

改定 $k-\varepsilon$ モデル (一つの乱流モデル)

東大生研 竹光信正 (Nobumasa Takemitsu)

1. 緒言

我々の身近で生じる流動現象は、生体内の微小循環系を除くとそのほとんどが乱流である。したがって、この流れの様子を正確に予測することは工学の各分野で必要とされているが、これを正確に予測することはきわめて難しい。その理由として流れのもつスケールの多様性をあげることができる。また、このことのために物理的には何らかの統計的方法を必要とし、数値解析的には小さなスケールを何らかの方法でモデル化する必要がある。

現在のところ、乱流場を数値解析する上で信頼性が高く、また適用性の広いモデルとして LES, $k-\varepsilon$ モデルをあげることができる。このうち、工学上よく使われるのは Jones と Launder によって考案された標準 $k-\varepsilon$ モデル⁽¹⁾である。しかし、このモデルはこれを 2 次元平行平板間の乱流場に適用したとき、解が壁関数からのずれとして y のべきで展開で

きるならば数学的に適性なモデルではない。⁽²⁾以下、本論文において標準 $k-\varepsilon$ モデルが数学的に適性でない理由を述べ、かつモデル構成を根本的に見直し、物理的根拠もあり数学的にも適性な改定 $k-\varepsilon$ モデル⁽³⁾について述べる。

2. 標準 $k-\varepsilon$ モデル⁽¹⁾

非圧縮粘性流体を仮定すると、標準 $k-\varepsilon$ モデルは平均流の速度ベクトル U_i ($i=1,2,3$), 乱流エネルギー k , エネルギー散逸率 ε を使って

$$\frac{DU_i}{Dt} \equiv \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$D = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j}) \quad (3)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{\varepsilon 3} \nu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}) \quad (4)$$

と書き下せる。ここで、 t は時間、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 R_{ij} は Reynolds stress、 ν_e は渦粘性率、 P は乱流エネルギーの発生項を表す。また、 D/Dt は Lagrange 微分を、 D は膨張速度を表し、繰り返し下つき添字については 1 から

3までの和をとるものとする。 R_{ij} , P , ν_e は通常

$$R_{ij} \equiv -\langle u_i u_j \rangle = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \nu_e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

$$P = \nu_e \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (7)$$

のようにモデル化される。ただし、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均， δ_{ij} はKroneckerのデルタ記号， u_i は擾乱速度ベクトルを表すものとする。この u_i を使うと， k と ε はそれぞれ

$$k = \frac{\langle u_i u_i \rangle}{2}, \quad \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \quad (8, 9)$$

で定義される。ここで， ν は流体の動粘性係数である。

なお，式(3)，(4)，(7)にあられる C_{k1} , $C_{\varepsilon 1} \sim C_{\varepsilon 3}$, C_ν はモデル定数で，標準 $k-\varepsilon$ モデルでは次のように定められている。⁽⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} C_\nu &= 0.09, & C_{k1} &= 1.0 \\ C_{\varepsilon 1} &= 1.45, & C_{\varepsilon 2} &= 1.9, & C_{\varepsilon 3} &= 1/1.3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3. Yoshizawa による $k-\varepsilon$ モデル^{(5), (6)}

Yoshizawaの統計理論^{(5), (6)}の研究結果によると，時空間に関する展開パラメータの1次の項までの近似で $k-\varepsilon$ モデル

は

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + E_D, \quad (11)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon P} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon D} \frac{\varepsilon^2}{k} + \gamma_{\varepsilon k} \frac{\varepsilon}{k} E_D \quad (12)$$

$$E_D = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{kk} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{k\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (13)$$

と書ける。式(12), (13)における $C_{\varepsilon P}$ 等はモデル定数で

$$C_{\varepsilon P} = C_{\varepsilon D} \doteq 1.7, \quad \gamma_{\varepsilon k} \doteq 1.7, \quad C_{kk} \doteq 1.27, \quad C_{k\varepsilon} \doteq -0.72 \quad (14)$$

