

変分不等式について

東大 理 小西芳雄

変分不等式は次の3つの型に分類される:

楕円型変分不等式 定常変分不等式

放物型変分不等式 } 発展変分不等式

双曲型変分不等式 }

Ω を $\mathbb{R}^N$ の中の有界領域で、十分滑らかな境界 Γ をもつものとする。 $\psi \in H^1(\Omega)$ で

$$\psi|_{\Gamma} (\in H^{1/2}(\Gamma)) \geq 0, \quad \Delta\psi \in L^2(\Omega)$$

なるものを固定する。

[例] 1 ('片側'変分問題) $f \in L^2(\Omega)$ を与えられた関数とする。 $u \in L^2(\Omega)$ を '変関数', $u \in H_0^1(\Omega)$ で '片側制約条件' $u \leq \psi$ を満たすものを '許容関数' とする。 '汎関数'

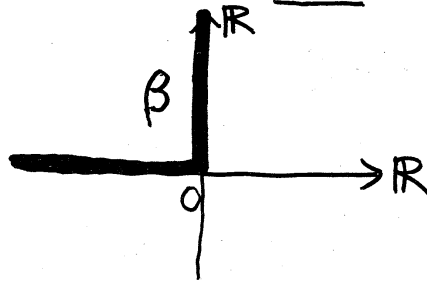
$$J[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$$

を最小にする‘変分問題’の‘停留関数’が一意に存在し、それは $H^2(\Omega)$ に属する(解の存在, 一意性, 正則性)。

この汎関数 $J[u]$ の‘Euler の方程式 (不等式!)’は、積田型変分不等式

$$-\Delta u - f \leq 0, \quad u - \psi \leq 0, \quad (-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

である。 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への多価写像 β :



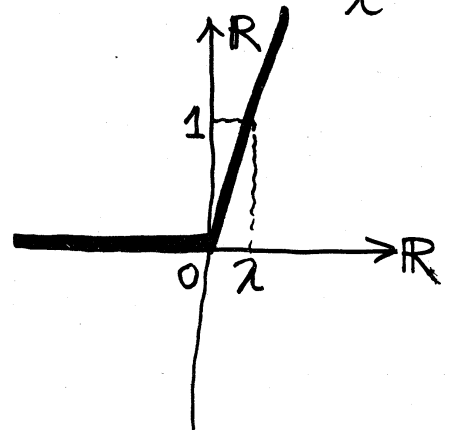
を使うと, ‘Euler の (多価!) 方程式’は

$$f \in -\Delta u + \beta(u - \psi) \quad \text{a.e. } x \in \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

とも書ける。 u は β をその‘吉田近似’ $\beta_\lambda(u) = \frac{u^+}{\lambda}$ で置換えた

$$f = -\Delta u_\lambda + \frac{(u_\lambda - \psi)^+}{\lambda} \\ u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

の解 u_λ の $L^2(\Omega)$ での強極限 ($\lambda \downarrow 0$) としても (処罰法), また Δ をその吉田近似 Δ_λ で置換えた



$$f \in -\Delta_\lambda u_\lambda + \beta(u_\lambda) \quad \text{a.e.}$$

の解 u_λ の極限としても構成できる。

例2 (放物型) 任意の $a \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $a \leq \psi$, に対して, $\Omega \times (0, +\infty)$ 内で殆ど至る処

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0, \quad u - \psi \leq 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right)(u - \psi) = 0,$$

そして Ω 内で殆ど至る処

$$u(0) = a$$

を満たす解 $u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ で, $\partial u / \partial t \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$, 各 $t \geq 0$ で $u(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u(t) \leq \psi$ なるものが一意に存在する。さらに, a と同じ条件を満たす $\hat{a}$ に対応する解を $\hat{u}$ とすると, 各 $t \geq 0$ で L^2 ノルムに関して

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \|a - \hat{a}\|,$$

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))^+\| \leq \|(a - \hat{a})^+\|,$$

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))^- \| \leq \|(a - \hat{a})^-\|$$

が成り立つ。従って, 特に $a \leq \hat{a}$ ならば各 $t \geq 0$ で $u(t) \leq \hat{u}(t)$ である。

[証明の方針]

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_\Omega |\text{grad } u(x)|^2 dx & (u \in H_0^1(\Omega), u \leq \psi) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

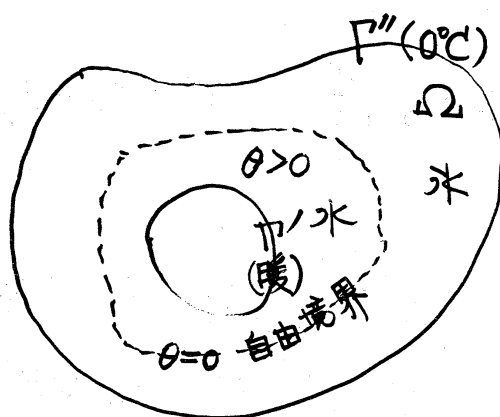
とし, $u(t) = e^{-t\varphi} a$ とおけ。



非斉次項がつき $\psi = \psi(t)$ が時刻と共に変わる場合には

$$\begin{cases} f(t) \in \frac{d}{dt} u(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \\ u(0) = a \end{cases}$$

に関する抽象論が使えて, Stefan問題 が解ける: 温度 θ を



$$\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$$

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \theta & \text{氷の温度} \\ 0 & \text{氷} \end{cases}$$

と拡張.

$$u(x, t) = \int_0^t \tilde{\sigma}(x, s) ds$$

が放物型変分不等式により記述される.

例3 (双曲型) $a \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $b \in H_0^1(\Omega)$, $b \leq \psi$.
 $\exists_1 u \in C([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap L_{loc}^\infty([0, +\infty); H^2(\Omega))$
 $\partial u / \partial t \in L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$, $\partial^2 u / \partial t^2 \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \psi \leq 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \psi\right) = 0$$

$$u|_{\Gamma \times (0, \infty)} = 0,$$

$$u|_{t=0} = a,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = b.$$

[証明の方針] 先程の β を使って

$$0 \in \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \psi \right) \quad \text{於 } L^2(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \in \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & \beta(\cdot - \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} \quad \text{於 } \begin{matrix} H_0^1(\Omega) \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{matrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = e^{-t \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & \beta(\cdot - \psi) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \square$$

参 考

H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. pures et appl.,
51 (1972), 1-168.

高村-小西, 非線型発展方程式, 岩波講座, 基礎数学.

J.-L. Lions, Sur quelques questions d'analyse, de mécanique
et de contrôle optimal, Les Presses de l'Université
de Montréal, 1976.

J. Watanabe, Evolution equations associated with
subdifferentials: recent developments in Japan,
Colloque franco-japonais sur analyse fonctionnelle et
analyse numérique, Kyoto, 1976.