

仕事効率を最大にする休憩のタイミングと長さ

Mathematical Analysis for the Maximum Working Efficiency Which is Effected by the Timing and the Length of (a) Break(s)

*稲葉優太・**谷口歩・***中益朗子

*京都大学生態学研究センター、**島根大学総合理工学研究科、***九州大学医学研究院

*Yuta Inaba, **Ayumu Taniguchi and ***Akiko Nakamasu

** Center for Ecological Research,*

Kyoto University, 509-3, 2-chome, Hirano, Otsu, Shiga, 520-2113, Japan

***Shimane University, 89-1 Ennya, Izumo, Shimane, 693-8501, JAPAN*

****Anatomy and Cell Biology, Graduate School of Medical Sciences,*

Kyushu University, 3-1-1 Maidashi, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8582, JAPAN

nakamasu@anat1.med.kyushu-u.ac.jp

For effective production, it is important to refresh during the continuing works. If you work for too long without a break, accumulated fatigue cut down your working efficiency. However, extreme lengths of rest reducing the working time cause small amount of tasks accomplished, then frequent breaks will break your concentration. Therefore to consider the appropriate timings and lengths of the pausing works have advantages to increase the working efficiency. In this paper, the model estimating the “Gain” or “Loss” of the amount of works accompanied by the breaks was constructed. Then timing and length of the break which give the maximum of the working efficiency was obtained.

1 はじめに

物事を効率的に生産するためには、継続する労働に休憩をはさむことがしばしば有効である。このような仕事の効率と休憩時間に関する問題に関しては、シミュレーションを用いた研究などがなされてきた[1]。もし休みなく働き続けると、疲労の蓄積から仕事効率が落ちることは明らかだ。休憩には、この疲労の蓄積を取り除き仕事効率を上げる効果がある。しかし、長すぎる休憩は労働時間の減少をまねき、結果として達成される仕事量は少なくなる。また、頻繁に休憩をとることで集中力の低下を招き、かえって仕事の効率が落ちることもある。したがって、休憩をとる際の適切なタイミングと長さについて考えることは、仕事効率を上げることにつながると思われる。本論文では、休憩に伴う仕事量の「増加 (Gain)」と「減少 (Loss)」を見積もるモデルを作成した。そこから、「Gain」と「Loss」の差を最大にする、すなわち仕事効率の最大化を達成するような休憩のタイミングと長さを求めた。ここでの仕事効率は、「ある期間における仕事の総出力」とであると定義する。特に今回は、体力が線形に変化し、一回の休憩をはさむ場合についての解析結果を記述する。

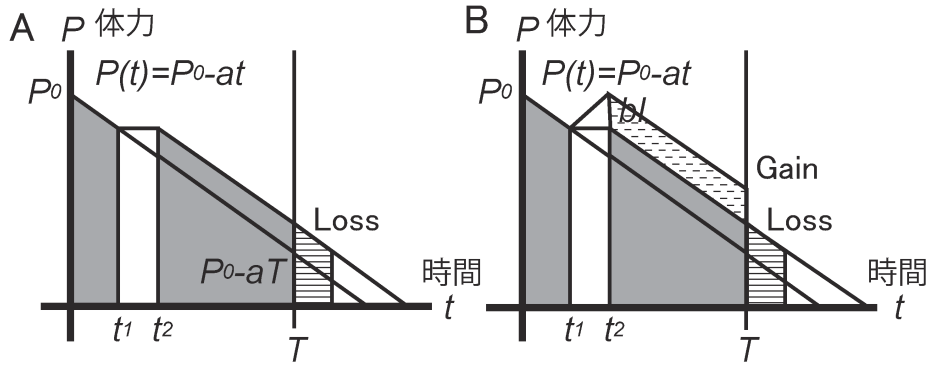


図1: 休憩に伴う仕事量のGainとLoss。 $l = t_2 - t_1$ の休憩による体力の回復を伴わない場合(A)は、仕事量のLossのみをもたらす。 $l = t_2 - t_1$ の休憩によって、体力が bl 回復する場合(B)は、休憩に伴うLossとともに、休憩に伴う仕事量のGainも得られる。

