

有限振幅内部孤立波の二次元的不安定性

神戸大自然科学 片岡 武 (Takeshi Kataoka)
葛原 道久 (Michihisa Tsutahara)
阿久澤智規 (Tomonori Akuzawa)

1. 緒言

重力下の密度成層流体中においては、内部波と呼ばれる波が誘起され、あらゆる方向に伝播する。いま、密度躍層や地形等により上下境界が蓋をされたような状況を考えるならば、内部波はその流体深さならびに密度成層分布に応じた鉛直モードを形成し、水平方向へ伝播する。このような現象は、実際、大気境界層や海洋中において頻繁に観察される。そのため、内部波モードの振舞に関しては、ここ数十年にわたって、実験的かつ解析的に多くの研究が成されてきた。中でも特に注目を集めてきたのは、その形を崩すことなく、一定速度で水平方向へ伝播し続けることのできる平面内部孤立波の振舞である。これまで、孤立波同士の相互作用[1-4]、地形効果による孤立波の生成[5,6]、孤立波の安定性[7-17]ならびに崩壊[11,18]等の現象が調べられてきた。この中でも本研究は、有限振幅平面内部孤立波の安定性に関連している。そこでまずは、平面孤立波の安定性に関しての過去の研究を概説する。

平面孤立波の安定性は大きく分けて、一次元的安定性と二次元的安定性の二種類に区別できる。前者は、孤立波の伝播方向のみに依存する擾乱に対する安定性、後者は、孤立波の峰方向にも依存する擾乱に対する安定性のことを指す。平面孤立波の一次元的安定性は、最初、Jeffrey & Kakutani [7] が弱非線形方程式である Korteweg-de Vries (KdV) 方程式を基にした線形解析をおこない、安定であることを示した。一方、その二次元的安定性は、最初、Kadomtsev & Petviashvili [8] によって成された。彼らは、KdV 方程式を二次元版に拡張した Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式を基に、非常に長い波長をもつ峰方向擾乱に対する平面孤立波の線形安定性を調べた。また、任意波長（ただし、長波長近似を用いてスケールリングされた KP 方程式上において任意の波長という意味であり、実際の物理空間上では長波長）の峰方向擾乱に対する線形安定性解析は、Kuznetsov et al.[9] ならびに Alexander et al.[10] らによってそれぞれ独立に成された。その結果、媒質の分散が負の場合、すなわち表面張力や界面張力の影響が小さい重力孤立波は、いずれの上記擾乱に対しても安定であることが示された。ただし、ここで基礎となった方程式には、流体深さと比較して波の振幅が小さいという近似が入っている。したがって、有限振幅の孤立波に対する安定性は、以上の解析結果からは不明である。

有限振幅孤立波の安定性を近似的に調べる一つの手段として、KdV 方程式の非線形項を振幅の任意の関数で置き換えた方程式、いわゆる一般化 KdV 方程式を基に安定性を解析する方法がある[11-15]。この場合、孤立波はその運動量 P_s に対し、

$$\frac{dP_s}{dv} > 0, \quad (1a)$$

$$P_s(v) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_s^2(x; v) dx, \quad (1b)$$

のとき一次元的に安定となる。ここで、 $u = u_s(x - vt; v)$ は孤立波解、 v はその伝播速度を示す。一方、二次元的安定性に関しても、一般化 KP 方程式による安定性解析が最近 Kataoka et al.[16]

によって成された。それによると、条件(1a)を満たす一次元的に安定な孤立波は、

$$\frac{dM_s^2}{dv} \frac{d}{dv} \left(\log \frac{P_s}{|M_s|} \right) > 0 \quad (2a)$$

を満たすとき、非常に長い波長をもつ峰方向擾乱に対しても安定であることが示された。ただし、 M_s は孤立波の質量であり、

$$M_s(v) = \int_{-\infty}^{\infty} u_s(x;v) dx, \quad (2b)$$

により定義される量である。彼らは、一次元的に安定であっても、条件(2a)を満たさないような二次元的に不安定な孤立波解が存在することを示した。この事実を基に、一般の有限振幅孤立波に関しても、二次元的に不安定な孤立波が存在することを予測している。

このように、一般の有限振幅孤立波に対する安定性を解析的に調べるには、上記したような近似的方法に頼らざるを得ない。これは、微小振幅を仮定できないために、波の小さな非線形性と分散性の釣り合いを考慮した時間発展モデル方程式を系統的に導くことができないからである。しかし、密度成層が緩やかかつほぼ一様であるような流体中の波に関しては、その非線形効果は任意の振幅に対して小さくなる[19]。このとき、長波長近似に関連した微小パラメータのみを用いた漸近展開によって、系統的に、有限振幅波に対する時間発展モデル方程式を導出することが可能となる。この導出は、Grimshaw & Yi [19] によって成された。その後、Pelinovsky & Grimshaw [17]は、この強非線形モデル方程式（以下、GY 方程式と記す）を基に、有限振幅内部孤立波の一次元的安定性を線形解析し、一般化 KdV 方程式を基に導かれる安定条件(1a)と全く同一の安定条件を得た。

本研究では、密度成層がほぼ一様な流体中における一次元的に安定な有限振幅内部孤立波を対象とし、非常に長い波長をもつ峰方向擾乱に対するその二次元的安定性を解析する。基礎方程式としては、最近、Kataoka et al.[20]が導出した GY 方程式の二次元版（以下、2dGY 方程式と記す）を用いた。解析方法は、Kadomtsev & Petviashvili [8]らの用いた方法に従い、有限振幅内部孤立波が二次元的に安定であるための条件式を導いた。その結果、一次元的安定性とは異なり、二次元的安定性に関しては、有限振幅に対する安定条件と一般化 KP 方程式を基に得られる安定条件(2a)とが異なることが判明した。これは、二次元的安定性に関して、有限振幅の影響が色濃く現われることを示唆している。いま、導出された条件式のパラメータは、一様密度成層分布からの小さなずれと孤立波の振幅である。そこで、この条件式をある特定の密度成層分布へ適用し、二次元的安定性の振幅への依存性を調べた。その結果、孤立波の振幅が大きくなるに連れて、一般化 KP 方程式から予測される結果よりも、二次元的により不安定な傾向を示すことが明らかとなった。さらに、一次元的に安定であっても、二次元的に不安定性を示す有限振幅内部孤立波が広いパラメータ領域で存在することが確認された。