と評価されている。

この結果から、 k , ε 方程式とも右辺は標準 $k-\varepsilon$ モデルのように発生項、消滅項、拡散項から成り立っている。この意味において、標準 $k-\varepsilon$ モデルは物理的観点からみてよくできているモデルであるということができる。ただし、標準 $k-\varepsilon$ モデルと Yoshizawa の $k-\varepsilon$ モデルを比較して大きく異なる点は、 k 方程式における ε の拡散項 (式(13)の第2項) の存在である。この項は、擾乱速度の三重相関項と、擾乱圧力と擾乱速度の相関項からでてくる項であるが、標準 $k-\varepsilon$ モデルではこの項は考慮されていない。この項の存在は、統計理論の結果から既に指摘されていた^{(5),(7)}が、これまではこの項の重要性を支持する有力な根拠がなかった。後に示すよ

うに、漸近解を構成するうえでこの項は必要不可欠である。

なお、統計理論の結果から導かれたモデル定数間の関係は、 $C_{\varepsilon p} = C_{\varepsilon D} = \gamma_{\varepsilon k}$ であるから $D/Dt = 0$ となるような流れ、たとえば2次元平行平板間の流れでは k 方程式と ε 方程式は独立でない。したがって、統計理論の結果からだけでは数学的に適正で適用性の広いモデル方程式は構成できない。

4. 改定 $k - \varepsilon$ モデル⁽³⁾

以上の観点から、改定 $k - \varepsilon$ モデルをモデル構成の根本に立ち返って構成するにあたり、次のような基本的立場に立つ。

まず、Reynolds stress の表現はさしあたり標準 $k - \varepsilon$ モデルと同じ等方表現⁽⁵⁾をとることにする。非等方表現⁽⁸⁾については、以下の議論に本質的な影響を与えない。また、 $k - \varepsilon$ モデルは統計的基本量として u_i , k , ε を選んだモデルであるから、 k 方程式における擾乱速度の三重相関項と、擾乱速度と擾乱圧力の相関項を1階の微分までで近似することにする（これは結局、(11)と同じである）。次に、 ε の輸送方程式は本来

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -2\nu \left\{ \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\rangle \right\} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}
& -2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\rangle - 2\nu \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \\
& - 2\nu^2 \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \\
& - \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial p'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j} \quad (15)
\end{aligned}$$

と書けるが， ε 方程式(12)は k 方程式(11)と異なりモデル化の際の対応関係が明確でない．そこで， k 方程式のようにどの項をどのようにモデル化するという立場を捨て，Yoshizawaの結果(12)を利用して方程式の自由度を増やし，さきほど述べたようなモデル ε 方程式の欠点を除く．

こうして，改定 $k-\varepsilon$ モデルは

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \quad (16)$$

$$D = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{k2} \nu_e \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}) \quad (18)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{\varepsilon 3} \nu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\varepsilon 4} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon 5} \frac{\nu_e}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)^2 + C_{\varepsilon 6} \frac{\nu_e}{k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \\
& - C_{\varepsilon 7} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right)^2 + C_{\varepsilon 8} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (20)$$

と書ける。ただし、 C_ν , C_{k1} , C_{k2} , $C_{\varepsilon 1} \sim C_{\varepsilon 8}$ はモデル定数で ε 方程式(19)の $C_{\varepsilon 8}$ の項は最近の研究^{(9),(10)}により付け加えたものである。

なお、次のことを注意しておく。一つはモデル方程式(18), (19)の右辺は、 U_i , k , ε の2階微分の近似で方程式を構成するとしたときの最も一般的な方程式形になっているということである。もう一つは、この ε 方程式の形は他の2方程式モデル($k-k\varepsilon$, $k-\omega$ 方程式等)の ε 方程式⁽¹¹⁾と可換であるという条件を満足しているということである。

5. 2次元平行平板間の漸近解

座標系を図1のようにとるものとする。このとき、式(16)~(20)は流れ場の代表速度 V , 代表長さ L を使って無次元化

$$\left. \begin{aligned}
x_i &\rightarrow L x_i, & U_i &\rightarrow V U_i, & p &\rightarrow \rho V^2 p, & \nu_e &\rightarrow \nu \nu_e \\
k &\rightarrow V^2 k, & \varepsilon &\rightarrow (V^3/L) \varepsilon, & R_{ij} &\rightarrow V^2 R_{ij}
\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

