilon = 1$  と同様の結果を得た。

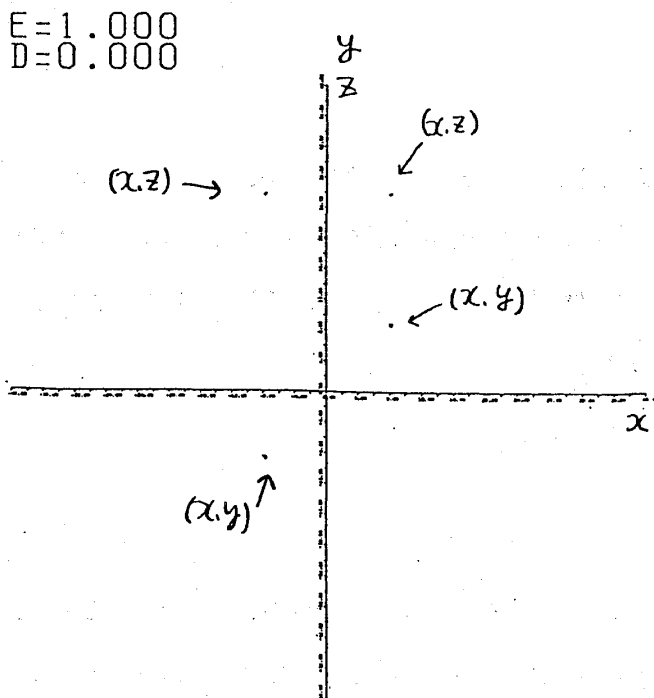


図 2-3  $x, y, z$  の分布

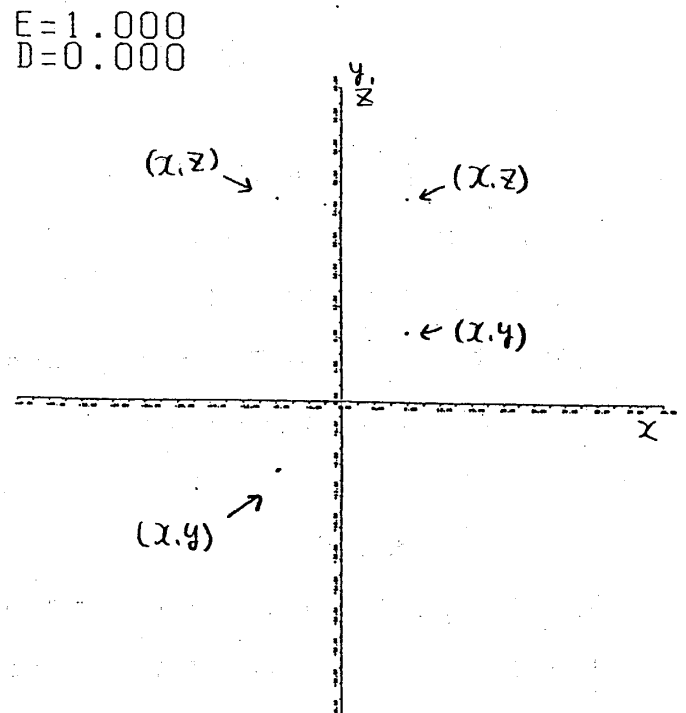


図 2-4  $x, y, z$  の分布

## ② 初期条件依存性の無い場合

$\varepsilon = 6, 8$  では初期条件によらず分布は一点に集中し、もとのカオスと同様な phase portrait を得た。(図 2-5)

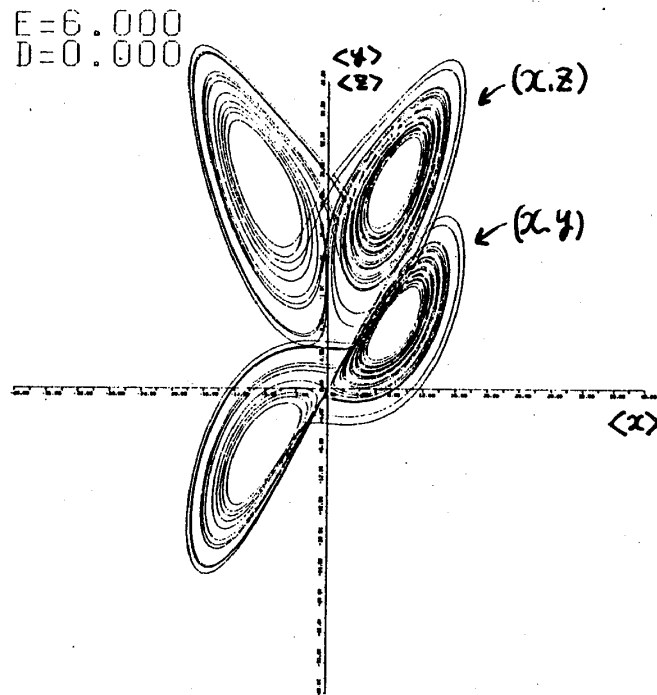


図 2 - 5  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

$\varepsilon$  が 5 以下で分布の形が二つに分かれるのは、もとのカオスの式 (2.1) が、 $x = y = \pm \sqrt{b(R-1)}$ ,  $z = R-1$  の二つの不安定な固定点を持っていることに関係している。そこで (2.2) において  $N/2$  個ずつが  $x, y$  に関して対称な二点に固定するという条件でその固定点を求めると

$$x = \pm \sqrt{b\{QR/(Q+\varepsilon) - \varepsilon - 1\}}$$

$$y = (Q+\varepsilon)x/Q$$

$$z = R - (\varepsilon+1)(Q+\varepsilon)/Q$$

となり、 $x$  が実数であるという条件から今のパラメーターでは  $\varepsilon = 11.8227\dots$  以上ではこの点が存在しないことがわかる。実際にはこれよりも小さい  $\varepsilon$  でこの点が不安定化したものと思われるけれども、無限次元の連立常微分方程式の固定点の安定性を議論することは一般に困難なので、本論文においてはシミュレーシ

モンテカルロ結果を示すのみにとどめた。また、初期条件依存性の有る場合、各々の終状態に対する初期条件の場合わけをすることも興味深い問題であるが、それは今後の課題とする。

## (2) ノイズの増加による Phase Portrait の変化

①  $\varepsilon = 1$  (  $N = 1000$  )

・  $D = 2$

初期条件を  $N$  個すべて同じにしても、分布は系の時間発展と共に徐々に広がっている。(図 2-6(a),(b))

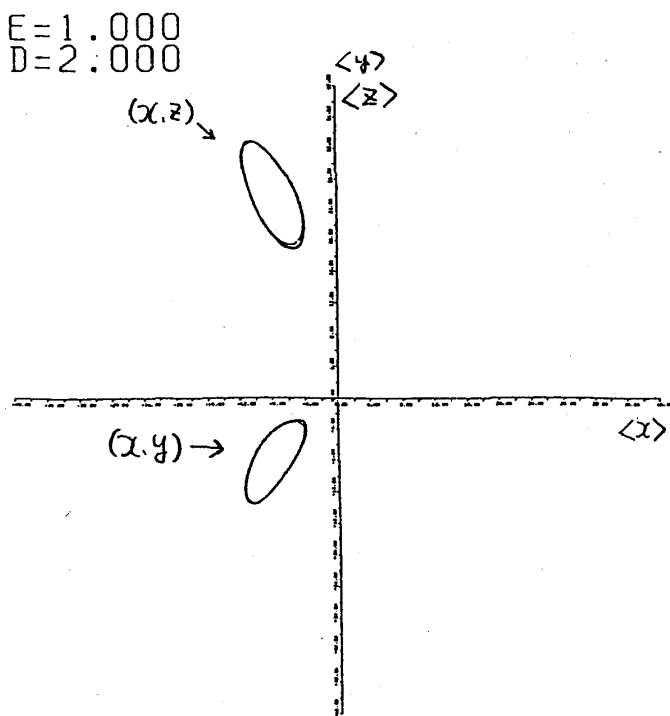


図 2-6 (a)  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

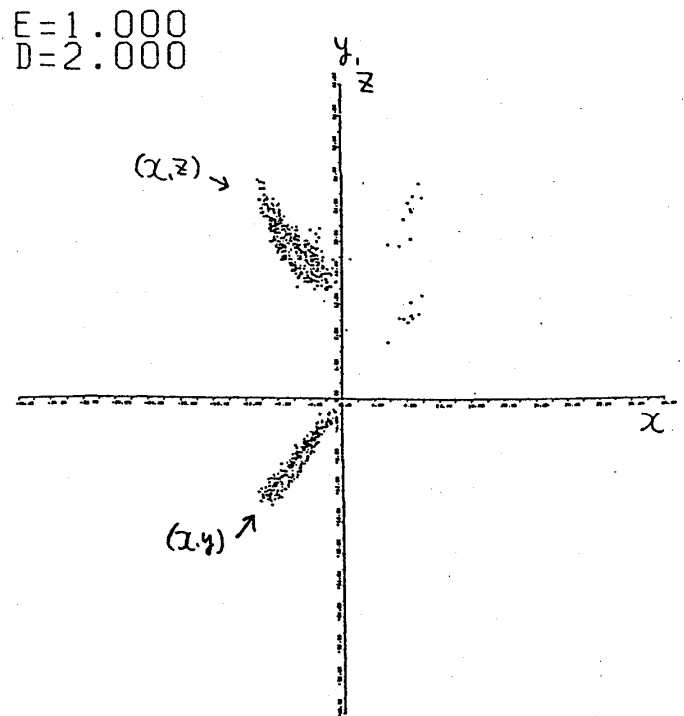


図 2-6 (b)  $x, y, z$  の分布

初期条件を  $N/2$  個ずつ  $x, y$  の値の符号を反転させると、その  $N/2$  個ずつが、 $x, y$  に関して対称な二つの固定点の回りに分布した(図 2-7(a),(b))。平均値は  $\langle x \rangle, \langle y \rangle$  とともにほぼ零である。