以下、2 節で、文献[17]に沿って 2dGY 方程式を再導出する。3 節では、孤立波の二次元的安定条件の導出、ならびに得られた安定条件の特定密度成層分布への適用をおこなう。最後に、4 節で結言を述べる。

2. 二次元強非線形モデル方程式（2dGY 方程式）の導出

鉛直鉛直方向深さ h が一定の流路内 ($-\infty < X < \infty$, $-\infty < Y < \infty$, $0 < Z < h$; $X-Y-Z$ は空間三次元直交座標) における非圧縮非粘性非拡散性密度成層流体の空間三次元的振舞を考える (図 1 参照)。このとき、静止状態での流体密度 $\rho_0^*(Z)$ を用いて、流体の浮力振動数 $N^*(Z)$ は、以

$$\eta = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1, \quad (6)$$

である。

いま、 y 方向に関する緩やかな依存性をもって、 x の正方向へ伝播する長波長有限振幅内部波に着目する。このような波の振舞を記述するにあたっては、 x の正方向へ一定速度 c で動く座標系を導入するのが便利である。ただし、 c は長波長極限での線形波の水平方向無次元伝播速度を表す。このとき、この座標系からみた波の時間発展は非常に緩やかになると考えられ、微小パラメータ ε を用いて、以下に示すスケーリングを導入することができる。

$$x^* = \varepsilon(x - ct), \quad y^* = \varepsilon^2 \frac{c}{2^{1/2}} y, \quad t^* = \varepsilon^3 \frac{c^3}{2} t, \quad \beta = \sigma \varepsilon^2 \quad (\sigma = O(1)). \quad (7)$$

これらのスケーリングは、着目している波の非線形効果、 x 方向分散、 y 方向分散効果、ならびに緩やかな時間変化等の釣り合いを考慮することにより決定される。

有限振幅波を対象としているので、 u 、 p 、 η はいずれも $O(1)$ の量である。一方、 V 、 w は、長波長近似によるスケーリング(7)をそれぞれ(3c)、(3a)に代入し、各項の釣り合いを考慮すると、以下のようにスケーリングされることがわかる。

$$V = \varepsilon V^*, \quad w = \varepsilon w^*. \quad (8)$$

結局、(7)、(8)を(3)に代入し、アスタリスクを略すと、有限振幅長波長内部波の振舞を記述する方程式

$$u_x + w_z + \varepsilon^2 \frac{c}{2^{1/2}} V_y = 0, \quad (9a)$$

$$J_1(u, \phi) + \frac{p_x}{\rho_0(z - \eta)} = O(\varepsilon^2), \quad (9b)$$

$$J_1(V, \phi) + \frac{cp_y}{2^{1/2} \rho_0(z - \eta)} = O(\varepsilon^2), \quad (9c)$$

$$J_1\left(q + \frac{\bar{u}}{c^2}, \phi\right) - \left(\zeta - \frac{\bar{u}}{c}\right)_x + \varepsilon^2 F_1 = O(\varepsilon^4), \quad (9d)$$

$$J_1\left(\zeta - \frac{\bar{u}}{c}, \phi\right) + \varepsilon^2 F_2 = 0, \quad (9e)$$

が得られる。ただし、

$$q = u_z - \varepsilon^2 w_x, \quad (9f)$$

$$\phi = -cz + \bar{u}, \quad (9g)$$

$$\bar{u} = \int_0^z u dz', \quad (9h)$$

$$F_1 = \left[\frac{c^3}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + J_2\left(u, \int_0^z V dz'\right) \right]_z - \sigma r, \quad (9i)$$

$$F_2 = \frac{c^3}{2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + J_2\left(\eta - z, \int_0^z V dz'\right), \quad (9j)$$

$$r = R(z - \eta)\eta_x + (1 - \eta_z)J_1(u, \phi), \quad (9k)$$

であり、 $J_1(a, b) = a_x b_z - a_z b_x$ 、 $J_2(a, b) = (a_y b_z - a_z b_y)c/2^{1/2}$ はヤコビアン演算子である。これらの方程式に対する上下境界条件は(6)で与えられる。

いま、これらの方程式系を簡略化して表すため、Warn [21]ならびに Grimshaw & Yi [19]の用い

た方法に従って、変数 z を ϕ に変換する（この変換は空間全体で $\phi_z \neq 0$ を満たす限り有効である）。すると、 $J_1(a, \phi) = \phi_z (\partial a / \partial x)_\phi$ （ただし、 $(\partial / \partial x)_\phi$ は ϕ 、 y 、 t を固定した上での x による偏微分を表す）が成り立つから、(9e)の両辺を $x-\phi$ 平面上での ϕ の等高線に沿って積分することができ、

$$\eta - \frac{\bar{u}}{c} = \varepsilon^2 \left(- \int_{\bar{x}}^x \left[\frac{F_2}{\phi_z} \right]_{\phi=\text{Const.}} dx' + F_3 \right), \quad (10)$$

を得る。ただし、

$$F_3 = \varepsilon^{-2} \left(\zeta - \frac{\bar{u}}{c} \right) \Big|_{x=\bar{x}}, \quad (11)$$

