

特殊解からの可積分系の構成 — 1つの試み —

京大数理研 中屋敷 厚 (Atsushi Nakayashiki)

大山・鈴木両氏により述べられている、我々が構成した高次元の可積分系は、self-dual-Tang-Mills 方程式系（略してSDYM）を含むので、もちろんSDYMの様々な特殊解、例えば、instanton解なども含むのであるが、それを、1次元のKP系のように、UGMの、ある群の作用による、不変部分多様体として特殊化するというような、システムティックなやり方で、構成することには、ほとんど成功していない。むしろ、soliton解のみKP系と類似の仕方で作られているが、これは研究会の時話したように、きちめて1次元的な解で、これから本質的に高次元的な特殊解（別にきちとした定義があるわけではないが）構成への糸口をつかむことはむずかしいと思われる。特殊解構成の困難は、主に変換群がきちりと構成できていないことによるもので、その問題点については、高崎氏の論説に書かれるものと思われる。このように我々の構成した可積分系は、特殊解についてみると、

不満足・不完全である。では、例えば1つの問題として、高次元的な特殊解を必ず持つような可積分系を定義し求めよ。というニを考えたとき、どうすればよいであろうか。ニニではその1つの試みとして、特殊解—と言っても我々は例えば高次元のアーベル関数なども念頭においているのであるが—を与えて、それを解とするような非線型の微分方程式系を構成するニにする。

§1. KP系の準周期解

状況設定はKP系の場合の自然な拡張なので、まず1次元の場合を復習しておくニにする。

定義 次の条件をみたす関数 ψ を Baker-Akhiezer関数という。

$$\left\{ \begin{array}{l} C: \text{種数 } g \text{ のコンパクト・リーマン面} \\ C \ni P_\infty \quad z: P_\infty \text{ のまわりの local parameter, s.t. } z(P_\infty) = 0 \\ D = P_1 + \dots + P_g: \text{deg } g \text{ の一般因子} \\ \psi: C \setminus P_\infty \text{ で meromorphic} \quad (\psi)_\infty = \psi \text{ の pole divisor} = D \\ \psi(z) e^{-z \frac{t_n}{2g}} = 1 + O(z) \quad : P_\infty \text{ のまわりで正則} \end{array} \right.$$

Baker-Akhiezer関数は、上の前半の4つのdataに対して、

unique に存在し、次のように、 $\text{Jac}(C)$ (= C の Jacobian) の

テータ関数を使って書くニができる。

$\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ を $H_1(C, \mathbb{Z})$ の canonical basis とする。

i.e. $\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0, \alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$ ($\cdot$ は交点数を表す)

$H^0(C, \mathbb{C}^1)$ の basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ を $(\int_{\alpha_i} \omega_j, \int_{\beta_i} \omega_k) = (1 \text{ or } 0) \quad \alpha_i \in \mathcal{H}_g$
 ($\mathcal{H}_g$: シーガル上半空間) とするよにせる。

$A: C \rightarrow \text{Jac}(C) : \mathcal{A}$ -valued map.

$q_n: P_\infty \mathbb{C} \sim d(z^{-n}) + o(1)$ とする 第2種微分

二のとき

$$\psi(P) = \frac{\theta(A(P) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n t_n - A(D) + K) \theta(A(P_\infty) + K - A(D))}{\theta(A(P) + K - A(D)) \theta(A(P_\infty) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n t_n - A(D) + K)} e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n \int^P q_n}$$

二二二

$$2\pi\sqrt{-1} u_i = (\int_{\beta_i} q_1, \dots, \int_{\beta_i} q_g) \quad 1 \leq i \leq g.$$

remark. $\int_{B_j} q_k = -2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} \omega_j}{dz^{k-1}} \Big|_{z=0} \quad \omega_j(P) = \int_{P_0}^P \omega_j$ なる式を使うと

(田中・伊達参照) $\{u_i\}$ を, $\omega_1, \dots, \omega_g$ たちの $z=0$ における展開係数を使って表すことができる。

Baker-Akhiezer関数と UGM の frame との対応は次で与えられる。

P_∞ のまわりで

$$\psi(z, t) = W(z, t) e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{z^n}} \quad \text{と展開}$$

