

連続関数の空間の局所的ふるまいについて

北里大学教養部 羽鳥 理 (Osamu Hatori)

序. 2つのBanach空間 B_1, B_2 に対する有界線形作用素

$$T: B_1 \longrightarrow B_2$$

はどのような条件を満たすと surjective かという形の問題において B_2 が可換 C^* 環の場合について議論したい。一般に $T(B_1)$ は $y \in T(B_1)$ に対して $\|y\|' = \inf \{\|x\|_{B_1} : x \in B_1, Tx = y\}$ により定義された $\|\cdot\|'$ に関してBanach空間になる。さらに B_1 のnormを適当に定数倍して修正することによって

$\|\cdot\|_{B_2} \leq \|\cdot\|'$ とすることができるので考える問題は、 A が

i) A は $C_0(Y)$ (局所compact Hausdorff空間 Y 上の複素数値連続関数で無限遠点でvanishするもの全体)の複素部分空間

ii) A はnorm $\|\cdot\|_A$ に関して複素Banach空間で $\|\cdot\|_{\infty(Y)} \leq \|\cdot\|_A$ ($\|\cdot\|_{\infty(Y)}$ は Y 上のsup norm)を満たす

の2条件をみたす空間のとき、どのような条件を満たせば $A = C_0(Y)$ となるか?ということになる。 A が uniformly closed であるときは measure theory が有効でよく用いられる。ここでは別の観点から $A = C_0(Y)$ を示す方法について述べたい。その方法により関数環における諸結果がイデアルの関連において述べなまされ、さらに uniformly closed とは限らない環における結果に拡張される。以下簡単のため Y が compact の場合について述べる。以下 X を compact Hausdorff 空間とし、 $C(X)$ は X 上の複素値連続関数全体とする。これから述べる方法を標語的に表すと：

A と $C(X)$ が "infinitesimally" local に一致する

↓

A と $C(X)$ が local に一致する

↓

A が algebra のときは、 $A = C(X)$ となる

2つ目の↓は1の分解を用いれば示すことができる。

"infinitesimally" local の内容と最初の↓の部分について述べるのがこの小論の重要な内容である。

1. E を $C(X)$ に含まれた norm 空間 (完備でなくともよい) で norm $\|\cdot\|_E$ は不等式 $\|\cdot\|_{\infty(X)} \leq \|\cdot\|_E$ を満た

すものとする。 Λ を discrete 空間とする。このとき

$\tilde{E}^1 = \Lambda$ 上の E -値有界 ($\|\cdot\|_E$ に関して) 関数全体

とおく。 $\tilde{E}^1$ は、 $\tilde{f}^1 \in \tilde{E}^1$ に対して

$$\|\tilde{f}^1\|_{\tilde{E}^1} \equiv \sup \{ \|\tilde{f}^1(\lambda)\|_E : \lambda \in \Lambda \}$$

により定義された norm $\|\cdot\|_{\tilde{E}^1}$ に関して norm 空間になる。

$\|\cdot\|_E$ が完備な norm なる $\|\cdot\|_{\tilde{E}^1}$ もそうであり、 E が norm 環
なる $\tilde{E}^1$ もそうなる。一方 $\tilde{f}^1 \in \tilde{E}^1$ に対して

$$\tilde{f}(\lambda, x) \equiv (\tilde{f}^1(\lambda))(x)$$

により $\tilde{f}$ を定義し $\tilde{f}^1$ と $\tilde{f}$ を同一視すると、 $\|\cdot\|_{\infty(X)} \leq \|\cdot\|_{\tilde{E}^1}$ で

あることから、 $\tilde{E}^1$ は $\Lambda \times X$ 上の有界連続関数の作る空間と同一
視できる。よって $\beta(\Lambda \times X)$ で $\Lambda \times X$ の Stone-Čech の compact

化を表すことにすると $\tilde{E}^1 \subset C(\beta(\Lambda \times X))$ であるとみなして

よいことになる。 $\|\cdot\|_{\tilde{E}^1}$ の定義より $\|\cdot\|_{\infty(\beta(\Lambda \times X))} \leq \|\cdot\|_{\tilde{E}^1}$ と

なることは明らかである。特に $\widetilde{C(X)}^1 = C(\beta(\Lambda \times X))$ である。次

に $x \in X$ に対して

$$F_x^1 = \bigcap [\Lambda \times G]$$

とおく (ここで $[\cdot]$ は $\beta(\Lambda \times X)$ における closure を表し、

$\bigcap$ は x の compact 近傍 G すべてに関しての intersection を表す)。

F_x^1 は $\beta(\Lambda \times X)$ の閉集合で次をみたす:

$$\textcircled{1} F_x^1 = \{ p \in \beta(\Lambda \times X) : \langle f \rangle(p) = f(x) \text{ for } \forall f \in C(X) \}$$