$E=1.000$   
 $D=2.000$

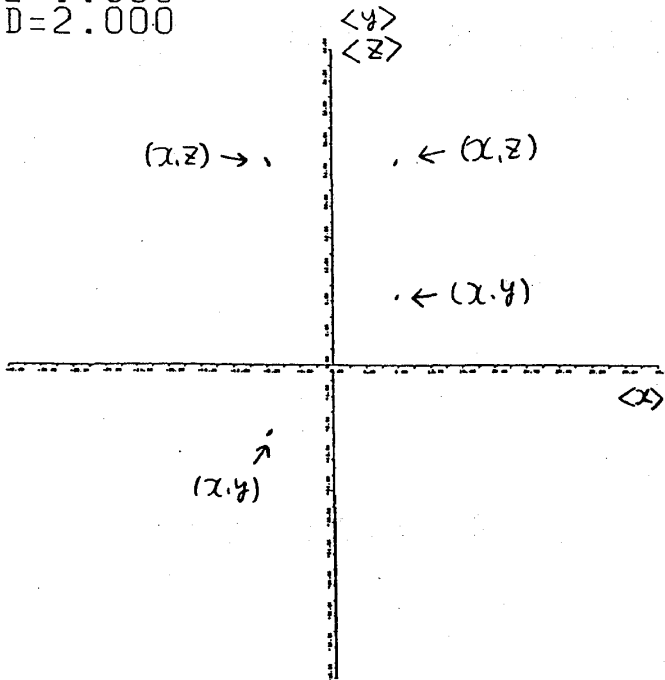


図 2-7 (a)  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
 $N/2$  ごとの phase portrait

$E=1.000$   
 $D=2.000$

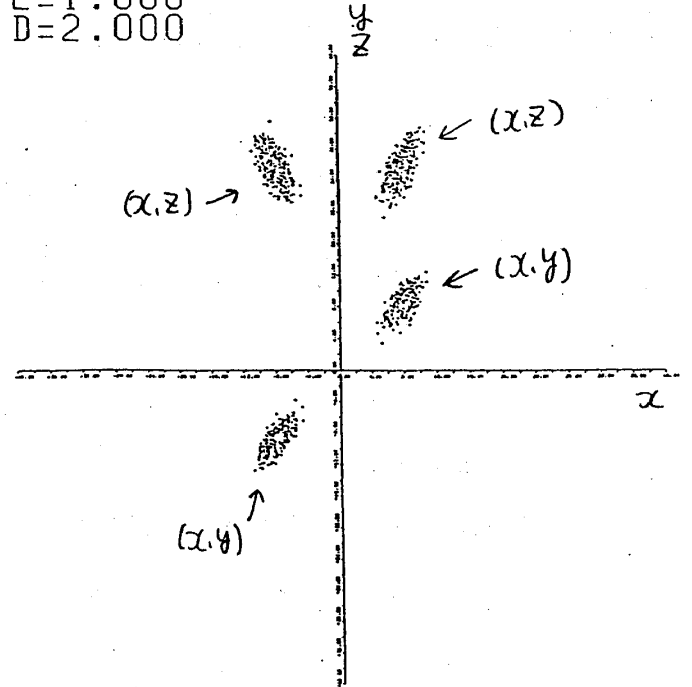


図 2-7 (b)  $x, y, z$  の分布

・  $D = 1.0$

初期条件によらず分布はおよそ一塊に成って、その平均値は先の対称な二点の内の一点の近くに固定している。(図 2-8(a), (b))

・  $D = 5.0$

初期条件によらず分布は対称に広がって、その平均値は  $\langle x \rangle, \langle y \rangle$  ともにほぼ零点の回りで揺らいている。この揺らぎは振動子の数  $N$  の有限性によるものと思われる。(図 2-9(a), (b))