である。ここで、 $\int_{\phi=\text{Const.}} dx'$ は、 $x-\phi$ 平面上での ϕ の等高線に沿っての積分を表す。また $\bar{x} = \bar{x}(x, y, \phi, t)$ は、空間座標 (x, y, ϕ) を始点に ϕ の等高線に沿って x の正方向へ動くとき、最初に上壁 $z=1$ に遭遇する点の x 座標を表す。全く上壁に遭遇しない場合には $\bar{x} = \infty$ となる。したがって $a|_{x=\bar{x}}$ は、 $(x, z) = (\bar{x}, 1)$ もしくは $x = \infty$ における a の値を示す。いま、波群の進行方向遠方において波は存在しないと仮定し、境界条件

$$u, V, w, \zeta \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad x \rightarrow \infty \quad (12)$$

を導入すると、 $\eta - \bar{u}/c$ は常に ε^2 のオーダーである。したがって(11)で定義される F_3 は $O(1)$ の量であることを留意しておく。

式(9d)も同様に ϕ の等高線に沿って積分することができ、(10)を代入すると、鉛直方向変位 η に対する以下の基礎方程式が得られる。

$$\eta_{zz} + \frac{\eta}{c^2} + \varepsilon^2 G[\eta] = O(\varepsilon^4), \quad (13a)$$

ただし、

$$G = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \right) \int_{\bar{x}}^x \left[\frac{F_2}{\phi_z} \right]_{\phi=\text{Const.}} dx' - \frac{w_x}{c} - F_4 \\ + \int_{\bar{x}}^x \left[\frac{1}{c \phi_z} \left\{ F_1 + \frac{\partial}{\partial x'} \int_{\bar{x}}^{x'} \left[\frac{F_2}{\phi_z} \right]_{\phi=\text{Const.}} dx'' \right\} \right]_{\phi=\text{Const.}} dx', \quad (13b)$$

$$F_4 = \int_{\bar{x}}^x \left[\frac{1}{c \phi_z} \frac{\partial F_3}{\partial x'} \right]_{\phi=\text{Const.}} dx' + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \right) F_3 + \frac{1}{c \varepsilon^2} \left(q + \frac{\bar{u}}{c^2} \right) \Big|_{x=\bar{x}}. \quad (13c)$$

この方程式に対する境界条件は、(6)、(12)である。いま、 $\eta - \bar{u}/c$ は $O(\varepsilon^2)$ の量であるため、(9d)、(12)より $q + \bar{u}/c^2$ も $O(\varepsilon^2)$ の量である。したがって、(13c)で定義される F_4 は $O(1)$ の量であることを留意しておく。

上記基礎方程式系を解くため、 η を以下のように漸近展開する。

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon^2 \eta_1 + O(\varepsilon^4). \quad (14)$$

(14)を(13)に代入し、境界条件(6)のもとに解くと、第0次オーダーで、

$$\eta_0 = \pi A(x, y, t) W(z), \quad (15)$$

が得られる。ただし、 $W(z)$ 、 c はそれぞれ第 $n(=1, 2, \dots)$ モードの関数形、ならびに長波長極限での伝播速度

$$W(z) = \sin n\pi z, \quad c = \frac{1}{n\pi}, \quad (16)$$

である。(15)の右辺に現われる $A(x, y, t)$ が波の振幅を代表する変数であり、(3a)-(3c)、(10)、(12)、(15)を用いると、他の物理量 u 、 V 、 w 、 p もこの変数 A によって以下の形で表すことができる。

$$u = \pi c^2 A W_z + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

$$V = \frac{\pi c^3}{2^{1/2}} \int_{\bar{x}}^x \left[\frac{W_z - \pi A/c}{1 - \pi c A W_z} A_y \right]_{\phi=\text{Const.}} dx' + V|_{x=\bar{x}} + O(\varepsilon^2), \quad (18)$$

$$w = -\pi c^2 A_x W + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

$$p = p_0 + \pi c^3 \rho_0(z) A \left(W_z - \frac{\pi}{2c} A \right) + O(\varepsilon^2). \quad (p_0 \text{ は任意定数}) \quad (20)$$

次のオーダーでは、 η_1 に関する非同次境界値問題を構成することができ、この問題に対する適合条件より、

$$\int_0^1 G[\eta_0] W(z) dz = 0, \quad (21)$$

を得る。この条件を $A(x, y, t)$ に関する式で表すことにより、求める時間発展方程式が導かれるのである。いま、(21)を $A(x, y, t)$ で表すにあたっては、以下で定義される変数 ζ を導入すると便利である。

$$\zeta = z - \pi c A(x, y, t) W(z). \quad (22)$$

(9g)、(17)、(22)より $\phi = -c\zeta + O(\varepsilon^2)$ であるから、 z から ϕ への変数変換は、支配オーダーにおいては、 z から ζ への変換に等しいことがわかる。そこで、独立変数として ϕ の代わりに ζ を採用する。すると、流れ場全体で $\bar{x} = \infty$ を満たすため、 $F_3 = F_4 = 0$ となり、適合条件(21)の計算が非常に単純化されるのである。ちなみに z から ζ への変換(22)は、 $\zeta_z \neq 0$ 、すなわち、

$$|A| < \frac{1}{\pi}, \quad (23)$$

である限り有効である。この条件(23)は、支配オーダーにおいて z 方向密度勾配が場全体で負となること、つまりは、流れ場全体が静的安定であることを要求している。

以上のことを踏まえて、(13b)を適合条件(21)に代入し、さらに(9i)、(9j)、(15)-(19)を用いると、複雑な計算を経て、結局、以下に示す時間発展方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x K(A, A') \frac{\partial A'}{\partial t} dx' + f(A) + A_{xx} \\ + \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x'} (I_1 A_{yy}'' + I_2 A_y''^2 + I_3 A_y' A_y'') dx'' dx' = 0, \end{aligned} \quad (24a)$$

ここで、 $f(A)$ は A に関する非線形関数であり、

$$f(A) = 2\pi\sigma \left\{ \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^1 A W \frac{\partial z}{\partial A} R(\zeta) d\zeta + \frac{A^2}{6} [1 - (-1)^n] \right\}, \quad (24b)$$