2 仕事量の導出

この章では休憩に伴って変化する仕事量を見積もる。

まず、体力 $P(t)$ は仕事時間 t に対する線形の減少関数であるとする。労働開始時の体力を P_0 とおくと、労働開始からの体力の減少は、

$$P_1(t) = P_0 - at \quad (\text{for 1st WORK}) \quad (1)$$

と書ける。ここで、 a は体力の減少する速度である。このとき、体力には上限と下限があるとし、その境界を設ける ($0 \leq P(t) \leq P_0$)。 $P(t) = 0$ のとき、仕事を継続できなくなると仮定する。休憩が無しの場合に体力が0となるまでの時間を考え、全体の与えられる時間 T は $0 \leq T \leq P_0/a$ の範囲であるとする。

本研究では、仕事効率を与えられた時間 T 中での仕事の総出力と定義する。仕事効率はその時の体力の大きさに依存して決まるとすると、与えられた期間 T での総仕事量 W は、

$$W = c \cdot \int P(t) dt \quad (2)$$

と書ける。 c は体力に対してどれだけ仕事の出力があるかを表すパラメーターである。

ここで、任意の時間 T の間に一回の休憩をとることを考える。休憩に伴う体力の回復速度を決める係数を b とすると、

$$P_2(t) = P_{t_1} + bt = P_0 - at_1 + bt \quad (\text{for 1st BREAK}) \quad (3)$$

ここで、 t_1 は休憩の開始のタイミングである。休憩の終了のタイミングを t_2 とおくと、休憩の時間 l は

$$l = t_2 - t_1 \quad (4)$$

と書ける。

一方、時間 l の休憩に伴い回復する体力量は

$$P(t_2) - P(t_1) = bl \quad (\text{ただし } t_1 \geq bl/a) \quad (5)$$

となる。ここで、 $t_1 < bl/a$ となるタイミングでの休憩は仕事開始からの体力の消費量よりも休

憩による回復量が多くなる。つまり、体力に上限 (P_0) があるため Gain は頭打ちとなり休憩の効果が下がる。従って、

$$P(t_2) - P(t_1) = P_0 - (P_0 - at_1) = at_1 \quad (t_1 < bl/a) \quad (6)$$

また、休憩後の仕事時間は $T - t_2 = T - t_1 - l$ である。

最後に、休憩後の体力変化 $P_3(t)$ について定義する。 $P_3(t)$ は休憩を終える時間 t_2 における体力を初期値とした減少関数とし、

$$P_3(t) = P_0 - at_1 + bl - at \quad (\text{for 2nd WORK}) \quad (7)$$

と書く。ここで、体力の減少速度が休憩の前後で同じであることに注意する。

3 休憩に伴う仕事量の Gain と Loss

「休憩に伴う時間消費で減少する仕事量」を「Loss」と「休憩によって疲労が取り除かれることで増加する仕事量」を「Gain」とすると、図1より Loss は

$$c \cdot (al/2 + P_0 - aT)l \quad (8)$$

と書ける。一方 Gain は

$$\begin{cases} c \cdot at_1(T - t_1 - l) & (t_1 < bl/a) \\ c \cdot bl(T - t_1 - l) & (t_1 \geq bl/a) \end{cases} \quad (9)$$

で表される。

式 (8)、(9) から、体力が十分の時 (P_0 が大きい or T が小さい) 休憩による Loss は大きくなるのがわかる。つまり休まない方がいい場合もあるということが予想される。逆に体力が不足しているような場合には、休憩による Loss は少なく、休憩に伴う体力の回復が効率を上げると考えられる。そこで、Loss を最小にする T として、

$$T = P_0/a \quad (10)$$

の場合を考える。この時、式 (8) の Loss は

$$c \cdot al^2/2 \quad (11)$$

となる。一方、Gain の式 (9) は

$$\begin{cases} c \cdot at_1(P_0/a - t_1 - l) & (t_1 < bl/a) \\ c \cdot bl(P_0/a - t_1 - l) & (t_1 \geq bl/a) \end{cases} \quad (12)$$

となる。

4 仕事効率を最大にする休憩のタイミングと長さの導出 ($t_1 < bl/a$ の場合)

先にも述べたように、 $t_1 < bl/a$ となるタイミングでの休憩は早ければ早いほど頭打ちになって休憩の効率を下げる。しかし、休憩後の仕事時間は Gain にプラスに働くため、頭打ちになる分を補うことも考えられる。従って、この範囲で仕事効率の最大化について考える。