↓

$$\phi = \otimes W(\theta_x^{-1}, t)$$

$$= \tau \cdot \otimes = [\tau t_1, t_2, \dots] [\alpha], \quad t_1 = x,$$

↓

$$V = W^{-1} V \phi.$$

$$V \phi = \begin{array}{c|c} & 1 \\ & 1 \\ & 1 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{これは UGM の点}$$

ϕ も V も $\otimes$ -加群であるが, これらとは異なる $\otimes$ -加群を

$$V = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline \dots & -w_{0/1} - w_{0/2} \\ & \vdots \\ & -w_{0/2} \\ & \vdots \end{array} \quad V^0 = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline w_{0/1} & z \\ w_{0/2} & z^2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$\partial \leftrightarrow z$ なる対応により V^0 の各ベクトルから $\mathbb{C}(z)$ の元をつくる L の元になる。例えば V^0 の第1列から作ると

$$\psi(z, 0) = 1 + \sum_{j \geq 0} w_{0/j} z^{-j}$$

は、 $t=0$ における Baker-Akhiezer関数である。又、 V^0 の各 basis から ψ のようにして得られる L の元たちが L の $\mathbb{C}$ 上の basis になることも簡単に分かる。従って

$$L \simeq V^0$$

$$\gamma = 3, 2 \quad 0 \rightarrow V \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/V \rightarrow 0 \quad \text{の dual を } \gamma, 2$$

$$0 \leftarrow V^* \leftarrow \mathcal{V}^* \leftarrow (\mathcal{V}/V)^* \leftarrow 0$$

$\begin{smallmatrix} \text{S}'' \\ \downarrow \\ V^0 \end{smallmatrix}$

例えば、 V^0 は、dual グラスマニフォールドの frame をあらわしている。

ところで、Baker-Akhiezer関数 ψ としては、リーマン面 C 上の関数としたが、これもある種の line bundle の section によって定義を拡張する事ができる。

例 C : 楕円曲線 σ : Weierstrass の η 関数

Baker関数 ψ

$$\psi(z) = \frac{-\sigma(a)\sigma(z-a-t_1)}{\sigma(z-a)\sigma(-a-t_1)} e^{t_1 \zeta(z) + t_2 \eta(z) - \frac{t_2}{2!} \beta'(z) + \dots}$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{dz} \log \sigma(z) \quad \beta(z) = -\frac{1}{dz} \zeta(z)$$

拡張された Baker 関数 ψ

$$\psi = \frac{-\sigma(a)\sigma(z-a+c-t_1)}{\sigma(z-a)\sigma(-a+c-t_1)} e^{t_1\zeta(z)+t_2P(z)-\frac{t_3}{2!}\zeta'(z)+\dots} \quad c \in \mathbb{C}$$

ψ は $\mathbb{C}$ 上の $\deg=0$ の line bundle の section である。 ψ から作られた W (あるいは V) も KP 系の解 (すなわち準周期解) を与える。

従って Baker 関数とは、ある種の essential singularity をもった、その他の点では meromorphic な、 $\mathbb{C}$ 上の line bundle の global section であるといえることができる。この Baker 関数から作られる L は、次のように特徴づけることができる。

$L = \{ \psi : \exists \theta \text{ 関数 } \theta, \exists c \in \mathbb{C}^g \text{ について } \frac{\theta(A(P)+c)}{\theta(A(P))} \text{ が global section とする } \psi \text{ となる } \mathbb{C} \text{ 上の line bundle の section s.t. } P_\infty \in \mathbb{C}, D = P_1 + \dots + P_g \text{ 一般因子, } \mathbb{C} \setminus P_\infty \text{ で meromorphic, pole divisor } (\psi)_\infty = D, z = P_\infty \text{ のまわりの local parameter s.t. } z(P_\infty) = 0, \exists m, z^m e^{-\frac{t_n}{z^n}} = P_\infty \text{ の近傍で正則} \}$

この L が、前に定義した L と一致するといえる、つまりある 1 の Baker 関数 ψ_0 を使って $L = \langle \psi_0 \rangle$ と書けることは、リーマン・ロッホの定理の簡単な帰結である。

さて、 $t_n = 0$ for $n=1, 2, \dots$ という初期値に対応する L を考えよう。これは $D + mP_\infty$ $m=0, 1, 2, \dots$ という pole divisor を持つ line bundle の meromorphic section 全体をあらわしてやる。

特に line bundle を自身と同一視することが出来る。
従って、

$A = \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{ \text{高々 } p_\infty \text{ でのみ pole をもつような meromorphic 関数全体} \}$

とあくと、

L : rank 1 の射影的 A -加群.