と表され、一様な密度成層分布からのずれ $R(z)$ 、ならびにモード番号 n の偶奇数に依存する。カーネル K 、 I_1 、 I_2 、 I_3 は、

$$K(A, A') = \frac{1}{\pi^2 c^2} \int_0^1 \left[\frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial z'}{\partial A'} \left(1 + \frac{\partial z'}{\partial \zeta} \right) - (z - z') \frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial^2 z'}{\partial \zeta \partial A'} \right] d\zeta, \quad (24c)$$

$$I_1 = I_1(A, A', A'') = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-2} \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial A} \frac{\partial z'}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z''}{\partial \zeta} \right)^{-2} \frac{\partial^2 z''}{\partial \zeta \partial A''} d\zeta, \quad (24d)$$

$$I_2 = I_2(A, A', A'') \\ = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-2} \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial A} \frac{\partial z'}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z''}{\partial \zeta} \right)^{-2} \left[2 \left(\frac{\partial z''}{\partial \zeta} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 z''}{\partial \zeta \partial A''} \right)^2 - \frac{\partial^3 z''}{\partial \zeta \partial A''^2} \right] d\zeta, \quad (24e)$$

$$I_3 = I_3(A, A', A'') \\ = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial A} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-2} + \left(\frac{\partial z'}{\partial \zeta} \right)^{-2} \right] \frac{\partial^2 z'}{\partial \zeta \partial A'} \left(\frac{\partial z''}{\partial \zeta} \right)^{-2} \frac{\partial^2 z''}{\partial \zeta \partial A''} d\zeta, \quad (24f)$$

と表され、いずれも密度成層分布のずれ $R(z)$ やモード番号 n には依存しない。ここで、 $z' = z(\zeta, A')$ 、 $z'' = z(\zeta, A'')$ 、 $A' = A(x', y, t)$ 、 $A'' = A(x'', y, t)$ であり、 $\partial z / \partial \zeta$ 、 $\partial z / \partial A$ 、 $\partial^2 z / \partial \zeta \partial A$ ならびに $\partial^3 z / \partial \zeta \partial A^2$ は以下の形で表される。

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{1}{1 - \pi c A W_z}, \quad (24g)$$

$$\frac{\partial z}{\partial A} = \frac{\pi c W}{1 - \pi c A W_z}, \quad (24h)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial A} = \frac{\pi c W_z - \pi^2 A}{(1 - \pi c A W_z)^3}, \quad (24i)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \zeta \partial A^2} = \frac{3(\pi c W_z - \pi^2 A)^2}{(1 - \pi c A W_z)^5} - \frac{\pi^2(1 + W^2 - \pi c A W_z)}{(1 - \pi c A W_z)^4}. \quad (24j)$$

(24a)が求める 2dGY 方程式であり、左辺第四項の二重積分で表される項が、波の y 方向分散効果を表す項である。 y 方向依存性がないとき、この項は消えて、(24a)は一次元強非線形モデル方程式 (GY 方程式) と一致する。

いま、導出した 2dGY 方程式(24a)に関する特徴を述べる。左辺に含まれるカーネル K ならびに I_1 、 I_2 、 I_3 に関して以下の関係式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^x K(A, A') \frac{\partial A'}{\partial x'} dx' = A, \quad (25a)$$

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x'} \left[I_1 \frac{\partial^2 A''}{\partial x''^2} + I_2 \left(\frac{\partial A''}{\partial x''} \right)^2 + I_3 \frac{\partial A'}{\partial x'} \frac{\partial A''}{\partial x''} \right] dx'' dx' = \frac{A}{2}. \quad (25b)$$

したがって、解として定常的に伝播する波 $A = A(kx + ly - \omega t)$ を仮定すると、2dGY 方程式(24a)は、一般化 KdV 方程式の定常版

$$\left(-\frac{\omega}{k} + \frac{l^2}{2k^2} \right) A + f(A) + A_{xx} = 0, \quad (26)$$

へと帰着する。また、非線形関数 $f(A)$ を適当な形で仮定すれば、 y 方向にも依存して伝播する定常周期波解ならびに平面孤立波解を陽に表すことができる。例えば、非線形関数が $f(A) = 3\alpha A^2$ のとき、平面孤立波解は以下の形で表される。

$$A = a \operatorname{sech}^2(kx + ly - \omega t), \quad (27a)$$

$$\frac{\omega}{2k} - \frac{l^2}{4k^2} = \alpha\alpha = 2k^2, \quad (27b)$$

最後に、弱非線形近似 $A \rightarrow 0$ を考える。このときカーネル K 、 I_1 、 I_2 、 I_3 は、

$$K(A, A') = 1 - \frac{\pi^2}{4}(3A^2 - 8AA' + 3A'^2) + \dots, \quad (28a)$$

$$I_1(A, A', A'') = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}(9A^2 + 4AA' - 24AA'' - 4A'^2 + 4A'A'' + 9A''^2) + \dots, \quad (28b)$$

$$I_2(A, A', A'') = \frac{\pi}{8}(12A - 2A' - 9A'') + \dots, \quad (28c)$$

$$I_3(A, A', A'') = \frac{\pi}{4}(A + A' - 2A'') + \dots, \quad (28d)$$

と展開される。(28)を(24a)に代入し、 $O(A^2)$ まで考慮すると、KP 方程式

$$A_t + \alpha_1 A_x + 2\alpha_2 AA_x + A_{xxx} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x A'_{yy} dx' = 0, \quad (29)$$

と一致する。ただし α_1 、 α_2 は、それぞれ(24c)で表される非線形関数を $f(A) = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots$ と置いたときの定数係数である。