と u_τ を摩擦応力として変換

$$\left. \begin{aligned} U &= (u_\tau / \kappa) U^* \\ k &= (u_\tau^2 / \sqrt{C_D}) k^* \\ \varepsilon &= (u_\tau^3 / \kappa) \varepsilon^* \\ \nu_e &= \text{Re } \kappa u_\tau \nu_e^* \\ R_{12} &= u_\tau^2 R_{12}^* \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

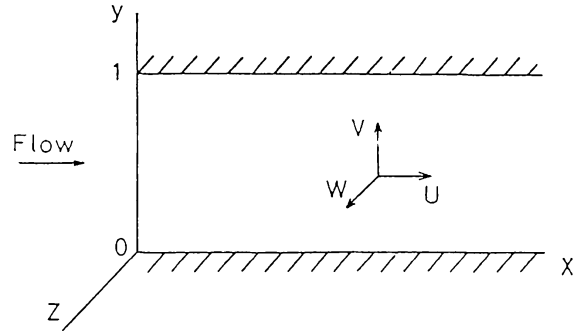


図1 座標系の定義

を施すと ($\text{Re} = VL/\nu$: Reynolds 数),

$$\nu_e^* \frac{\partial U^*}{\partial y} = 1 + \pi y, \quad \pi = \frac{\partial P / \partial x}{u_\tau^2} \quad (23)$$

$$\alpha C_{k1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e^* \frac{\partial k^*}{\partial y} \right) + \nu_e^* \left(\frac{\partial U^*}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon^* - \alpha C_{k2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e^* \frac{k^*}{\varepsilon^*} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} \right) = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \alpha C_{\varepsilon 3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \nu_e^* \frac{\varepsilon^*}{k^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} \\ & - \alpha C_{\varepsilon 4} \frac{\varepsilon^*}{k^*} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_e^* \frac{\partial k^*}{\partial y} \right) - \alpha C_{\varepsilon 5} \frac{\nu_e^*}{\varepsilon^*} \left(\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} \right)^2 + \alpha C_{\varepsilon 6} \frac{\nu_e^*}{k^*} \frac{\partial k^*}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y} \\ & - C_{\varepsilon 7} \left(\frac{\partial k^*}{\partial y} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\nu_e^* = \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*}, \quad R_{12}^* = \nu_e^* \frac{\partial U^*}{\partial y} \quad (26, 27)$$

となる。ただし, $\alpha = \kappa^2 / \sqrt{C_D}$ で κ は Kármán 定数である。

ここで、第1式のみ壁まで考慮した無次元の式

$$\frac{\partial}{\partial y} (1 + v_e) \frac{\partial U}{\partial y} = Re \frac{\partial p}{\partial x} \quad (28)$$

を考える。これは壁近傍の速度分布を出したためである。
 u_e が0でない流れ場（はく離が生じない流れ）では、これを
 無次元化すると

$$u_e = \sqrt{(\partial U / \partial y)_{y=0} / Re}, \quad (\partial U / \partial y)_{y=0} = Re u_e^2 \quad (29)$$

であるから、式(28)で $y \rightarrow 0$ のとき $v_e \rightarrow 0$ 、および $y = 1/2$ で
 $\partial U / \partial y = 0$ であることを利用すると(28)は

$$U / u_e = y^+ (1 - y) + O(y^3) \quad (30)$$

$$y^+ = Re u_e y \quad (31)$$

となる。ただし、壁近傍で $u \propto y$ 、 $v \propto y^2$ 、したがって $v_e \sim$
 $O(y^3)$ 、および展開式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| \ll 1 \quad (32)$$

を使、た。

速度分布(30)は、(28)が解析的に解ければ壁近傍以外のところ
 でも速度分布が U と u_e と y で決まることを示している。以下
 に示す解は、 U と y のうち U をさきに $U \rightarrow 0$ としたときの解
 にな、ており、この意味で漸近解にな、ている。

次に、図2はよく知られた対数速度分布⁽¹²⁾である。この速

度分布は、本来 $\partial P / \partial x = 0$ で y が小さいという仮定のもとで導かれたものであるが、2次元平行平板間の流れのように壁に囲まれた強い shear のある流れ場でも対数速度分布が成り立つことは実験的によく知られている。