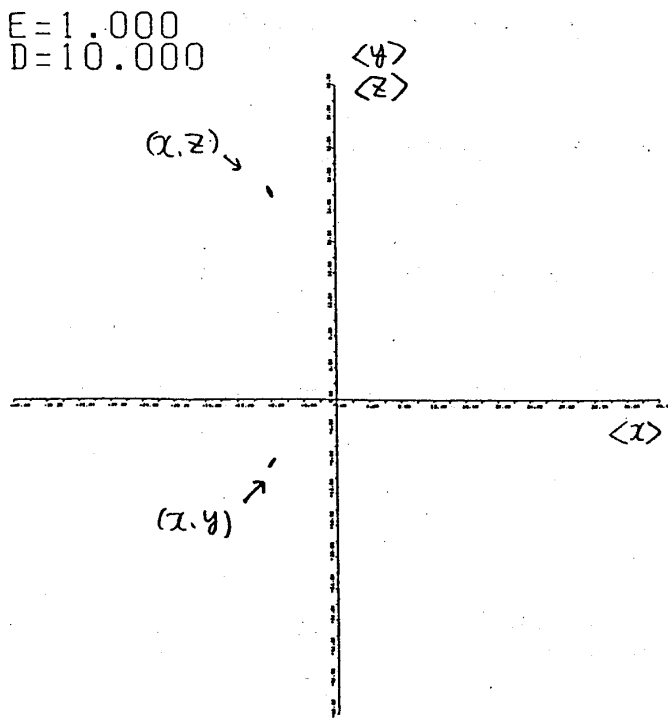


図 2-8 (a)  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の phase portrait

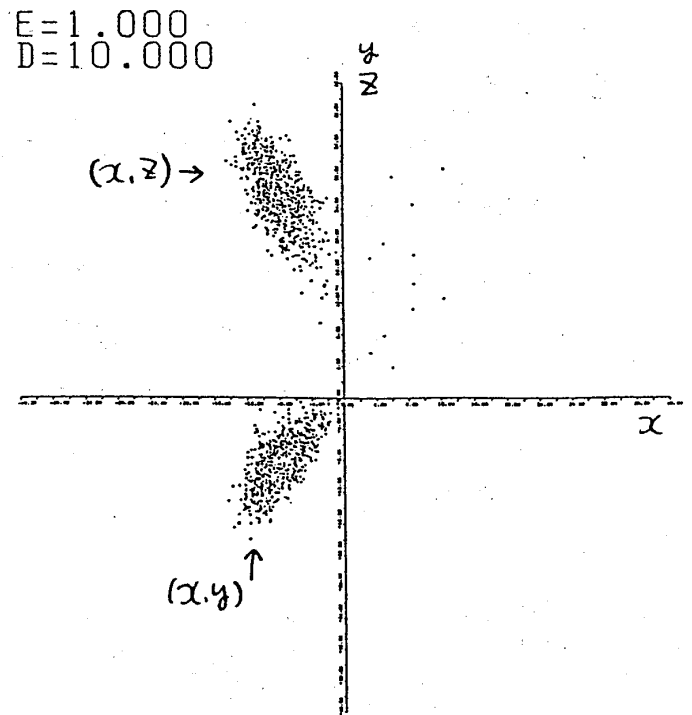


図 2-8 (b)  $x, y, z$  の分布

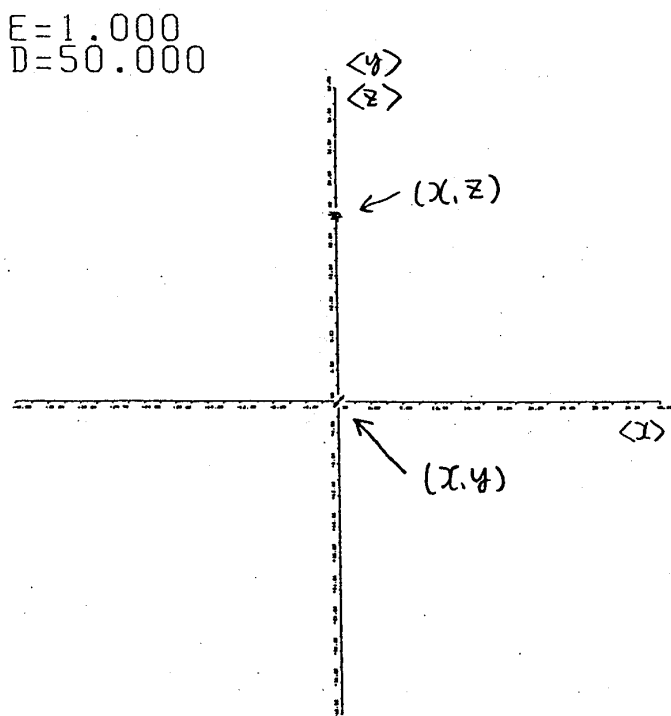


図 2-9 (a)  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の phase portrait

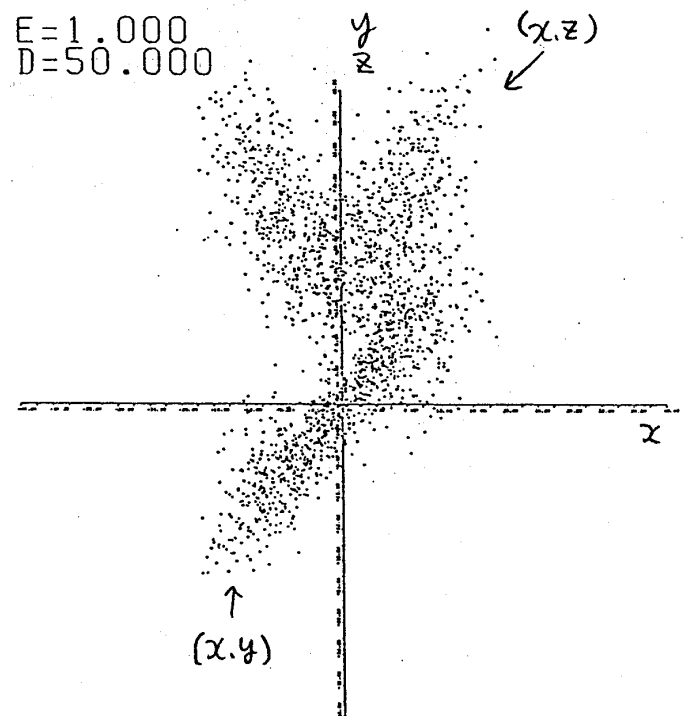


図 2-9 (b)  $x, y, z$  の分布

②  $\varepsilon = 2, 4, 5$  でも  $\varepsilon = 1$  と同様な結果を得た。 (  $N = 1000$  )

③  $\varepsilon = 6$

このときすべての  $D$  で常に初期条件によらず分布は一塊になった。

・  $D = 1$  (  $N = 1000$  )

もとのカオスと同様の phase portrait を得た ( 図 2-10(a),(b) )。

・  $D = 10$  (  $N = 1000, 10000$  )

$D = 1$  と較べると、phase portrait の広がりが狭くなっている ( 図 2-11(a),(b) )。

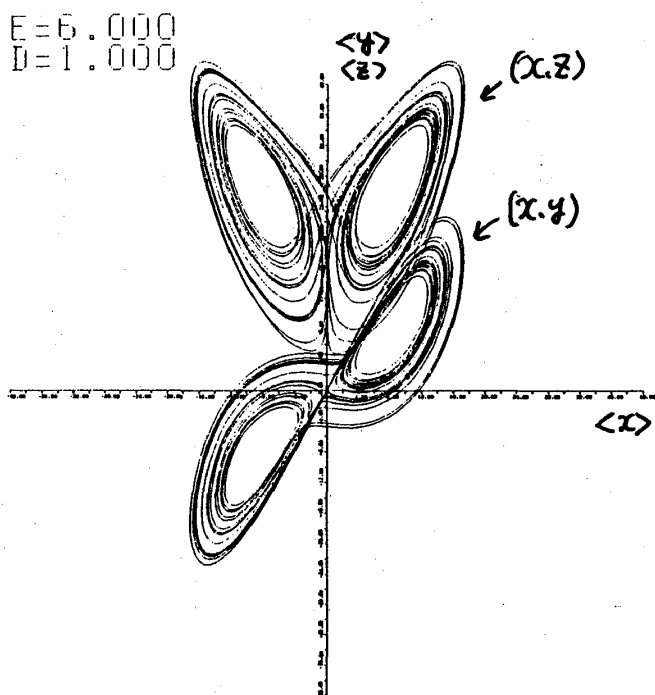


図 2-10 (a)  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$   
の phase portrait

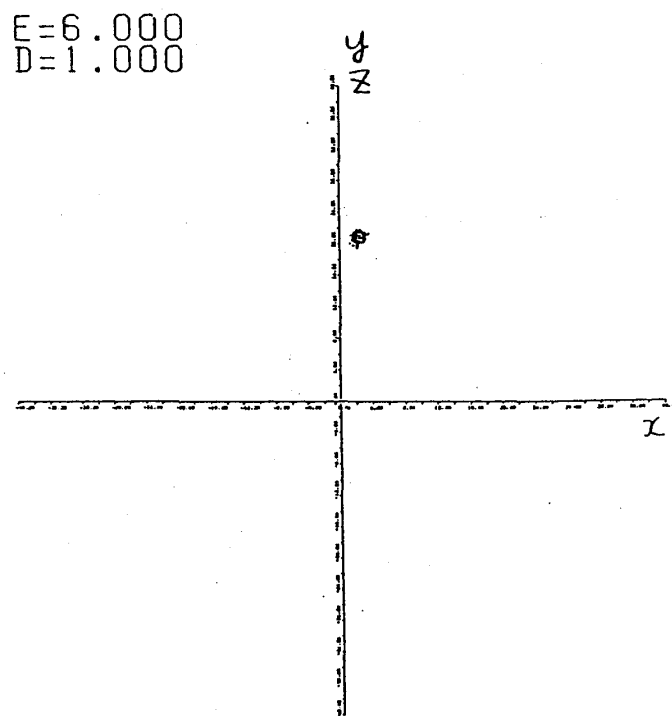


図 2-10 (b)  $x, z$  の分布

$E=6.000$   
 $D=10.000$

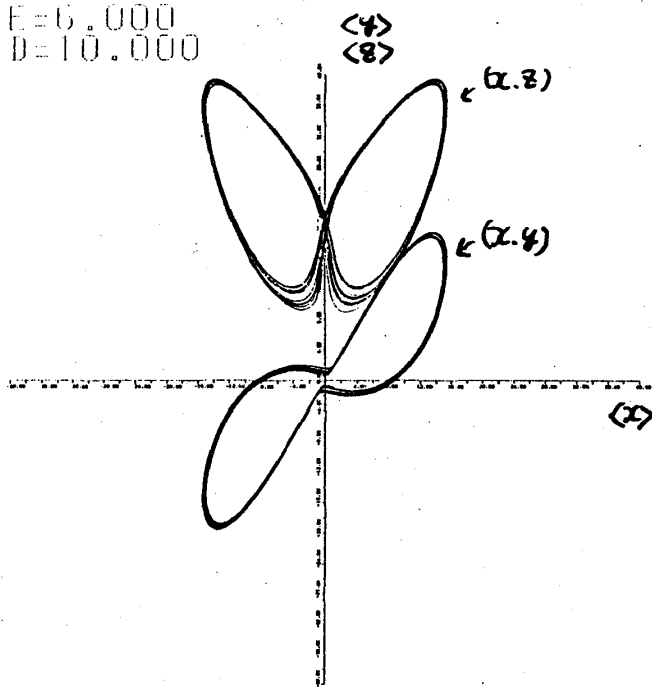


図 2-11 (a)  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$   
の phase portrait