と言ふより。 $L = V^\circ$ であつたが、 V° は双対グラスマ = 多様体 $GM(V^*)$ の frame であるから、結局 KP 系の準周期解をあらわす。 $GM(V^*)$ の点は、代数曲線の affine 環 A として、射影的 A -加群であるといふことができる。

§2 準周期解の高次元への拡張

KP 系の準周期解を上のように定式化すると、次元が 2 以上の代数多様体上の line bundle を考えて、上と同じような理論を作ることができないかという考えに導かれる。我々は、 X がアーベル多様体のときに、 L を explicit に構成し、 $\dim X = 2$ のときに、 L の構造を調べた。 X がそのアルバニーセ多様体 $Alb(X)$ に埋め込まれる場合にも本質的には同じで、Manin [1] に述べられている。以下、 X が 2 次元アーベル多様体の場合について述べることにする。

X : 2 次元アーベル多様体.

$\Theta = (\theta) \quad \text{is a divisor.}$

$$D = (\theta(z-a)) \quad a \in \mathbb{C}^g \quad c \in \mathbb{C}^g$$

のとき

$L := \{ \psi : \frac{\theta(z+c)}{\theta(z)} \}$ を global section とする ψ は X 上の line bundle の global section, s.t. $X \setminus \Theta$ 上 meromorphic, $\psi(z) e^{-\sum_0(z)X_0 - \sum_1(z)X_1} =: f(z)$ 正則 near $\Theta \setminus \Theta(z-a)$, pole divisor $(\psi)_\infty = D \} \quad \text{with } \sum_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \log \theta.$

一次元の時とは違って、今度は L は $\Theta = \mathbb{C}[[x_0, x_1]] \llbracket \theta_0, \theta_1 \rrbracket$ 上単項生成では無い。 L の Θ -加群としての構造は、テータ関数の加法定理から出る。すなわち

Prop 0. $L = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{a \in \mathbb{R}^2 / (n+1)\mathbb{Z}^2} \mathbb{C} \psi_{n,a}.$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{n,a} = - \sum_{b \in \mathbb{R}^2 / (n+2)\mathbb{Z}^2} \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial z_j} f_{(n+1)(n+2), a+(n+1)b} \left(-\frac{x+\alpha-c}{(n+1)(n+2)} \right) \psi_{n+1, a+(n+1)b}.$$

すなわち

$$\psi_{n,a}(z, x, \alpha, c) = \frac{f_{n+1,a}(z - \frac{x+\alpha-c}{n+1})}{\theta(z)^n \theta(z-\alpha)} e^{\sum_0(z)X_0 + \sum_1(z)X_1}$$

$$f_{n,a}(z) := \theta\left[\frac{a}{n}\right](nz, n\Omega)$$

$$\theta = \text{Weierstrass's theta function i.e. } \theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi i t_m \Omega m + 2\pi i t_m z}$$

証明は、次の加法定理 (c.f. Mumford [1])

$$f_{n+1,a}(z - \frac{y+\alpha}{n+1}) \theta(z-x) = \sum_{b \in \mathbb{R}^2 / (n+2)\mathbb{Z}^2} f_{(n+1)(n+2), a+(n+1)b} \left(\frac{x}{n+1} - \frac{y+\alpha}{(n+1)(n+2)} \right) f_{n+1, a+(n+1)b} \left(z - \frac{y+\alpha}{n+1} \right)$$

を x_j で微分すればよい。 $\mathbb{C}$ 上の生成元の求め方については、Mumford [1] を参照。

とすることで, $\{y_{n,a}\}$ は L を C 上生成するが basis ではない。
 L と グラスマン多様体の点 (あるいは双対グラスマン多様体の点) つまり, frame (or dual frame) とを対応させようとした場合, やはり C 上, $\mathcal{O}$ 上の basis をきち, と求めておく必要がある。これについては次のことが成り立つ。