さらに E が X の点を分離しているときは

$$= \{ p \in \beta(1 \times X) : \langle f \rangle(p) = f(x) \text{ for } \forall f \in E \}$$

(ここで $f \in C(X)$ に対して $\langle f \rangle$ は $\langle f \rangle(\lambda) = f$ をみたく $\widetilde{C(X)}^1$ の関数を表す。)

$$\textcircled{2} \beta(1 \times X) = \bigcup_{x \in X} F_x^1, \text{ ここで右辺は disjoint union.}$$

$\varphi \in \widetilde{E}^1|_{F_x^1}$ に対して

$$N_E^x(\varphi) = \inf \{ \|\tilde{f}^1\|_{\widetilde{E}^1} : \tilde{f}^1 \in \widetilde{E}^1, \tilde{f}^1|_{F_x^1} = \varphi \}$$

により、 $\widetilde{E}^1|_{F_x^1}$ は $N_E^x(\cdot)$ に関して norm 空間となり

$\|\cdot\|_{\infty(F_x^1)} \leq N_E^x(\cdot)$ をみたく。さらに E が Banach 空間なら $\widetilde{E}^1|_{F_x^1}$ も Banach 空間になる。 1 は無限集合の場合が本質的であり、 $F_x^1 \cap [1 \times \{x\}]$ であるが一般には $=$ は成立しない。 1 の濃度が十分大きいと $\widetilde{E}^1|_{F_x^1}$ は E の x の近傍でのふるまいをはんえいするように思われる。 $\widetilde{E}^1|_{F_x^1}$ の例を2,3みてみる。

例1. $E =$ 定数関数全体 のとき

$$\widetilde{E}^1|_{F_x^1} \cong C_b(1) \equiv 1 \text{ 上の複素数値有界関数全体}$$

例2. $E = C(X)$ のとき

$$\widetilde{E}^1|_{F_x^1} = C(F_x^1)$$

例3. $x \in X$ に対して $\exists f \in E$ s.t. $f(x) \neq 0$ なら

$$C_b(1) \supseteq \widetilde{E}^1|_{F_x^1} \subset C(F_x^1)$$

となり $\widetilde{E}^1|_{F_x^1}$ が $C_b(1)$ に近いと E の x の近くでのふるまいがまたやがて $C(F_x^1)$ に近いとはけしいと考えられる。

例4. $x \in X$ において E の ball が equicontinuous なる

$$\widehat{E}|_{F_x} \cong C_b(\Lambda)$$

例5. $X = \mathbb{C}^n$ の ball で $A(X) = X$ 上で連続 X の内部で正則な複素数値関数全体 のとき

a) $x \in X$ の内部 のとき

$$\widehat{A(X)}|_{F_x} \cong C_b(\Lambda)$$

b) $x \in X$ の境界 ∂X のとき

$$C_b(\Lambda) \not\cong \widehat{E}|_{F_x} \not\subset C(F_x) \quad \text{ただし } \Lambda \text{ は無限集合}$$

で $(A(X)|_{\partial X})^{\sim}|_{F_x'}$ は F_x' の点を分離する [1]. ここで

$$F_x' = \cap [1 \times G'] \text{ で } G' \text{ は } \partial X \text{ における } x \text{ の compact}$$

近傍すべてを動かす。

ここで a) の示すことは $A(X)$ の関数が X の内点の近くでは、激しい変化をしないということであるが実際 $A(X)$ の ball の関数は各内点の近くで equicontinuous である。

例6. A を $C(X)$ に含まれる Banach 環, I を A のイデアル (closed である必要はない) とする。この時

a) $x \notin \ker I$ (I の kernel) なる

$$\widehat{I}|_{F_x} = \widehat{A}|_{F_x}$$

b) $x \in \ker I$ の内部 なる

$$\widehat{I}|_{F_x} = \{0\}$$

2. この章で $\hat{A}^1|_{F_x^1}$ と $C(F_x^1)$ が一致するための条件を述べるがもう少し一般的に $A \subset B \subset C(X)$ のときに $\hat{A}^1|_{F_x^1}$ と $\hat{B}^1|_{F_x^1}$ が一致するための条件を調べる。ここで $\|\cdot\|_{\infty(X)} \leq \|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_A$ と仮定して一般性を失わない。具体的には次を述べる。

(1) $\hat{A}^1|_{F_x^1} = \hat{B}^1|_{F_x^1}$ となる十分条件

特に (i)-i F_x^1 上における関数族の条件

(i)-ii x の近傍における関数族の条件

(2) $\hat{A}^1|_{F_x^1} = C(F_x^1)$ のとき A に対してどのようなことが言えるか?

