

Estimates for integral equations with real interpolation technique

信州大学 理学部 数学科 筒井 容平

Department of Mathematical Sciences, Shinshu University Yohei Tsutsui

1 Introduction

全空間での熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \\ u(0) = a \end{cases}$$

の解は、形式的には次の積分方程式を満たす；

$$u(t) = e^{t\Delta}a + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau,$$

where $e^{t\Delta}g(x) := g * G_{\sqrt{t}}(x)$, $G_{\sqrt{t}}(x) := t^{-n/2}G(x/\sqrt{t})$ and G is the Gaussian. 右辺の2項目の評価に関して次のような critical なものが知られている.

Theorem 1.1 ([9], [13]). *Let $n \geq 3$.*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau \right\|_{L^{n,\infty}} \lesssim \sup_{\tau < t} \|f(\tau)\|_{L^{n/2,\infty}}.$$

Critical という意味は,

$$\|e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)\|_{L^{n,\infty}} \lesssim (t-\tau)^{-1}\|f(\tau)\|_{L^{n/2,\infty}} \notin L^1((0,t))$$

に由来する. つまり, 絶対収束はせず, 条件収束していると理解できる. また, f が時間に独立である場合,

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}fd\tau = e^{t\Delta}\Delta^{-1}f - \Delta^{-1}f$$

と (形式的には) なることから、左辺は2階積分の作用素と理解できる.

2 Results

上の定理は、次のように拡張できる.

Theorem 2.1. (i) *Let $n \geq 3$, $p \in (1, n/2)$ and $1/q = 1/p - 2/n$, (i.e. $n/(n-2) \leq p < \infty$). この時,*

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta}g(\tau)d\tau \right\|_{L^{q,\infty}} \lesssim \sup_{-\infty < \tau < t} \|g(\tau)\|_{L^{p,\infty}}.$$

(ii) ([12]) $p \in [1, \infty]$ と $s \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta}g(\tau)d\tau \right\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} \lesssim \sup_{-\infty < \tau < t} \|g(\tau)\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s-2}}.$$

この評価を 非圧縮 Navier-Stokes 方程式の時間周期問題について応用することを考える。

$$(N.S.) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

ここで, $f = f(t, x)$ は時間周期 $\omega > 0$ を持つ与えられた外力とする. つまり, $f(t + \omega, x) = f(t, x)$ for all $t > 0$. $u = (u_j)_{j=1}^n$ と π は, それぞれ 流体の速度ベクトルと圧力を表す未知函数である. 第一式は運動量保存則, 第二式は質量保存則である. 第二式と Gauss の発散定理から

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} u dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n d\sigma,$$

ここで, n は 領域 Ω の外向き単位法線ベクトル. これは, 流体が非圧縮であることを表している. $\operatorname{div} u := \sum_{j=1}^n \partial_j u_j = 0$ であるとき, 次の等式が成立することに注意する:

$$(u \cdot \nabla)v := \left(\sum_{j=1}^n u_j \partial_j v_k \right)_{1 \leq k \leq n} = \nabla \cdot (u \otimes v),$$

ここで, $u \otimes v := (u_j v_k)_{1 \leq j, k \leq n}$.

Helmholtz projection $\mathbb{P} := (\delta_{ij} - R_i R_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, ($R_i := (-\Delta)^{-1/2} \partial_i$: Riesz 変換) は, 次のような性質を持つ;

$$(*) \begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(u) = u \\ \mathbb{P}(\nabla \pi) = 0. \end{cases}$$

これからは, Fourier 変換を通すと確認できる. この projection を (N.S.) の第一式の両辺に作用させ, (*) を用いて, $\mathbb{P}$ と 微分作用素との交換を認めると;

$$\partial_t u - \Delta u + \mathbb{P} \nabla(u \otimes u) = \mathbb{P} f$$

となる. この方程式の積分方程式への変換は, Kozono-Nakao [7] により次のように与えられている;

$$(I) u(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P} f(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P} \nabla(u \otimes u)(\tau) d\tau.$$

Theorem 2.1 を使うことにより, 次のような解の存在が得られる.

Theorem 2.2. ([10]) $n \geq 3$ とし, $f \in BC(\mathbb{R}; L^{n/3, \infty})$ が時間周期 $\omega > 0$ を持ち,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{L^{n/3, \infty}} \ll 1$$

であれば, (I) の解で時間周期 ω を持つ $u \in BC(\mathbb{R}; L^{n, \infty})$ が存在し, $\nabla u \in BC(\mathbb{R}; L^{n/2, \infty})$. さらに, もし $f \in BC(\mathbb{R}; L^{p, \infty})$ with $p \in (n/3, \infty)$ であれば,

- $u \in BC(\mathbb{R}; L^{r_1, \infty})$ for $r_1 = np/(n-2p)$ if $p < n/2$ or any $r_1 < \infty$ if $p \geq n/2$
- $\nabla u \in BC(\mathbb{R}; L^{r_2, \infty})$ for $r_2 = np/(n-p)$ if $p < n$ or any $r_2 < \infty$ if $p \geq n$.

Remark 2.1. $n = 3$ の場合も同様な結果が, $L^{n/3, \infty}$ を L^1 に変えると得られる. 前半の結果は, [13] のものに含まれているが, 後半の解の性質は, 新たなものとなっている.

3 Proof of the critical estimate

ここで, Theorem 2.1 の (ii) の証明を与える.