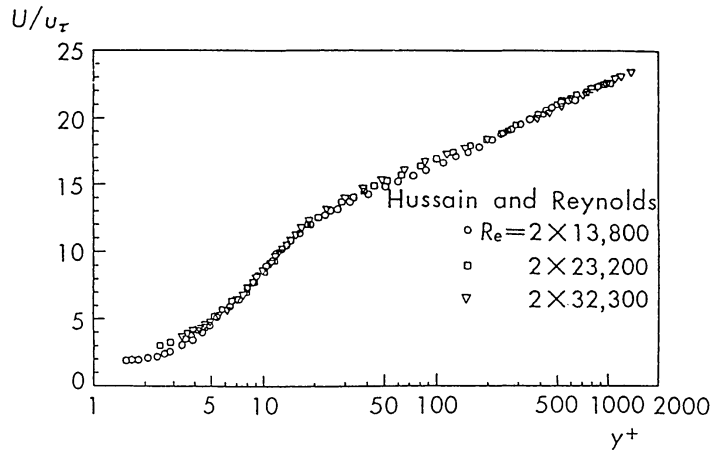


図2 対数速度分布⁽¹²⁾

そこで、方程式系(23)~(27)が近似的に正しいモデルであるとしたら、 y の小さいところ(緩衝層の端)では速度分布は y で展開できるはずである。そして、この近似は Re 数の高いほど正しい。

いまの場合、式(23)で $1 \gg |\pi y|$ のとき(23)~(27)の漸近解の初項は壁関数

$$U^* = \ln y^+ + A^+, \quad v_e^* = y, \quad k^* = 1, \quad \varepsilon^* = 1/y \quad (33)$$

$$A^+ : \text{const.}$$

になり、 $1 \ll |\pi y|$ (はく離点近傍) のとき有次元で

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{2}{K} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} y \right)^{1/2} + B \left(\nu, \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad v_e = K \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^{1/2} y^{3/2} \\ k &= K_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) y, \quad \varepsilon = C_\nu \frac{K_0^2}{K} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right)^{3/2} y^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

になる⁽³⁾以下, $1 \gg |\pi y|$ として (23)~(26) の解を展開すると,

$$U^* = \ln y^+ + A^+ - (a_1 + 2)y + \{ -a_2 + a_1(a_1 + 2) \} y^2 / 2 + O(y^3) \quad (35)$$

$$v_e^* = y(1 + a_1 y + a_1 y^2 + O(y^3)) \quad (36)$$

$$k^* = 1 + b_1 y + b_2 y^2 + O(y^3) \quad (37)$$

$$\varepsilon^* = (1 + c_1 y + c_2 y^2 + O(y^3)) / y \quad (38)$$

$$R_{12}^* = 1 - 2y \quad (39)$$

が得られる⁽³⁾ ここで, a_1, b_1, c_1 等は,

$$a_1 = 2b_1 - c_1, \quad b_1 = \frac{4(\alpha C_{k2} C_{\varepsilon 1} + C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2} + \alpha C_{\varepsilon 5})}{\alpha C_{k1} \zeta_1 + \alpha C_{k2} (-2C_{\varepsilon 2} - \alpha C_{\varepsilon 4} + \alpha C_{\varepsilon 5} - \alpha C_{\varepsilon 6}) - 2\zeta_1}$$

$$c_1 = -\frac{4 - (-2 + \alpha C_{k1} + 3\alpha C_{k2})b_1}{2\alpha C_{k2}}, \quad \zeta_1 = C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2} + \alpha C_{\varepsilon 5} \quad (40a \sim d)$$

$$a_2 = f_1 + 2b_2 - c_2 \quad (41a)$$

$$b_2 = \frac{3\alpha C_{k2} \{f_3 + (C_{\varepsilon 1} + \alpha C_{\varepsilon 3} + \alpha C_{\varepsilon 5})f_1\} + \zeta_2 \{f_2 - (-1 + 2\alpha C_{k2})f_1\}}{4\alpha C_{k1} \zeta_2 + 3\alpha C_{k2} (-C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2} - 4\alpha C_{\varepsilon 4} + 2\alpha C_{\varepsilon 5} - 2\alpha C_{\varepsilon 6}) - 2\zeta_2} \quad (41b)$$