まず (1) について。 $\|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_A$ であるので $\hat{A}^1 \subset \hat{B}^1$ であり、だから各 $x \in X$ に対して $\hat{A}^1|_{F_x^1} \subset \hat{B}^1|_{F_x^1}$ であって、さらに $N_B^x(\cdot) \leq N_A^x(\cdot)$ をみたま。 (i)-i については

定理 1. $\forall \tilde{f}^1 \in \hat{B}^1|_{F_x^1}$ に対して $\exists \tilde{g}^1 \in \hat{A}^1|_{F_x^1}$

s. t. $N_B^x(\tilde{f}^1 - \tilde{g}^1) < N_B^x(\tilde{f}^1)$

$\Rightarrow \hat{A}^1|_{F_x^1} = \hat{B}^1|_{F_x^1}$

系 1.1. $\hat{A}^1|_{F_x^1}$ が $\hat{B}^1|_{F_x^1}$ で $(N_B^x(\cdot))$ による位相に関して) dense

$\Rightarrow \hat{A}^1|_{F_x^1} = \hat{B}^1|_{F_x^1}$

次に (i)-ii については

定理2. $x \in X$ とする。 $L_n (n = 1, 2, \dots)$ は B の部分集合で、 x において B -equicontinuous (i.e. $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists G_\varepsilon : x$ の近傍 s.t. $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \|f\|_B$ for $\forall f \in L_n, \forall y \in G_\varepsilon$) とする。この時 $A + \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = B$ であり、 $\exists f \in A$ が $f(x) \neq 0$ を満たすかまたは $\forall g \in B$ が $g(x) = 0$ を満たす

$$\Rightarrow \hat{A}'|_{F_x'} = \hat{B}'|_{F_x'}$$

(注) 定理2の逆は一般には成立しない(たとえば Λ の濃度が有限であると、 x が A の共通零点でない限り常に $\hat{A}'|_{F_x'} = \hat{B}'|_{F_x'} \cong C_b(\Lambda)$ である。) が Λ の濃度が B の濃度以上の時には逆も成立する。 Λ の濃度が x のある一組の近傍基の濃度以上である時に逆が成立するかどうか筆者には不明である。

系2.1. L が B の線形部分空間で x の (線形空間としての) 次元が可算以下であるものとする。 $A + L = B$ であり、 $\exists f \in A$ が $f(x) \neq 0$ を満たすかまたは $\forall g \in B$ が $g(x) = 0$ を満たす

$$\Rightarrow \hat{A}'|_{F_x'} = \hat{B}'|_{F_x'}$$

(注) 系2.1. の条件を満たす A は B で closed で codimension は有限 (0 も含めて) になる。

最後に (2) について。

定理3. x の一組の近傍基以上の濃度をもつ Λ に対して

$$\tilde{A}|_{F_X^1} = C(F_X^1)$$

$\Rightarrow \exists G: X$ の compact 近傍 s.t.

$$A|_G = C(G)$$

⑨ 定理 1 と 定理 3 から 測度論を用いずに Stone-Weierstrass の定理の証明ができる。

系 3.1. A が $C(X)$ に含まれている Banach 環で X の点を分離し、さらに $\forall x \in X$ に対して $\exists f_x \in A$ s.t. $f_x(x) \neq 0$ をみたすものとする。 L_n ($n=1, 2, \dots$) は $C(X)$ の部分集合で各点 $x \in X$ で A -equicontinuous なるものとする。今、

$$A + \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = C(X)$$

$$\Rightarrow A = C(X)$$

この特別な場合に Čerých [1] により示された定理が得られる。

系 3.2. A が関数環で $C(X)$ と異なるならば、 A の $C(X)$ での (線形空間としての) codimension は無限である。

参考文献

1. A. Bernard and A. Dufresnoy, Calcul symbolique sur la frontière de Šilov de certains algèbres de fonctions holomorphes, Ann. Inst. Fourier 25 (1975), 33-43

2. J. Čerch, On linear codimensions of function algebras,
Complex Analysis and Applications '85 141—146