Prop. 1 $C[x_0, x_1] \otimes_C L$ は, $C[x_0, x_1]$ 上 1 次独立な 2 個の元で $\mathcal{O}$ 上生成される。

$$\text{i.e. } L = \mathcal{O} y_0 \oplus \mathcal{O} y_1, \quad \exists y_0, y_1 \in L.$$

ここで y_0, y_1 としよ。

$$y_0 = y_{0,0} \quad y_1 = y_{1,a} \text{ の中から選べる。}$$

証明は, テータ関数の $\mathcal{O}$ 上の点における Taylor 展開と, リーマン・ロッホの定理とによるが, くりし $\square$ については省略する。
 又

$A = \mathcal{O}(X \setminus \mathcal{O}) = \{ \mathcal{O} \text{ にのみ pole をもつ } X \text{ 上の meromorphic 関数} \}$
 とおくと, L は, 射影的 A -加群であるが,

$$\mathcal{O}_A := A \otimes_C \mathcal{O}$$

と係数拡大すると,

Prop. 2 L は simple $\mathcal{O}_A$ -加群である。

$$\text{i.e. } L = \mathcal{O}_A y_0$$

我々は、 L を双対グラスマン多様体の frame として理解したいのであるが、frame の大きさをどのように設定するか問題となる。これについても、いくらも分かっていないが、最終的な形にまとめられていないので省略する。

次に、 L と $\mathcal{O}$ -イデアル $\mathfrak{f}$ との対応を述べ、発展方程式を導くことにする。

$$\frac{\partial z_0}{\partial \theta} - a_0 = w_0^{-1} \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} - a_1 = w_1$$

と、 $(z_0, z_1) \rightarrow (w_0, w_1)$ なる座標変換を $(w_0, w_1) = (0, 0)$ のまわりで行う。ここで、 a_0, a_1 は、 $\mathcal{J}((\frac{\partial z_0}{\partial \theta} - a_0)^{-1}, \frac{\partial z_1}{\partial z_0} - a_1)$ が退化した点をさけるように適当にとる。ただし $(z_0, z_1) \in \mathcal{O}$

のとき

$$z_0 = \frac{\partial}{\partial z_0} \log \theta = \frac{\partial z_0}{\partial \theta} = w_0^{-1} + a_0$$

$$z_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} \log \theta = \frac{\partial z_1}{\partial \theta} = \frac{\partial z_0}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = w_0^{-1}(w_1 + a_1) + a_0(w_1 + a_1)$$

であるから、 $(w_0, w_1) = (0, 0)$ のまわりで

$$\psi_i(w_0, w_1, x) = W_i(w_0, w_1, x) e^{\frac{x_0}{w_0} + \frac{x_1(w_1 + a_1)}{w_0}} \quad i = 0, 1.$$

と展開する。Prop. 1 より

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_0} = B_{00}^{(i)} \psi_0 + B_{01}^{(i)} \psi_1$$

$$B_{\alpha\beta}^{(i)} \in \mathcal{O} \quad i, \alpha, \beta = 0, 1.$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} = B_{10}^{(i)} \psi_0 + B_{11}^{(i)} \psi_1$$

と書ける。 W_i について書き直すと

$$\partial_j W_i(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - a_1, x) = B_{j0}^{(i)} W_0(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - a_1, x) + B_{j1}^{(i)} W_1(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - a_1, x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + W_i(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - a_1, x) \theta_j = \sum_{k=0,1} B_{jk}^{(i)} W_k(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - a_1, x) \quad i, j = 0, 1$$

これは、 $\{w_i\}$ たちの係数に対する非線型の微分方程式もあつて
 書いている。なお、このとき

$$f = \otimes w_0 + \otimes w_1$$

高次の時間発展をどうするかという問題が残っているが、

$$u_{ij} := \partial_{z_0}^i \partial_{z_1}^j \log \theta \quad i, j \in \mathbb{N} \quad i+j \geq 1$$

と定義すると、 $i+j \geq 2$ ならば u_{ij} はアーベル関数になるの
 で、

$$\varphi_{n,a} := \frac{f_{n+1,a}(z - \frac{x+y}{n+1})}{\theta(z)^n \theta(z-\alpha)} e^{\sum_0 x_0 + \sum_1 x_1 + \sum_{i+j \geq 2} t_{ij} (-)^{i+j} \frac{u_{ij}}{(i+j)!}}$$