$E=6.000$   
 $D=10.000$

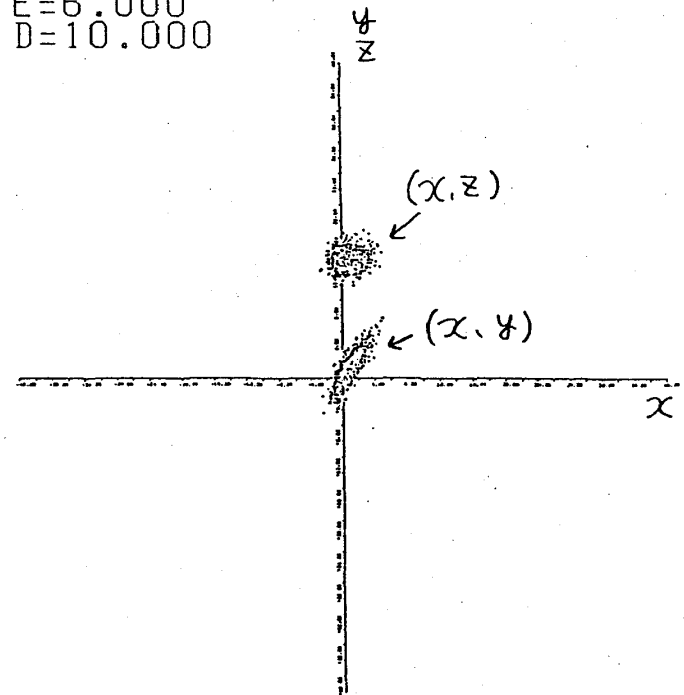


図 2-11 (b)  $x, y, z$  の分布

ここで問題になるのが  $N$  の有限性による軌道のぶれである。たとえ  $N \rightarrow \infty$  の熱力学的極限における軌道がリミットサイクルであったとしても、実際にはシミュレーションでは  $N$  が有限であるためその軌道はぶれを伴い、phase portrait を見ただけではリミットサイクルか否か判別できないことになる。しかしこの  $N$  有限性によるぶれは  $N$  が無限大に近づくにつれて小さくなるので、実際に  $N$  を増やしてシミュレーションすることで  $N \rightarrow \infty$  の熱力学的極限における軌道を推測することができる。ここでは、 $N = 10000$  のシミュレーションを行った(図 2-12)。これを見ると、軌道の幅がさらに狭まっている事がわかる。従って、 $N \rightarrow \infty$  の熱力学的極限においては、この軌道はリミットサイクルになることが、予想される。このことについては、次章の Gaussian decouple 近似のところでも議論する。

・  $D = 15$  ( $N = 1000$ )

phase portrait は再びカオス的になった(図 2-13)。

$E=6.000$   
 $D=10.000$

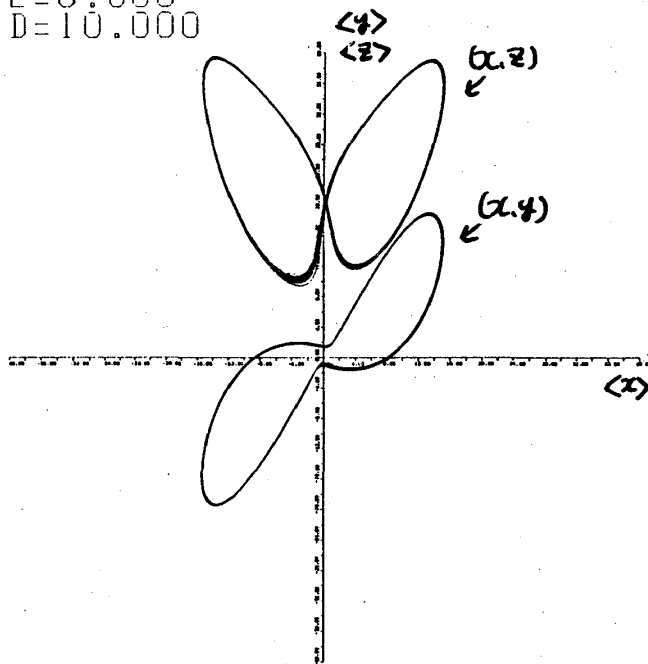


図 2 - 1 2  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

$E=6.000$   
 $D=15.000$

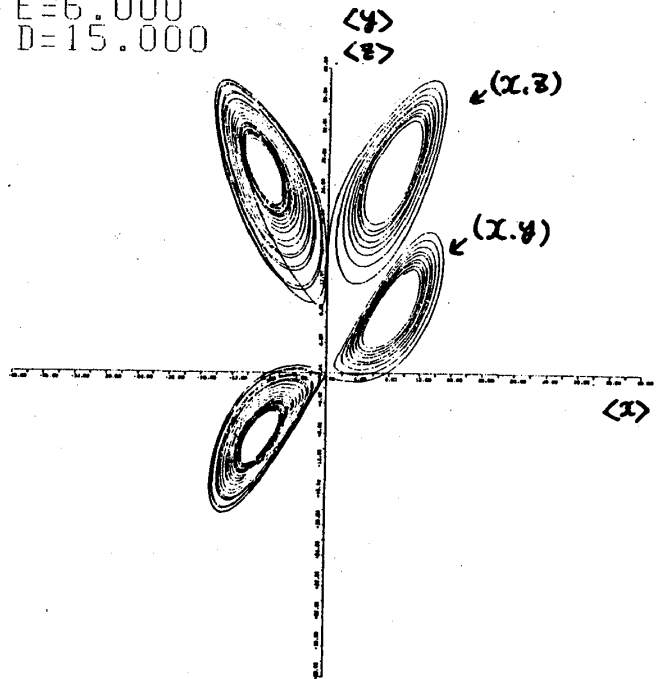


図 2 - 1 3  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

- $D = 18$  (  $N = 1000$  )

phase portrait はカオス的であるが、相空間の片側に軌道が滞在する時間が長くなった。(図 2-14)。

- $D = 19 \sim 25$  (  $N = 10000$  )

このパラメーター領域でリミットサイクル的な軌道が現れるので、再び  $N = 10000$  としてシミュレーションした。

$D = 19$  と  $25$  では共に相空間の片側で回転するリミットサイクル的な軌道が得られるが、そのぶれは  $D = 25$  の方が小さい。(図 2-15, 2-16)

即ち、このパラメーター領域ではノイズ  $D$  が多くなるに従って軌道の幅は狭くなっている。このことより、 $D = 25$  における軌道のぶれは  $N$  の有限性によるもので、 $N$  を無限大にすればこの軌道はリミットサイクルになると推測できる。

なお、 $D = 25$  では初期条件によっては phase portrait が固定点的になる場合もある(図 2-17)。これは、もとのカオスの式(2.1)の不安定な固定点に対応するものと思われる。