式 (11) と (12) から、Gain と Loss の差は

$$\left[t_1 P_0 - \frac{a}{2} \{ (t_1 + l)^2 + t_1^2 \} \right] \cdot c \quad (13)$$

$a > 0$ なので、 t_1 がどのような値をとっても (13) を最大にする l の値は 0 である。つまり、この範囲では休憩しないのが一番仕事効率を上げることになる。

5 仕事効率を最大にするタイミングと長さの導出 ($t_1 \geq bl/a$ の場合)

図 1 と式 (11) から、Loss に関しては休憩の開始のタイミング t_1 に非依存的事であることが分かる。つまり任意の l が定まると、どこで休んでも Loss する量は変わらない。一方で、式 (12) から Gain は休憩の始まるタイミングに依存する。同じ休憩時間 (l_{const}) しか与えられないのならば、休憩のタイミングが早ければ早いほど仕事効率が良くなるということになる。つまり、この範囲で仕事効率を最大にする t_1 の値は

$$t_1 = bl_{const}/a \quad (14)$$

である。

次に Gain と Loss の差を求め、この差が最大となる点を求めることで、休憩により仕事効率が最大となる l を求める。(12) と (11) の差をとり、(13) を代入すると、

$$-\frac{\{(a+b)^2 + b^2\}l^2 + 2bP_0l}{2a} \cdot c \quad (15)$$

が導出できる。 c の係数部分を l についての二次関数とみなすと $a > 0$ 、 $b > 0$ より上に凸のグラフで、極大値

$$\frac{b^2 P_0^2}{2(a+b)^2 + 2b^2} \quad (16)$$

は正の値である。また、極値点

$$\frac{bP_0}{(a+b)^2 + b^2} \quad (17)$$

も正の値である。さらにまったく休憩のない ($l = 0$) ととき式 (11) から Gain と Loss の差は 0 なので、このグラフは原点を通る。

ここで、 $0 \leq l \leq T$ であり、(10) から

$$\frac{bP_0}{(a+b)^2 + b^2} < T \quad (18)$$

である。従って、仕事効率を最大にする l は存在し、その値は

$$l = \frac{bP_0}{(a+b)^2 + b^2} \quad (19)$$

である。つまり、長さ l の休憩によって Loss より Gain の方が大きくなり、仕事の効率が上がっているのがわかる。

6 考察と今後の課題

今回、休憩することによって休憩しないときよりも効率が上がる条件があることを証明した。また、休憩のタイミング $t_1 = bl_{const}/a$ において、休憩に伴う仕事量の Gain と Loss の差の値を最大にする休憩の長さ l が存在することが分かった。

今回、仕事に伴う体力の減少・回復は時間に対して線形な変化を行うと仮定している。このようなモデルは解析が容易であるが、しかし、現実の系では仕事の質や個人の特性に応じて様々な関数型を取ることが予想される。さらに、仕事量に関しては単純に体力の減少に比例する条件で求めたが、仕事の継続時間や頻度は集中力に影響を与えることが知られているので[2]、そうした影響をモデルに組み込むことも必要である。今回の研究をより現実的な系に対応させていくことが今後の課題である。

仕事効率の最大化の問題は、例えば人の疲労を考慮した仕事効率だけでなく、産業における機械のメンテナンスや店舗のリニューアル、様々なレースのような局面にも応用できると考えられる。例えばレーシングカーのレースにおいて走行の効率を最大にするためのピットインの時間やタイミングを決める際に有効なのではないかと考えられる。実際にこれらの問題に対して、特化したシミュレーションが作成されているものもある。そういった例を参考にしながら、モデルのさらなる改変を試みたい。

謝辞

「数学と生命現象の連関性の探求～新しいモデリングの数理」におけるモデルコンテストを通じて、興味深いテーマに取り組むことができました。瀬野先生をはじめとし、運営に関わってくださった斎藤先生や佐藤先生その他多くの先生方にこの場を借りてお礼を申し上げます。

引用文献

- [1] Aykin, T. (1996) Optimal shift scheduling with multiple break windows. *Management Science*, **42**, 591-602.
- [2] deBettencourt, M. T. et al. (2015) Closed-loop training of attention with real-time brain imaging. *Nature Neuroscience*, **18**, 470-475.