

# ランク 1 の対称空間上のディリクレ問題

日本女子大 峰村 勝弘

広島大 理 田中 誠

広島大 理 岡本 清郷

## §1 序

1971 年に, S. Helgason は, 単位円内部

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

におけるポアソニカル計量

$$ds^2 = (1 - |z|^2)^{-2} dz d\bar{z}$$

に付随するラプラスアン

$$\Delta = (1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

の  $X$  上の固有函数について考察し, 次の結果を得た。

定理 (I)  $B = \{b = e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$  とし,  $s \in \mathbb{C}$  とする。  $B$  上の

超函数  $\varphi$  の, ポアソニ核

$$P(z, b) = \left( \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \right)^{\frac{1+s}{2}}$$

による  $B$  上の積分

$$\int_B P(z, b) \varphi(b) db$$

は,  $s$  が  $\mathbb{C}$  を,  $\varphi$  が  $B$  上の超函数を動くとき,  $\Delta$  の  $X$  上の

固有函数を尽くす。

## § 2. Helgason 予想.

§ 1 にあける  $X$  は、対称空間の一つである。Helgason は、Nice Congress で定理 (I) の一般化を問題として提出した。

$G$  を、連結実半単純線型リ一群とし、 $G = KAN$  を  $G$  の一つの岩沢分解とす。  $K, A, N$  のリ環をそれぞれ  $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$  と書く。  $G$  の元  $g$  の上の分解による  $A$ -成分の  $\log$  を  $H(g)$  と書く。  $\rho = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad}|_{\mathfrak{n}})$  とおく。  $D(X)$  で  $X = G/K$  上の  $G$ -不変な微分作用素のなす可換環を表わす。  $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$  に対して

$$P_\lambda(x, b) = \exp\{- (\lambda + \rho) H(g^{-1}k)\}$$

とおく。(但し  $x = gK, b = kM$ )  $P_\lambda$  はポアソン核と与える。

$B = K/M$  ( $M = Z_K(A)$ ) 上の超函数の全体を  $\mathcal{B}(B)$  と書く。

予想 (II)  $X$  上の  $D(X)$  の同時固有函数は

$$\int_B P_\lambda(x, b) \varphi(b) db \quad (\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*, \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

## § 3. ランク 1 の対称空間における最近までの結果

(II) に対して、群論的な方法による研究は、ランク 1 の場合には限られて来た。この § では  $\text{rank}(X) = 1$  と仮定し、群論的な方法で得られた結果を述べる。

$\dim \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* = 1$  であるから、 $\mathbb{C} \ni s \mapsto sp \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$  により  $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$  と  $\mathbb{C}$  とを同一視する。  $\Delta$  を Killing 形式に対応する  $X$  上のラフマン

アとすると,  $D(X) \cong \mathbb{C}[\Delta]$  (すなわち  $\Delta$  は  $D(X)$  の生成元) となるから, 以下  $\Delta$  のみ考之れば十分である。このとき (II) は次の (II<sub>1</sub>) と (II<sub>1</sub>) の弱形式 (II<sub>2</sub>) に合致することが出来る。

(II<sub>1</sub>)  $\Delta$  の任意の固有函数は

$$\int_B P_s(x, b) \varphi(b) db \quad (s \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

(II<sub>2</sub>)  $\Delta$  の, 固有値  $\mu \geq -\langle p, p \rangle$  の固有函数は

$$\int_B P_s(x, b) \varphi(b) db \quad (s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{B}(B))$$

で尽くされる。

ラック 1 の既約対称空間は

$$BD-I \quad SO(n, 1)/SO(n)$$

$$A-III \quad SU(n, 1)/S(U_n \times U_1)$$

$$C-II \quad Sp(n, 1)/Sp(n) \times Sp(1)$$

$$F-II$$

に分類されるが, 橋本, 岡本, 峰村, Helgason 等により次の結果が得られている。

$$BD-I \quad (II_1) \text{ が成立}$$

$$A-III, C-II, F-II \quad (II_2) \text{ が成立.}$$

§4. ラック 1 の対称空間における現在の結果

群論的な方法では限界があり,  $BD-I$  を除いては, 弱形式の結果しか得られていない。しかし擬微分作用素の理論を用い

ることにより, generic な固有値に対しては (II) が一般のランク 1 の対称空間に対して成立することから示される。以下その概略を述べる。

$\Delta$  は境界  $B$  に属して確定特異点型であるので, 昨日の大島の話にある 大島の定理 により, 固有値  $\lambda = (s^2 - 1) \langle p, p \rangle$  の固有函数  $f$  は

$$f = A_1(b, D_x, D_b) \varphi_1(b) t^{\lambda_1} + A_2(b, D_x, D_b) \varphi_2(b) t^{\lambda_2}$$

と表わされる。(こゝに,  $\varphi_1, \varphi_2$  は  $B$  上の超函数,  $A_1, A_2$  は擬微分作用素,  $\lambda_1 = (\frac{p}{2} + q)(1+s)$ ,  $\lambda_2 = (\frac{p}{2} + q)(1-s)$ ,  $p = \#\{\text{positive reduced root}\}$ ,  $q = \#\{\text{positive non-reduced root}\}$ )

$A_1, A_2$  のある正規化の下に  $\varphi_1, \varphi_2$  は unique である。  $\varphi_1, \varphi_2$  を  $f$  の  $\varphi$  とし,  $\varphi =$  境界値と呼び  $\gamma_s(f) = \varphi_2$ ,  $\rho_s(\varphi) = \int_B \rho_s(x, b) \varphi(b) db$  と定義すると,  $\gamma_s$  は次の

$$(1) \quad \gamma_s \circ \rho_s = c(s) \text{id} \quad (c(s) \text{ は constant})$$

$$(2) \quad \gamma_s \text{ は } G\text{-equivariant}$$

$$(3) \quad \gamma_s \text{ は } K \text{ 上の積分と可換}$$

から成り立つ。(1) ~ (3) より (II) が証明される。

§ 5. ランク 2 以上の対称空間

最近 大島によつて  $SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$  の場合にも (II) が成立することから示された。方法は, 余次元 1 の場合に帰着するのである。