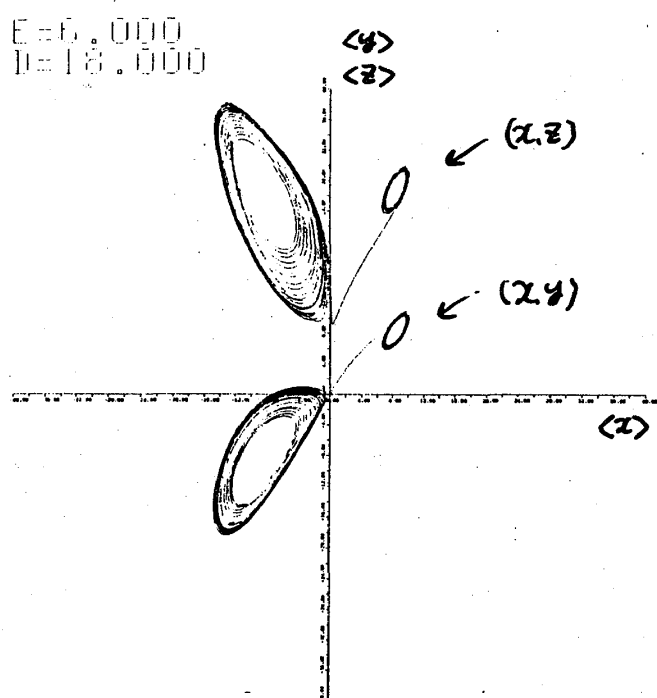


図 2 - 1 4  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

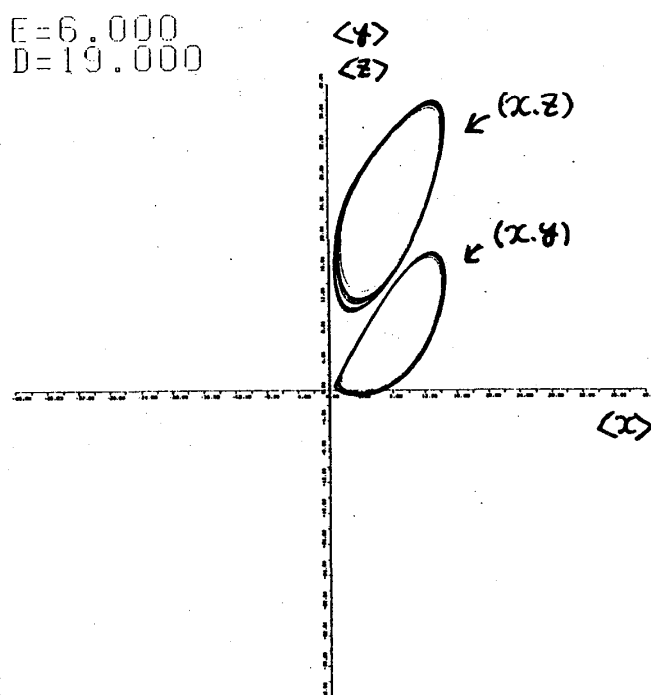


図 2 - 1 5  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

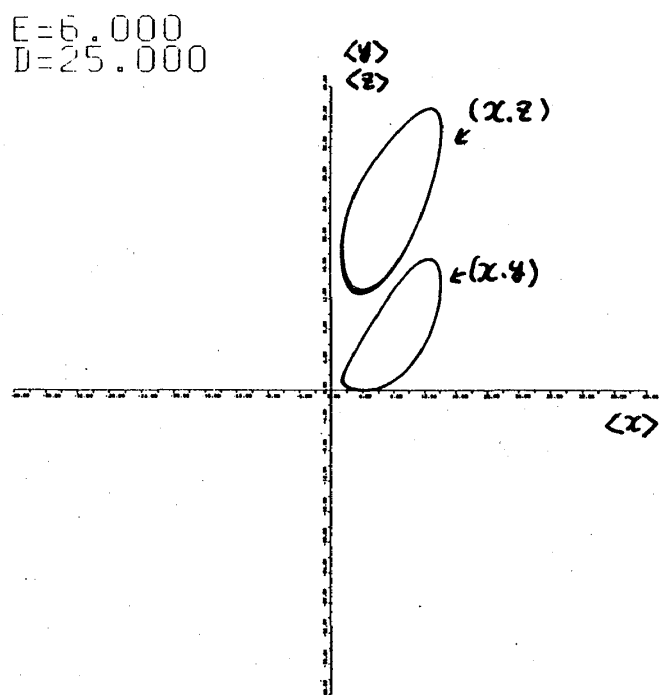


図 2 - 1 6  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
phase portrait

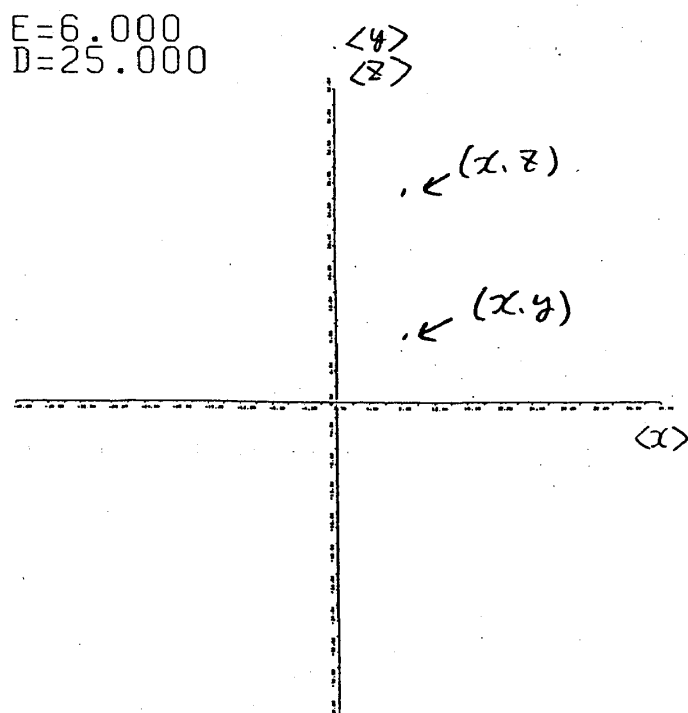


図 2 - 1 7  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の分  
布

- ・  $D = 30$  (  $N = 10000$  )

phase portrait は初期条件によらず固定点的で分布はその回りにまだ集まっている。(図 2-18(a),(b)) その位置は  $D = 25$  のものとほぼ同じである。

- ・  $D = 1000$  (  $N = 1000$  )

$D = 30$  からノイズを増やしていくと、分布は  $x, y$  に関して対称に広がって、上の固定点は  $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$  に近づき、 $D = 1000$  ではほぼ 0 になっている(図 2-19(a),(b))。このときの固定点を、対称な固定点と呼び、 $D = 30$  で見られた、分布が非対称な固定点と区別する。

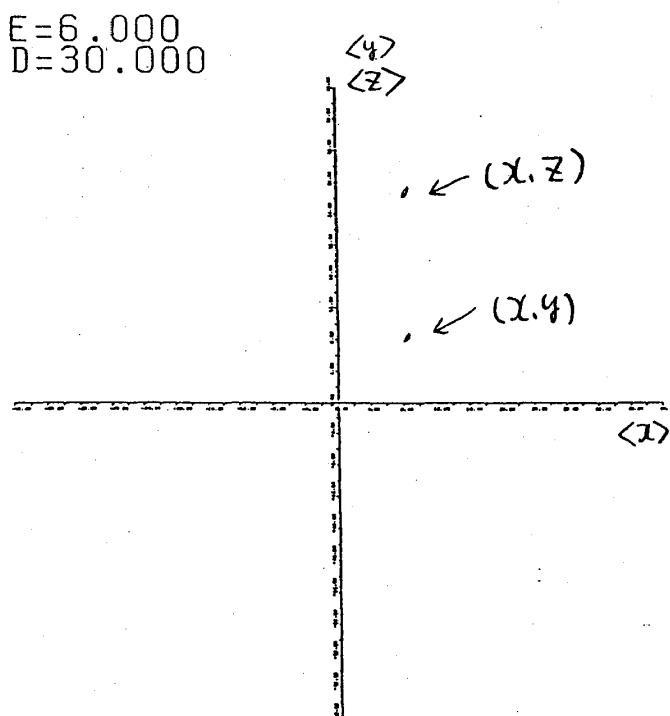


図 2 - 1 8 ( a )  
 $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の phase portrait

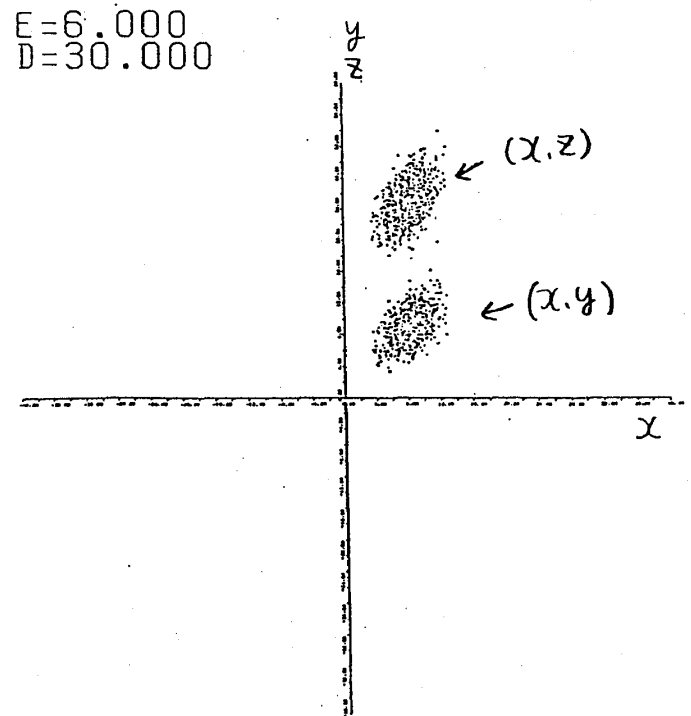


図 2 - 1 8 ( b )  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$   
の分布

$E=6.000$   
 $D=1000.000$

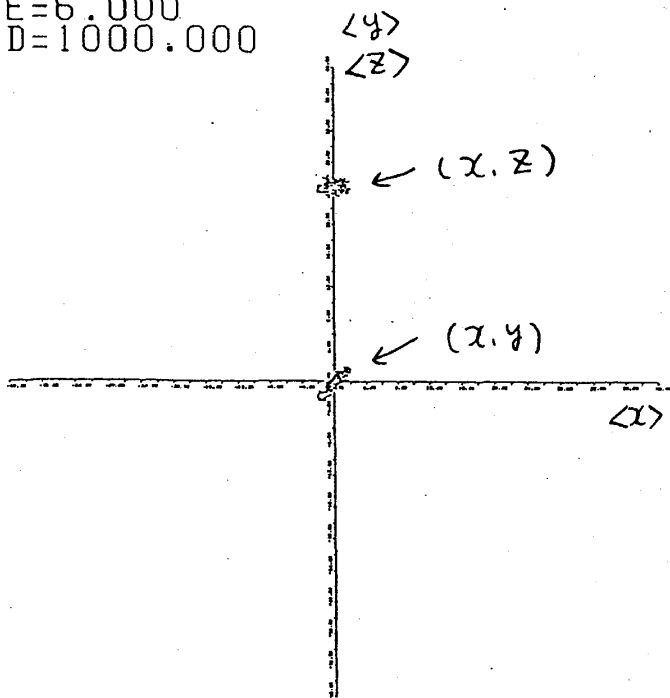


図 2 - 1 9 ( a )  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$   
 の phase portrait