3. 有限振幅内部孤立波の二次元的安定性解析

この節では、一次元的に安定な有限振幅平面内部孤立波を対象とし、その峰 (y) 方向擾乱に対する二次元的安定性を 2dGY 方程式(24a)を基に線形解析する。ただし、擾乱は y 方向に関して非常に緩やかに変化するものと仮定する。基本的な解析法は Kadomtsev & Petviashvili [8]([16]も参照)に従う。すなわち、2dGY 方程式から、擾乱の影響を受けてゆるやかに時間発展する孤立波の振舞を記述する方程式を導出する (3.1 項)。そして、この時間発展方程式を基に線形安定解析をおこない、孤立波の二次元的安定条件を導く (3.2 項)。最後に、安定条件を特定密度成層分布へ適用し、有限振幅内部孤立波の二次元的安定性に関する考察をおこなう (3.3 項)。

3.1. 孤立波に対する時間発展方程式の導出

GY 方程式が、 x の正方向へ一定速度 v で伝播する一次元的に安定な平面孤立波解 $A = u_s(x - vt; v)$ をもつものと仮定する。この孤立波が、峰(y)方向に関して非常に緩やかな変化を伴う擾乱の影響により、時間的にゆっくりとした変化を受ける場合を考える。このとき、孤立波の時間発展は、以下のような漸近展開を導入して記述することができる。

$$A = u_s(\xi; v) + u_1(\xi, y, t) + u_2(\xi, y, t) + \dots \quad (u_s \gg u_1 \gg u_2 \dots), \quad (30a)$$

ただし、

$$\xi = x - \int_0^t v(y, t') dt', \quad (30b)$$

は孤立波の位相を表し、擾乱の影響は伝播速度 $v(y, t)$ に含まれている。ここでは、微小パラメータを陽には導入していないが、時間微分ならびに y 方向微分は $O(1)$ よりも小さく、時間積分は $O(1)$ よりも大きいものと仮定する。さらに、擾乱の振幅が微小であると考え、伝播速度のずれを表す量に関して線形近似を施す。すなわち、 $\partial v / \partial y$ 、 $\partial v / \partial t$ 、 $\int_0^t \partial v / \partial y dt'$ 等で表される量の非

線形項は無視するものとする。

(30a)を(24a)に代入すると、第0次オーダーでは、孤立波解 u_s に対する方程式

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial \xi^2} + f(u_s) - v u_s = 0, \quad (31)$$

が得られる。ここでは、(31)が、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ において $u_s \rightarrow 0$ を満たすような定常孤立波解をもつと仮定する。このような解の存在条件に関しては、[17]の式(25)、ならびに[12]の式(C.1)、(C.2)を参照されたい。

より高次のオーダーにおいては、 u_n ($n=1, 2, \dots$) に対する線形非同次方程式が以下の形で得られる。

$$\mathbf{L} u_n = H_n(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \quad (32a)$$

ここで、 $\mathbf{L}$ は線形演算子であり、

$$\mathbf{L} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + f'(u_0) - v \quad \left(f'(u) = \frac{df}{du} \right), \quad (32b)$$

と定義される。(32a)右辺の非同次項 H_n は、低次オーダーの解 $u_0, \dots, u_{n-1}$ により表すことができる。以降の解析上、 H_1 、 H_2 に関してはそれを陽に表しておくのが便利である。

$$H_1 = -\frac{\partial v}{\partial t} \int_{-\infty}^{\xi} K(u_s, u'_s) \frac{\partial u'_s}{\partial v} d\xi' + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dt' \int_{-\infty}^{\xi} I_{11}(u_s, u'_s) u'_s d\xi', \quad (33a)$$

$$H_2 = -\int_{-\infty}^{\xi} K(u_s, u'_s) \frac{\partial u'_s}{\partial t} d\xi' - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi'} I_1(u_s, u'_s, u''_s) \frac{\partial u''_s}{\partial v} d\xi'' d\xi'. \quad (33b)$$

ただし、

$$I_{11}(A, A') = \frac{c_n}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-2} \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial A} \frac{\partial z'}{\partial \zeta} \frac{dW'}{dz'} d\zeta, \quad (33c)$$

であり、 $u'_s = u_s(\xi'; v)$ 、 $u'_1 = u_1(\xi', y, t)$ 、 $W' = W(z')$ である。

式(32a)が $\xi \rightarrow \pm\infty$ において発散しない有限な解をもつためには、以下に示す適合条件を満たす必要がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_s}{\partial \xi}(\xi; v) H_n(u_s, u_1, \dots, u_{n-1}) d\xi = 0. \quad (34)$$

この条件を $v(y, t)$ に関する式で表すことにより、求める時間発展方程式が導かれるのである。

$n=1$ のとき(33a)を(34)に代入し、関係式 $K(A, A') = K(A', A)$ ならびに $\int_{-\infty}^{\xi} K(A, A') (\partial A' / \partial \xi') d\xi' = A$ を用いると、

$$\frac{dP_s}{dv} \frac{\partial v}{\partial t} - P_s \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dt' = 0, \quad (35)$$

が得られる。ただし、 P_s は(1b)で定義した孤立波の運動量である。(35)は、第一次近似における孤立波の時間発展方程式であり、この近似オーダーでは一般化 KP 方程式を基にした解析[16]によっても同一の式が得られる。この式を満たすとき、 u_1 は、指数関数的に発散する項をもたない。ただし、 $\xi \rightarrow -\infty$ にまで及ぶ振幅一定の放射擾乱を孤立波の後方に形成する。その振幅は、 $n=1$ における式(32a)の両辺に、 $\xi = -\infty$ を代入することによって得られる。

$$u_1|_{\xi \rightarrow \infty} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} \left[-\frac{d\tilde{M}_s}{dv} + \frac{1}{P_s} \frac{dP_s}{dv} \int_{-\infty}^{\infty} I_{11}(0, u_s) u_s d\xi \right]. \quad (36)$$