$$c_2 = -\frac{f_2 - (-1 + 2\alpha C_{k2})f_1 - 2(-1 + 2\alpha C_{k1} + 3\alpha C_{k2})b_2}{6\alpha C_{k2}} \quad (41c)$$

$$\zeta_2 = C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2} + 3\alpha C_{\varepsilon 3} + 3\alpha C_{\varepsilon 5} \quad (41d)$$

$$f_1 = (b_1 - c_1)^2, \quad f_2 = -(a_1 + 2)^2 - 2\alpha \{C_{k1} a_1 b_1 + C_{k2} (a_1 - c_1)(b_1 - c_1)\}$$

$$f_3 = -C_{\varepsilon 1} \{(b_1 - c_1)(a_1 + b_1 + 4) + (a_1 + 2)^2\} + C_{\varepsilon 2} (b_1 - c_1)^2$$

$$+ \alpha C_{\varepsilon 4} b_1 (2a_1 - b_1 + c_1) + \alpha C_{\varepsilon 5} c_1 (c_1 - a_1) + \alpha C_{\varepsilon 6} b_1 (a_1 - b_1)$$

$$+ \alpha C_{\varepsilon 7} b_1^2 / C_D \quad (42a \sim c)$$

で与えられる。

標準 $k-\varepsilon$ モデルでは, $C_{k2} = C_{\varepsilon4} \sim C_{\varepsilon8} = 0$ であるから, 式(41c) は発散項をもつ。すなわち, 標準 $k-\varepsilon$ モデルは数学的に適性なモデルではない。3次の解も同様に発散項をもつ。なお, (40c) も発散項をもつように見えるが, これはみかけ上のことで実際に計算してみると

$$C_1 = 2(\alpha C_{k1} - \gamma + 1) / (\gamma - 1)(2 - \alpha C_{k1}), \quad \gamma = C_{\varepsilon3} / C_{\varepsilon2} \quad (43)$$

となり, 分母が0にならない限り発散項をもたない。

6. 結言

標準 $k-\varepsilon$ モデルを2次元平行平板間の乱流場に適用したとき, これが数学的に適性でない理由を示しかつモデル構成の根本に立ち返って, Yoshizawaの統計理論の結果を利用して物理的根拠もあり数学的にも適性な改定 $k-\varepsilon$ モデルを提案した。

謝 辞

本研究をすすめるにあたり, 東京大学生産技術研究所NST (乱流数値シミュレーション) 研究グループの御支持と御討論を戴きました。とくに, 同研究所吉澤徹教授には貴重な御討論を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。

7. 参考文献

- (1) Jones, W. P. and Launder, B. E., Int. J. Heat and Mass Transf., 15 (1972), 301.
- (2) 竹光信正, 日本機械学会論文集 (B編), 53巻494号 (昭62-10), 2921., Takemitsu, N., J. Fluids Eng., submitted.
- (3) 竹光信正, 日本機械学会論文集 (B編), 53巻496号 (昭62-12), 3629., Takemitsu, N., J. Fluids Eng., submitted.
- (4) Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J. H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, (1981), Academic Press Inc..
- (5) Yoshizawa, A., J. Phys. Soc. Jpn., 51-7 (1982), 2326.
- (6) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 30-7 (1987), 628.
- (7) Leslie, D. C., Developments in the Theory of Turbulence, (1973), Clarendon Press, Oxford, 341.
- (8) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 27 (1984), 1377.
- (9) Hamba, F., J. Phys. Soc. Jpn., 56-11 (1987), 3771.
- (10) Yoshizawa, A., Rep. CTR-S87, (1987), 109.
- (11) Launder, B. E. and Spalding, D. B., Mathematical Models of Turbulence, (1972), Academic Press Inc., 97.
- (12) Hussain, A. K. M. F. and Reynolds, W. C., J. Fluids Eng., 97 (1975), 568.

- (13) 竹光信正, 日本機械学会論文集 (B 編), 投稿中.