$E=6.000$   
 $D=1000.000$

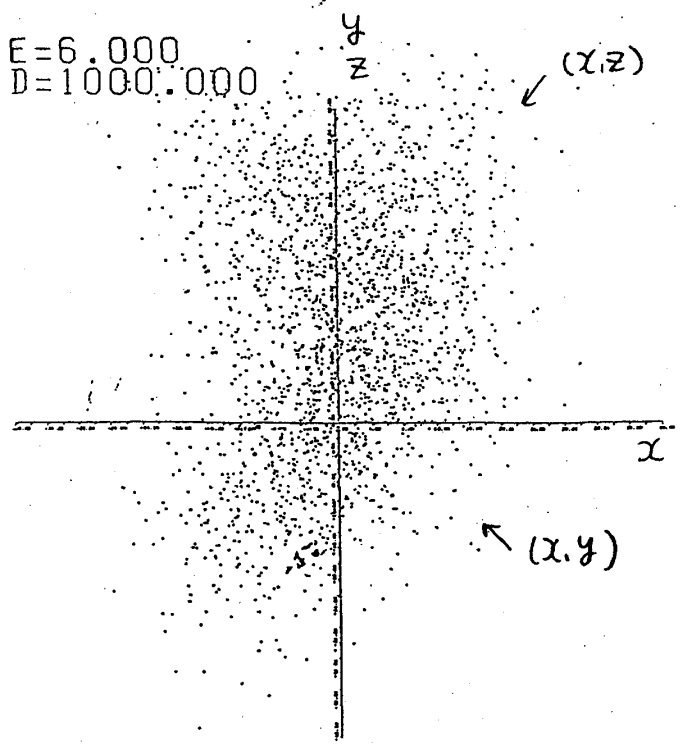


図 2 - 1 9 ( b )  $x, y, z$  の分布

以上の結果をまとめて  $\varepsilon = 6$  について Bifurcation diagram を描いたのが図 2-27 である。これについては次章の Gaussian Decouple 近似の所で合わせて議論する。

## 2. 2 Gaussian Decouple 近似(12)

先のシミュレーションにおける確率分布図からもわかるように、振動子間の結合  $\varepsilon$  が大きく、ノイズ  $D$  が小さいときには、分布は一塊でその広がりも小さい。そこで分布が単峰性を有している場合に許されると考えられる Gaussian Decouple 近似（以下 GDA と記す）の適用を試みる。GDA とは単峰性で Gauss 分布に近い分布を Gauss 分布で近似することにより高次のモーメントを一次と二次のモーメントですべて書き表してしまうものである。この方法を我々の NFPE に適用すると、NFPE より導かれるモーメント方程式の hierarchy を切断し、一次及び二次のモーメントだけの閉じた連立常微分方程式に近似することができる。先に述べた強磁性転移及びリミットサイクル型相転移に対応する NFPE の場合には、

そこで得られる厳密解とかなり良い一致を実際に GDA が与えることを我々は確認している。カオス振動子系の ( 2-2 , 2-3 ) にこの GDA を適用すると、以下の 9 元連立常微分方程式になる。

$$\begin{aligned}
 \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= Q (\langle y \rangle - \langle x \rangle) \\
 \frac{d\langle y \rangle}{dt} &= -\langle x z \rangle + R \langle x \rangle - \langle y \rangle \\
 \frac{d\langle z \rangle}{dt} &= \langle x y \rangle - b \langle z \rangle \quad (2.4) \\
 \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= 2 \{ Q \langle x y \rangle - (Q + \varepsilon) \langle x^2 \rangle + \varepsilon \langle x \rangle^2 + D \} \\
 \frac{d\langle y^2 \rangle}{dt} &= 2 \{ \langle x y \rangle (R - \langle z \rangle) + \langle y \rangle (\varepsilon \langle y \rangle - \langle x z \rangle) \\
 &\quad + \langle x \rangle (2 \langle y \rangle \langle z \rangle - \langle y z \rangle) - (1 + \varepsilon) \langle y^2 \rangle + D \} \\
 \frac{d\langle z^2 \rangle}{dt} &= 2 \{ \langle x \rangle (\langle y z \rangle - 2 \langle y \rangle \langle z \rangle) + \langle x z \rangle \langle y \rangle \\
 &\quad + \langle z \rangle (\langle x y \rangle + \varepsilon \langle z \rangle) - (b + \varepsilon) \langle z^2 \rangle + D \} \\
 \frac{d\langle x y \rangle}{dt} &= Q \langle y^2 \rangle - (1 + Q + 2 \varepsilon) \langle x y \rangle + \langle x^2 \rangle (R - \langle z \rangle) \\
 &\quad + 2 \langle x \rangle (\varepsilon \langle y \rangle - \langle x z \rangle + \langle x \rangle \langle z \rangle) \\
 \frac{d\langle y z \rangle}{dt} &= \langle x \rangle (\langle y^2 \rangle - 2 \langle y \rangle^2 - \langle z^2 \rangle + 2 \langle z \rangle^2) \\
 &\quad + 2 \langle y \rangle (\langle x y \rangle + \varepsilon \langle z \rangle) + \langle x z \rangle (R - 2 \langle z \rangle) \\
 &\quad - (1 + b + 2 \varepsilon) \langle y z \rangle \\
 \frac{d\langle x z \rangle}{dt} &= 2 \langle x \rangle (\langle x y \rangle + \varepsilon \langle z \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle) \\
 &\quad + \langle y \rangle \langle x^2 \rangle + Q \langle y z \rangle - (b - Q + 2 \varepsilon) \langle x z \rangle
 \end{aligned}$$

( 2.4 ) 式の数値計算の結果について述べる。パラメーター値は先のシミュレーションとの比較のため  $Q = 10$  ,  $R = 28$  ,  $b = 8 / 3$  ,  $\varepsilon = 6$  とした。

・  $D = 0, 1$

もとのカオスと同様の phase portrait を得、このとき Lyapunov 指数は  $D = 0$  で 0.91,  $D = 1$  で 0.94 と、もとのカオスの値 0.91 と良く合っている。

・  $D = 10$

ノイズ  $D$  の増加と共に軌道の幅が狭くなり、period doubling の逆の過程を経て非対称なリミットサイクルになった（図 2-20）。Lyapunov 指数は 0.0031 と零に近い値に減少している。

この phase portrait は先のシミュレーションのもの（図 2-12）とよく一致することがみてとれる。

・  $D = 15$

phase portrait は再びカオスになった（図 2-21）。Lyapunov 指数は 0.74 と、増加している。

・  $D = 18$

phase portrait はカオスであるが（Lyapunov 指数は 0.70）、軌道が相空間の片側に偏在するようになった。（図 2-22）。

・  $D = 20, 21, 23$

これらの  $D$  では共に相空間の片側で回転するリミットサイクルが得られた。その周期は  $D = 20$  で 4、 $D = 21$  で 2、 $D = 23$  で 1 であり（図 2-23, 2