ただし(36)を導く際、(35)を用いた。また、 $\tilde{M}_s$ は有限振幅孤立波の質量を表し、

$$\tilde{M}_s(v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{u_s} K(0, u) du, \quad (37)$$

により定義される量である[17]。

いま、第一次近似の放射条件(35)に関して、 $dP_s/dv > 0$ であることに注意すると、このオーダーで孤立波は中立状態にあり、その安定性を知るためには次のオーダーまで調べる必要があることがわかる。第二次近似までの時間発展方程式は、 $n=1$ と $n=2$ に対する適合条件(34)を組み合わせるにより得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_s}{\partial \xi} (H_1 + H_2) d\xi = 0. \quad (38)$$

ただし、この条件式を $v(y, t)$ に関して陽に表すためには、 u_1 を評価する必要がある。ここでは、 u_1 をその偶関数成分(u_{1ev})と奇関数成分(u_{1od})の和で表すのが便利である。

$$u_1 = u_{1ev} + u_{1od}. \quad (39)$$

それぞれの成分 u_{1ev} ならびに u_{1od} に対する支配方程式は、 $n=1$ における式(32a)から得ることができる。ここでは、後の解析において必要となる u_{1ev} に対する式のみを示す。

$$\mathbf{L}u_{1ev} = \frac{\partial v}{\partial t} \int_0^{\infty} K(u_s, u'_s) \frac{\partial u'_s}{\partial v} d\xi' - \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dt' \int_0^{\infty} I_{11}(u_s, u'_s) u'_s d\xi'. \quad (40)$$

すると、適合条件(38)の左辺に現われる u_1 を含む項 $-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_s}{\partial \xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K(u_s, u'_s) \frac{\partial u'_s}{\partial t} d\xi' = \int_{-\infty}^{\infty} u_s \frac{\partial u_{1ev}}{\partial t} d\xi$ を、以下の手順で $v(y, t)$ により表すことができる。まず、(31)を v で微分することにより得られる式

$$\mathbf{L} \frac{\partial u_s}{\partial v} = u_s, \quad (41)$$

に着目する。次に、(40)の両辺に $\partial u_0 / \partial v$ をかけて ξ で積分すると、(41)を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_s u_{1ev} d\xi = \frac{1}{2} \left(K_s - \frac{I_s}{P_s} \frac{dP_s}{dv} \right) \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (42)$$

が得られるのである。ただし、

$$K_s(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u_s, u'_s) \frac{\partial u_s}{\partial v} \frac{\partial u'_s}{\partial v} d\xi' d\xi, \quad (43a)$$

$$I_s(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{11}(u_s, u'_s) \frac{\partial u_s}{\partial v} u'_s d\xi' d\xi, \quad (43b)$$

である。結局、(42)を用いて適合条件(38)を $v(y, t)$ で表すと、求める第二次近似までの時間発展方程式

$$\frac{dP_s}{dv} \frac{\partial v}{\partial t} - P_s \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dt' - Q_s \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (44)$$

が導かれる。ただし、

$$Q_s(v) = I_s - \frac{K_s P_s}{2} \left(\frac{dP_s}{dv} \right)^{-1}, \quad (45)$$

であり、(44)を導く際、第一次近似の式(35)を用いた。

3.2. 二次元的線形安定解析

孤立波の線形安定性解析をおこなうため、 $v(y, t)$ を孤立波自身の一定伝播速度 v_s とそこからのずれとの和により、

$$v = v_s + v_1 \exp(\lambda t + i\tilde{\varepsilon} y), \quad (46)$$

と表す。ここで、 v_s 、 λ は複素数、 $\tilde{\varepsilon}$ は実数であり、いずれも微小値をとるものとする。(46)を $v(y, t)$ に対する時間発展方程式(44)に代入し、 v_1 に関して線形化すると、固有値 λ に対する以下の代数方程式が得られる。

$$\lambda^2 + \frac{\tilde{\varepsilon}^2 Q_s}{dP_s/dv} \bigg|_{v=v_s} \lambda + \frac{\tilde{\varepsilon}^2 P_s}{dP_s/dv} \bigg|_{v=v_s} = 0. \quad (47)$$

いま、一次元的に安定な孤立波を対象としていることを考慮すると、 $dP_s/dv|_{v=v_s} > 0$ であるから、(47)より孤立波は、

$$Q_s(v_s) > 0, \quad (48)$$

のとき二次元的にも安定であることがわかる。条件式(48)が本研究の主要な結果である。この条件が満たされないとき、孤立波は二次元的に不安定であり、擾乱の成長率($= \text{Re}[\lambda]$)は $O(\tilde{\varepsilon}^2)$ で表される。一次元的安定性とは異なり、二次元的安定性に関しては、有限振幅に対する安定条件(48)が、一般化 KP 方程式を基に得られる安定条件(2a)とは異なることに留意されたい。ただし弱非線形極限 $v_s \rightarrow 0$ においては、(48)は後者の安定条件式と一致する。

3.3 特定の密度成層分布への適用

ここでは、二次元的安定条件(48)を、ある特定の密度成層分布に適用する。そこで、一様な密度成層分布からのずれ $R(z)$ が

$$R(z) = r_1 z + r_2 z^2, \quad (49)$$

の形で表される場合を考える。いま、(24c)-(24f)で表される 2dGY 方程式内のカーネル K 、 I_1 、 I_2 、 I_3 は、一様密度成層分布によって支持される三角関数形のモード形のみに依存する。しかし、(24b)で表される非線形関数 $f(A)$ は、その形が一様な密度成層分布からのずれ $R(z)$ に大きく依存する。いまの場合、(49)で表される $R(z)$ に対応して、 $f(A)$ は、以下の形で表される。

$$f(A) = f_2 A^2 + f_3 A^3. \quad (50a)$$

ただし、

$$f_2 = \frac{\pi}{3} \sigma \{ [1 - 4m_1] [1 - (-1)^n] + 8(-1)^n m_2 \}, \quad (50b)$$