は、 L の section になる。(ここでは、 L と line bundle とを同
 一視して、混同して使っている。) 従って、 u_{ij} を w_0, w_1 で
 展開したときの主要部に相当する時間発展が許されると思わ
 れるか、対応する frame を時間発展させたときに、発散など
 の困難などがおきないかなど、frame との対応をきちりつ
 けて調べなければならぬので、今のところは、きりしたこ
 とを言うことはできない。又、変換群としてどんなものが許
 されるかもきちり求めることもこれから課題である。

最後に、高次の時間発展 t_{ij} を入れた場合の時間発展の方程
 式も W のレベルでは書くことができるので書いておく。

$u_{ij}(w_0, w_1)$ の singular part を P_{ij} とおく。ただし
 P_{ij} は定数項なしとする。i.e., $u_{ij}(w_0, w_1) = P_{ij}(w_0, w_1) + \text{regular}$

$$\text{特に } P_{10} = \frac{1}{w_0} \quad P_{01} = \frac{w_1 + q_1}{w_0}$$

$$\psi_i = W_i(w_0, w_1, t) e^{\sum \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j)!} t_{ij} P_{ij}(w_0, w_1)} \quad \text{near } (w_0, w_1) = (0, 0)$$

と展開して、上と同様にして、

$$\frac{\partial W_i}{\partial t_{\ell\ell}} + W_i P_{\ell\ell}(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - q_1, t) = \sum_{m=0,1} B_{\ell\ell,m}^{(i)} W_m(\partial_0^{-1}, \partial_0^{-1} \partial_1 - q_1, t)$$

$$B_{\ell\ell,m}^{(i)} \in \mathcal{D} = \mathbb{C}[[t_{ij}]][\partial_0, \partial_1] \quad i=0,1 \quad (\ell, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \ell \neq 2$$

§3 まとめ

KP系 or 上の準周期解は、代数曲線 or アーベル多様体上の line bundle の変形を記述しているといえることができる。簡単化して言うと、例えば楕円曲線上で $\frac{\sigma(z+cx)}{\sigma(z)}$ というように parameter x で line bundle を変形し、変形を記述するために、何か一つの line bundle に section を (ある意味で) 引きもどして調べるのであるが、その引きもどしは $e^{-3/2ix}$ によってなされている。つまり、 $e^{-3/2ix}$ がある意味で変形を記述しているといえることができる。指数関数で変形が記述できるのは、line bundle がテータ関数を使ってあらわされているからである。そこで、一般の代数多様体上の line bundle も、それが何らかの意味で変形できるならば、変形を微分方程式で記述できるのかという問題を考えることができる。

又、上で最後に高次の時間発展を考えたが、これは準周期解のみを考えていたのでは意味がない。つまり $t_{ij} \neq 0$ は

line bundle を変形していい。上で構成した準周期解を特殊解として含むような可積分系がちゃんとできたときに意味をもつものである。そのときの W の時間発展の方程式は、上であげたものになるであろう。(と期待している。)

本文でもちょっと触れたが、変換群の話も、準周期解の範囲に限っても、きっちり調べておくことは重要で、準周期解全体が等質空間になるか、あるいは、例えば、KP系の場合の Virasoro 代数に対応するようなものがあるか、などは非常に興味深いと思われる。

文献

D. Mumford [1] Tata Lectures on Theta I. Birkhäuser Boston Inc. 1983.

M.M. Kaparanov and Yu.I. Manin [2], The twistor transformation and algebraic geometric constructions of solutions of the equations of field theory, Uspekhi Mat. Nauk 41:5 (1986) 85-87.
Russian Math. Surveys 41:5 (1986) 33-61.

T. Shiota : Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. Inv. math. 83 333-382 (1986)

M. Mulase : Cohomological structures in soliton equations and Jacobian varieties, J. Diff. Geometry 19 (1984) 403-430

M. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold, RIMS Kokyuroku 439 (1981) 30-46.

田中俊一・伊達悦朗 : KdV方程式, 紀伊國屋書店 (1979)

Date, E, Jimbo, M, Kashiwara, M, Miwa, T, : Transformation groups for soliton equations. In : Proceedings RIMS Symp. Non-linear integrable systems-classical theory and quantum theory (Kyoto 1981) PP39-119. Singapore: World Scientific 1988