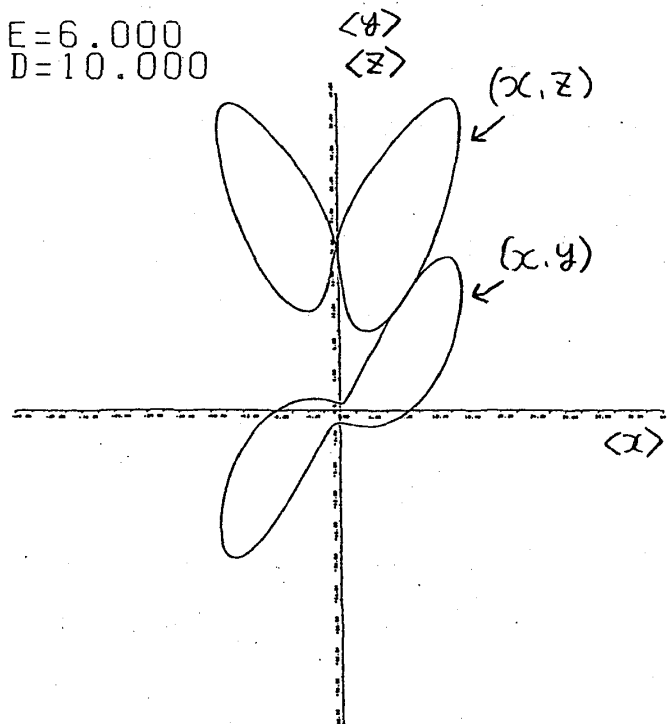


図 2 - 20  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の phase portrait

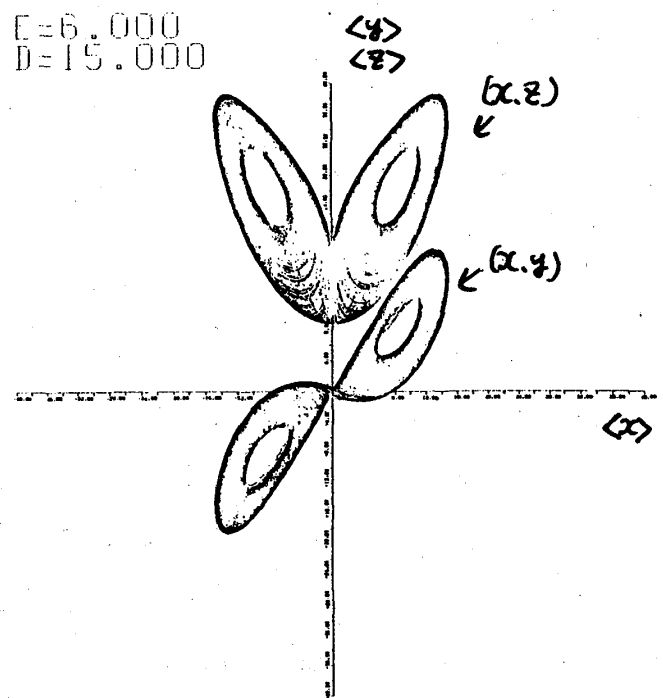


図 2 - 21  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の phase portrait

$E=6.000$   
 $D=18.000$

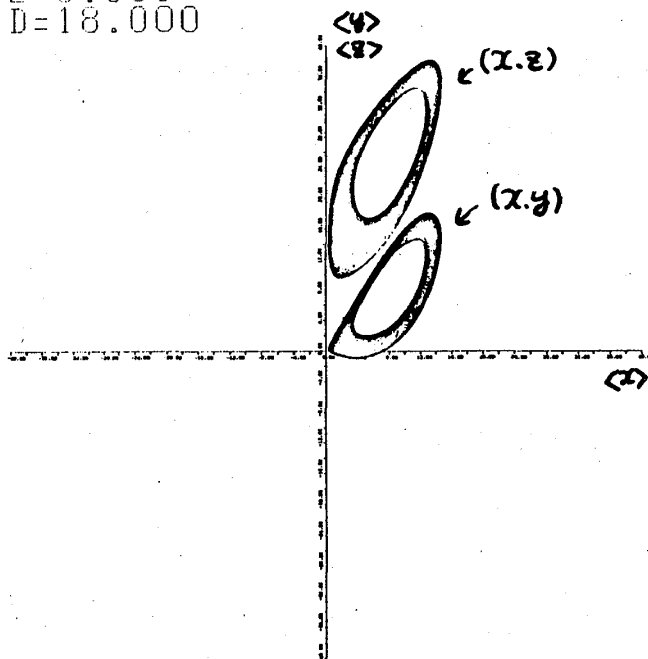


図 2-22  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
 phase portrait

$E=6.000$   
 $D=20.000$

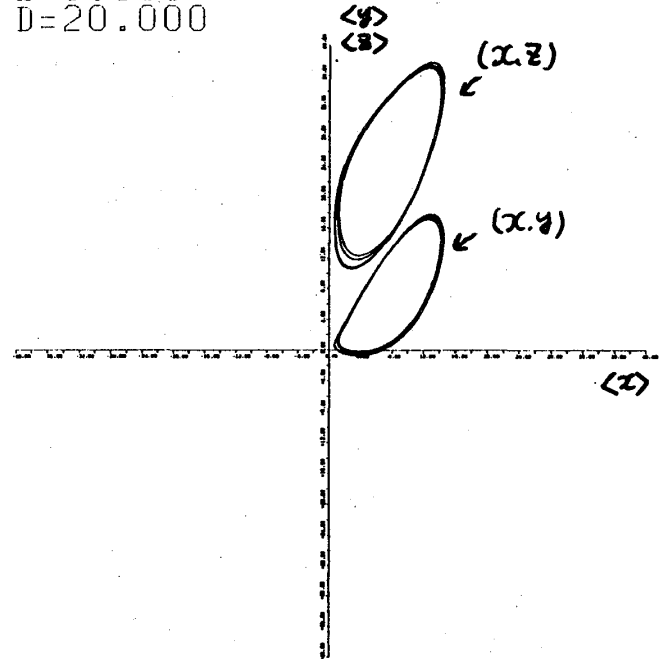


図 2-23  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の  
 phase portrait

-24, 2-25)、ノイズ  $D$  の減少と共に period doubling bifurcation 型のリミットサイクル-カオス転移が見られた。なおこの phase portrait は先のシミュレーションのもの (図 2-15, 2-16) と酷似し、ノイズの増加と共に軌道の幅が狭まるという定性的な挙動も一致している。これらのことから、実際に (2.2) のシステムの  $N \rightarrow \infty$  の熱力学的極限における、ノイズ  $D$  の増加によるカオスからリミットサイクルへの相転移の存在は、確かなものであらうと考えられる。

・  $D = 23.84$

phase portrait は固定点になる (図 2-26)。これも、もとのカオスの式 (2-1) の不安定な固定点に対応するものと思われる。なお  $D = 23.00$  と  $D = 23.83$  との間では、初期条件によってリミットサイクルあるいは固定点のいずれかの状態になった。

さらにノイズを増加すると、この固定点は  $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$  に近づく。

E=6.000  
D=21.000

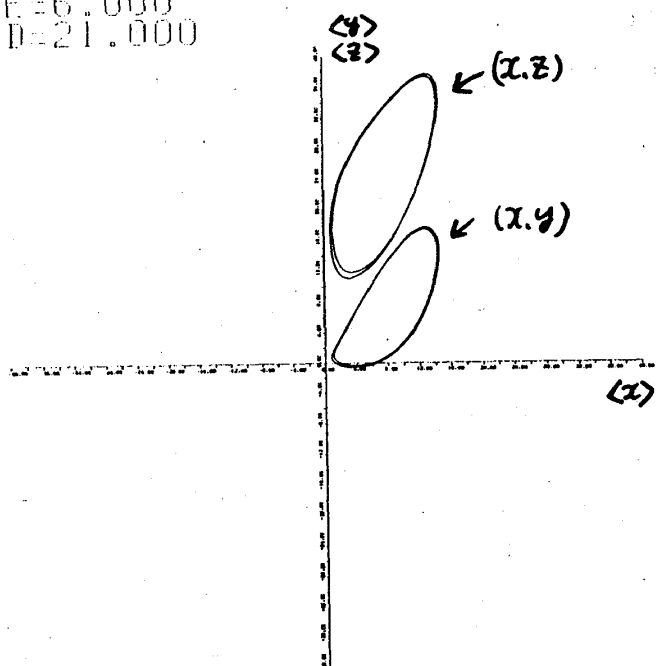


図 2 - 2 4

$\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の phase portrait

E=6.000  
D=23.000

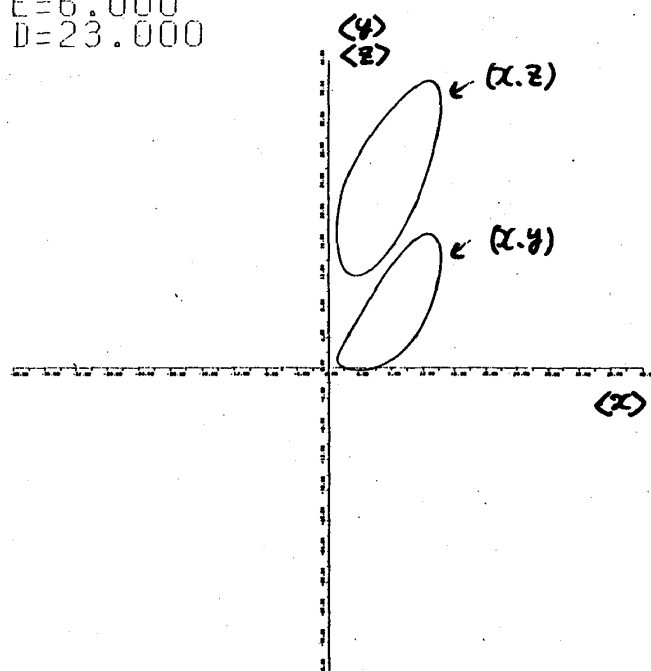


図 2 - 2 5  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の

phase portrait

E=6.000  
D=23.840

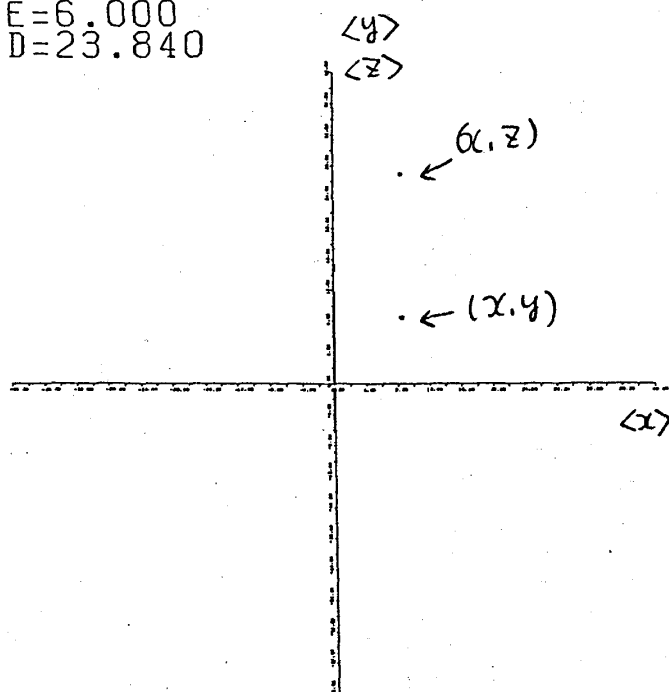


図 2 - 2 6

$\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の phase portrait

以上の結果をまとめて Bifurcation diagram にしたのが図 2-28 である。これを図 2-27 のシミュレーション結果と較べると、分岐の様子が定性的によく一致しており、両者の phase portrait がよく重なることも合わせて GDA が  $N \rightarrow \infty$  の熱力学的極限の状態をかなりよく近似していることがわかる。このことから、シミュレーションで得られたリミットサイクル的な軌道（図 2-14, 2-16）は、振動子の数  $N \rightarrow \infty$  の熱力学的極限ではリミットサイクルになるものと考えられる。