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ with } \text{supp } \varphi \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\} \text{ かつ } \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1 \text{ for } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

を固定し, $\varphi_j(D)f := \mathcal{F}^{-1} \left[\varphi\left(\frac{\cdot}{2^j}\right) \hat{f} \right] \in \mathcal{S}'$ for $f \in \mathcal{S}'$ と定める. [2] and [1] を参照して, $\mathcal{S}'$ の部分空間 $\mathcal{S}'_h$ を導入する:

$$f \in \mathcal{S}'_h \iff \psi(\lambda D)f := \mathcal{F}^{-1} \left[\psi(\lambda \cdot) \hat{f} \right] \rightarrow 0 \text{ in } L^\infty \text{ as } \lambda \rightarrow \infty,$$

for all $\psi \in \mathcal{S}$. これを用いて, Besov 空間を定義する. $p \in [1, \infty)$ と $s < n/p$ に対して, Besov 空間 $\dot{B}_{p,\infty}^s$ を次で定める:

$$\dot{B}_{p,\infty}^s := \left\{ f \in \mathcal{S}'_h; \|f\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} := \left\| \{2^{js} \|\varphi_j(D)f\|_{L^p}\}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q} < \infty \right\}.$$

この定義においては, この指数の範囲では Banach 空間となる.

証明には, 実補間による特徴付けを用いる:

$$\dot{B}_{p,\infty}^s = (\dot{B}_{p,\infty}^{s_0}, \dot{B}_{p,\infty}^{s_1})_{\theta,\infty},$$

ここで, $\theta \in (0, 1)$ かつ $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$. 後者は, 次のような norm を持つ Banach 空間である:

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^{-\theta} K(\lambda, f; \dot{B}_{p,\infty}^{s_0}, \dot{B}_{p,\infty}^{s_1}).$$

K -functional は

$$K(\lambda, f; \dot{B}_{p,\infty}^{s_0}, \dot{B}_{p,\infty}^{s_1}) := \inf_{\substack{f = f_0 + f_1 \\ f_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{s_0}, f_1 \in \dot{B}_{p,\infty}^{s_1}}} \left(\|f_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_0}} + \lambda \|f_1\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_1}} \right).$$

これを用いて証明を与える. まず, 変数変換して, 次のように書き直す.

$$\int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta} g(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau,$$

ここで, $\tilde{g}(\tau) := g(t - \tau)$.

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau \right\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} &\approx \left\| \int_0^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau \right\|_{(\dot{B}_{p,\infty}^{s_0}, \dot{B}_{p,\infty}^{s_1})_{1/2,\infty}} \\ &\lesssim \sup_{\lambda > 0} \lambda^{-1/2} \left(\|I\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_0}} + \lambda \|II\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_1}} \right), \end{aligned}$$

ここで, $2s = s_0 + s_1$ であり,

$$I := \int_0^{\lambda_*} e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau \text{ \& \& } II := \int_{\lambda_*}^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau.$$

$\lambda_* > 0$ は、後で決める λ に依存する数. Kozono-Ogawa-Taniuchi [8] による Besov 空間における熱核の平滑化効果から、それぞれ次のように評価される.

$$\|I\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_0}} \lesssim \lambda_*^{1/4} \sup_{\tau>0} \|\tilde{g}(\tau)\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s-2}} \ \& \ \|II\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_1}} \lesssim \lambda_*^{-1/4} \sup_{\tau>0} \|\tilde{g}(\tau)\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s-2}}.$$

故に,

$$\left\| \int_0^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau \right\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} \lesssim \sup_{\lambda>0} \lambda^{-1/2} (\lambda_*^{1/4} + \lambda \lambda_*^{-1/4}) \sup_{\tau<t} \|g(\tau)\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s-2}}.$$

最後に, $\lambda_* > 0$ を最良なものをとることにより, 証明が完了する.

(i) の証明も同様にできる. (ii) は, 滑らかさに関する critical は評価であるが, 重みに関する同様なものも可能である [11]. 他にも、いくつかの函数空間で示されている, [3], [4], [5], [6].

References

- [1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **343**, Springer, Heidelberg, 2011.
- [2] G. Bourdaud, *Realizations of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel spaces*, Math. Nachr. **286** (2013), no. 5-6, 476–491.
- [3] M. Cannone and G. Karch, *Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system ?*, J. Differential Equations **197** (2004), no. 2, 247–274.
- [4] L.C.F. Ferreira, *On a bilinear estimate in weak-Morrey spaces and uniqueness for Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **105** (2016), no. 2, 228–247.
- [5] Y. Le Jan and A.S. Sznitman, *Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations*, Probab. Theory Related Fields **109** (1997), no. 3, 343–366.
- [6] P. Konieczny and T. Yoneda, *On dispersive effect of the Coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 10, 3859–3873.
- [7] H. Kozono and M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Math. J. (2), **48** (1996), 33–50.
- [8] H. Kozono, T. Ogawa and Y. Taniuchi, *Navier-Stokes equations in the Besov space near L^∞ and BMO*, Kyushu J. Math., **57** (2003), 303–324.
- [9] Y. Meyer, *Wavelet, Paraproduct and Navier-Stokes Equations*, Current developments in mathematics. International Press, (1996), 105–212.
- [10] T. Okabe and Y. Tsutsui, *Time periodic strong solutions to the incompressible Navier-Stokes equations with external force of non-divergence form*, submitted.

- [11] Y. Tsutsui, *The Navier-Stokes equations and weak Herz spaces*, Adv. Differential Equations **16** (2011), no. 11-12, 1049–1085.
- [12] Y. Sugiyama, Y. Tsutsui and J.L.L. Velázquez, *Global solutions to a chemotaxis system with non-diffusive memory*, J. Math. Anal. Appl. **410** (2014), no. 2, 908–917.
- [13] M. Yamazaki, *The Navier-Stokes equations in the weak- L^n space with time-dependent external force*, Math. Ann. **317** (2000), no. 4, 635–675.