$$f_3 = \frac{3\pi^2}{4} \sigma m_2, \quad (50c)$$

である。ここで、(50a)において、 A に比例する項は、長波長極限での伝播速度 c の再定義により消去することができるため省いた。

(50a)で表される非線形関数 $f(A)$ は、 t 、 x 、 y に関する簡単な変数変換を経て、より簡単に、

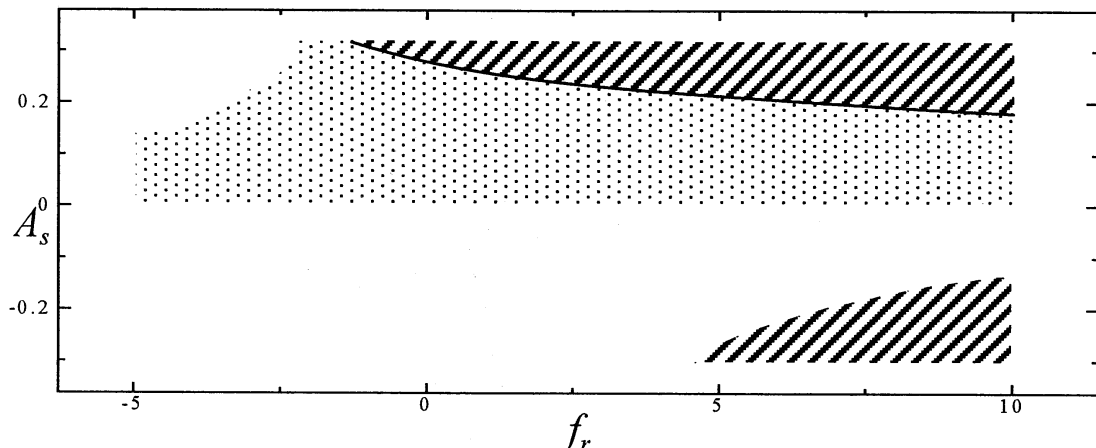


図2 有限振幅孤立波(52a)の二次元的安定領域。点領域：安定、斜線領域：不安定

$$f(A) = A^2 + f_r A^3, \quad (51a)$$

と表される。ただし、

$$f_r = \frac{f_3}{f_2}, \quad (51b)$$

である。このとき、2dGY 方程式(24a)、ならびに孤立波に対する方程式(31)は、以下の孤立波解をもつ。

$$u_s = \frac{A_s(2 + 3f_r A_s/2)}{(1 + 3f_r A_s/2) \cosh(v^{1/2} \xi) + 1}. \quad (52a)$$

ただし、 A_s は孤立波の最大振幅であり、伝播速度 v は A_s を用いて、

$$v = A_s \left(\frac{2}{3} + \frac{f_r}{2} A_s \right), \quad (52b)$$

と表される。この孤立波の存在範囲は、 $f_r > 0$ のときは $A_s < -4/(3f_r)$ と $A_s > 0$ の範囲で表され、 $f_r < 0$ のときは $0 < A_s < -2/(3f_r)$ の範囲で表される。この孤立波は、条件式(1a)を適用すると、一次元的には常に安定であることがわかる。いま、この孤立波の二次元的安定性に関して、安定条件(48)を適用した結果を図2に示した。横軸に f_r 、縦軸に A_s をとっており、2dGY 方程式(24a)の有効条件(23)を考慮して、 $|A_s| < 1/\pi$ の範囲内の結果を示してある。ちなみに、 $|A_s| > 1/\pi$ においては密度勾配が正となる部分が現われ、このとき孤立波は常に静的不安定である。

図2より、孤立波の振幅 $|A_s|$ の大きい部分で、二次元的に不安定な孤立波が比較的広いパラメータ領域で存在することがわかる。特に、 $A_s < -2/(3f_r)$ を満たす孤立波は常に不安定であった。非線形関数が(51a)で与えられるとき、一般化 KP 方程式も同様に(52a)で表される孤立波解をもつ。そこで、一般化 KP 方程式を基にした二次元的安定条件(2a)を適用すると、 $A_s > 0$ の範囲では常に安定、 $A_s < -2/(3f_r)$ の範囲では常に不安定という結果が得られた。したがって、 $A_s > 0$ の範囲において、孤立波の振幅が有限の値をもつことで、一般化 KP 方程式からは予測できない新たな不安定性が生じているといえる。

次に、非線形関数 $f(A)$ を、power-like nonlinearity と呼ばれる最も単純な形

$$f(A) = \frac{p+2}{2} A^{p+1}, \quad (53)$$

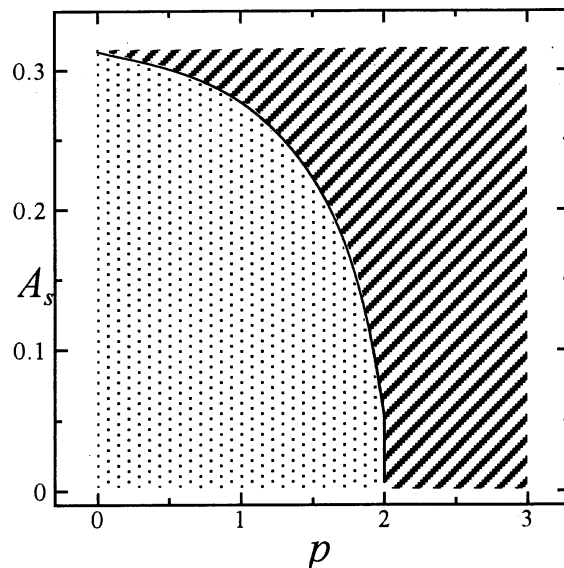


図3 有限振幅孤立波(54a)の二次元的安定領域。点領域：安定、斜線領域：不安定

で仮定する。ただし、 p は正の実数である。また、 A^{p+1} の係数は、 t 、 x 、 y に対する簡単な変数変換により、任意定数を与えられることに留意されたい。このとき、(24a)ならびに(31)は、以下の孤立波解をもつ。

$$u_s = A_s \operatorname{sech}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{pv^{1/2}}{2} \xi \right). \quad (54a)$$