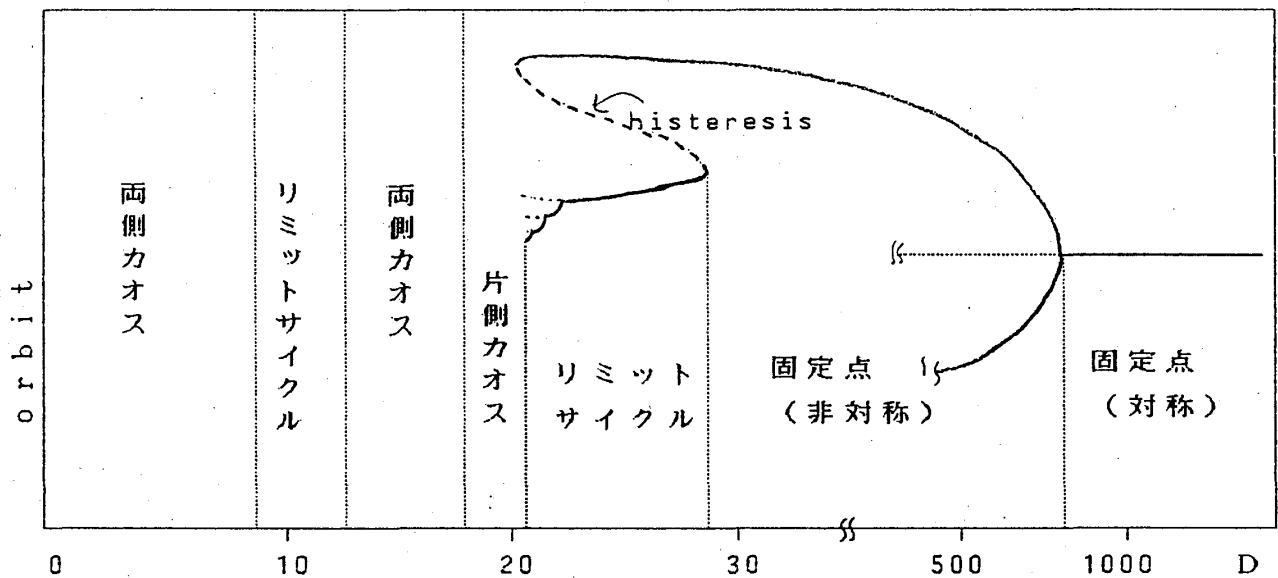


図 2-27 モンテカルロシミュレーションによる  $\varepsilon = 6$  での Bifurcation diagram

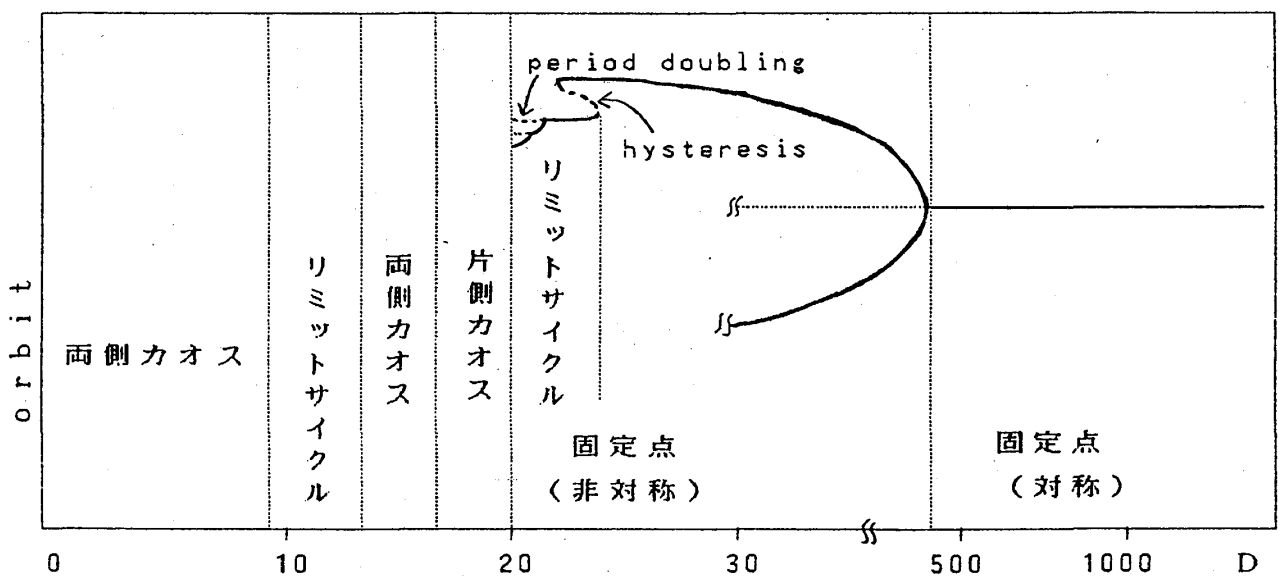


図 2-28 Gaussian decouple 近似による  $\varepsilon = 6$  での Bifurcation diagram

## 2. 3 まとめと今後の展望

Lorenz カオス型振動子を平均場相互作用で無限個結合させた系は、熱浴に相当するノイズの増加によってカオス→リミットサイクル→カオス→リミットサイクル→固定点という分岐の相転移を示すことが、モンテカルロシミュレーションと、GDA の結果より、ほぼ明らかになった。

今後の課題としては、まず第一に、上に示した分岐の詳細を Lyapunov 指数の議論を含め明らかにすることが挙げられる。先に述べたように、GDA では、リミットサイクルからカオスへの period doubling 型分岐が見つかったが、これがもとの NFPE ( 2.3 ) についても存在するのかが問題になる。モンテカルロシミュレーションでは  $N$  の有限性による軌道のぶれを抑えるため、さらに  $N$  を大きくする ( 10000 以上 ) 必要がある。そして、今回は巨視的な変数であるオーダーパラメーター  $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle$  の振舞いを調べたが、揺らぎの挙動等についても検討したい。また、この系と元の Lorenz カオスの機構との関係を調べるためには、元の Lorenz カオス方程式のパラメーターを変化させたものも扱うことが有効であろう。例えば今回は安定なカオス解のみ存在する  $R = 28$  を用いたが、それ以外の  $R = 13.926 \sim 24.06$  の preturbulence 領域や、 $R = 24.06 \sim 24.74$  の hysteresis 領域、 $R = 350$  の対称リミットサイクル領域など ( 図 2-2 ) についても検討したい。

さらにこのモデルでは振動子間の結合を平均場で取り入れたが、これを平均場以外の形に拡張すれば、時空間パターンのカオスの相転移を取り扱うことも可能である。また、このカオス振動子のシステムを微分方程式系から差分系に置き換えると、先の NFPE が今度は非線形 Perron - Frobenius 方程式になり、両者の対応を図ることも興味深い問題である。

謝 辞

本研究でのモンテカルロシミュレーションを行うにあたり、統計数理研究所の田村義保、桂康一両博士に御助力をいただきましたことを感謝いたします。

参考文献

1. Y. Kuramoto,  
Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence (Springer, Berlin, 1984).
2. H. Risken, The Fokker-Planck Equation (Springer, Berlin, 1984).
3. M. Shiino, Phys. Lett. 112A, 302 (1985).
4. M. Shiino, Phys. Rev. 36A, 2393 (1987).
5. D. A. Dawson, J. Stat. Phys. 31, 29 (1983).
6. M. Shiino, Phys. Lett. 111A, 396 (1985).
7. M. Shiino and M. Frankowicz, Phys. Lett, in press.
8. M. Shiino, H. Nishimori, and M. Ono, J. Phys. Soc. Jpn, in press.
9. J. P. Crutchfield and B. A. Huberman, Phys. Lett. 77A, 407 (1980).
10. J. P. Crutchfield, D. Farmer, and B. A. Huberman, Phys. Rep. 92, 45 (1982).
11. 津田一郎、松本健司, 日本物理学会誌 第40巻 203 (1985).
12. M. C. Valsakumar, K. p. murthy and G. Ananthakrishna,  
J. Stat. Phys. 30, 617 (1983).