このとき、伝播速度 v は最大振幅 A_s を用いて、

$$v = A_s^p, \quad (54b)$$

と表される。この孤立波の存在範囲は、 $A_s > 0$ であり、条件式(1a)を適用すると、 A_s の値に関わらず、 $p \geq 4$ のとき一次元的に不安定であることがわかる。図3に、二次元的安定条件式(48)を適用した結果を示した。縦軸に A_s 、横軸に p をとってある。

図は $p < 3$ の範囲しか示していないが、 $2 < p < 4$ ではあらゆる振幅 A_s に対して不安定性を示した。すなわち、二次元的に不安定な孤立波がかなり広いパラメータ領域で存在することがわかる。いま、非線形関数が(53)で与えられるとき、一般化 KP 方程式も同様に(54a)で表される孤立波解をもつ。そこで、一般化 KP 方程式を基にした二次元的安定条件(2a)を適用すると、振幅 A_s に依存せず、 $2 < p < 4$ において不安定であるという結果が得られる[16]。一方、図3によると、 A_s が p に依存したある臨界値以上の値をとると、 $p < 2$ の範囲においても二次元的な不安定性を示す領域が存在することがわかる。したがって、この例の場合も先程の例と同様、振幅が大きいところで、一般化 KP 方程式からは予測できない不安定性が生じているといえる。これは、有限振幅に対する安定条件(48)と、一般化 KP 方程式を基に得られる安定条件(2a)が異なることに起因する。

4. 結言

緩やかにかつほぼ一様に密度成層した流体中における有限振幅長波長内部孤立波を対象とし、非常に長い波長をもつ峰方向擾乱に対する（二次元的）安定性を調べた。基礎方程式として二次元強非線形モデル方程式（2dGY 方程式）を採用し、Kadomtsev & Petviashvili [8]らが用いた方法に従って線形安定解析をおこなった。その結果、ほぼ一様に密度成層した流体中における有限振幅内部孤立波に関して、特に以下の三点が明らかとなった。

- その二次元的安定条件は、一般化 KP 方程式を基に得られる安定条件とは異なる。
- その振幅が大きくなるに連れて、一般化 KP 方程式から予測される結果よりも、二次元的により不安定な傾向を示す
- この内部孤立波は、一様な密度成層分布からのずれと孤立波の振幅をパラメータとして特徴づけることができ、一次元的に安定であっても、二次元的に不安定な孤立波が広いパラメータ領域で存在する。

以上の結果は、ほぼ一様に密度成層した流体中での内部孤立波に対してであり、水面孤立波や任意密度成層流体中の内部孤立波に対してそのまま適用することはできない。しかし、上記三番目の結論に関しては、比較的広いパラメータ領域で起きているため、他の有限振幅孤立波に対しても起こり得る可能性は否定できない。実際、過去の有限振幅平面孤立波の安定性に関する研究は一次元的安定性のみであり、二次元的安定性に関しては一切調べられていない。この研究に関しては、今後の研究が待たれるところである。その第一歩として、現在我々は、有限振幅水面孤立波の二次元的安定性を数値的に調べているところである。

参考文献

- [1] J.A. Gear and R. Grimshaw, *Stud. Appl. Math.* **70**, 235 (1984).
- [2] H. Tsuji and M. Oikawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62**, 3881 (1993).
- [3] R. Grimshaw and Y. Zhu, *Stud. Appl. Math.* **92**, 249 (1994).
- [4] Y. Matsuno, *Proc. R. Soc. Lond. A* **454**, 835 (1998).
- [5] R.H.J. Grimshaw and N. Smith, *J. Fluid Mech.* **169**, 429 (1986).
- [6] H. Hanazaki, *J. Fluid Mech.* **263**, 293 (1994).
- [7] A. Jeffrey and T. Kakutani, *Indiana Univ. Math. J.*, **20**, 463 (1970).
- [8] B.B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili, *Sov. Phys. Dokl.* **15**, 539 (1970).
- [9] E.A. Kuznetsov, M.D. Spector, and G.E. Fal'kovich, *Physica D* **10**, 379 (1984).
- [10] J.C. Alexander, R.L. Pego, and R.L. Sachs, *Phys. Lett. A* **226**, 187 (1997).
- [11] D.E. Pelinovsky and R.H.J. Grimshaw, *Physica D* **98**, 139 (1996).
- [12] M.I. Weinstein, *Comm. Pure Appl. Math.* **39**, 51 (1986).
- [13] E.A. Kuznetsov, *Phys. Lett. A* **101**, 314 (1984).
- [14] J.L. Bona, P.E. Souganidis, and W.A. Strauss, *Proc. R. Soc. Lond. A* **411**, 395 (1987).
- [15] R.L. Pego and M.I. Weinstein, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **340**, 47 (1992).
- [16] T. Kataoka, M. Tsutahara, and Y. Negoro, in preparation.
- [17] D.E. Pelinovsky and R.H.J. Grimshaw, *Phys. Fluids* **9**, 3343 (1997).
- [18] J.L. Bona, V.A. Dougalis, O.A. Karakashian, and W.R. McKinney, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **351**, 107 (1995).
- [19] R. Grimshaw and Z. Yi, *J. Fluid Mech.* **229**, 603 (1991).
- [20] T. Kataoka, M. Tsutahara, and T. Akuzawa, in preparation.
- [21] T. Warn, *Stud. Appl. Math.* **69**, 127 (1983).
- [22] M. Tanaka, *Phys. Fluids* **29**, 650 (1986).