

C_p modulo の Fuglede-Putnam の定理について

北海道教育大 大久保 和義

1. $\mathcal{H}$ を可分なヒルベルト空間として、 $B(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素環を表わすものとする。以下で、 $A, B, C, \dots$, は $B(\mathcal{H})$ の元を表わす。又、 $p > 0$ として $B(\mathcal{H})$ の部分集合 C_p を Schatten の p -class (i.e. $T \in C_p$ とは $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^p < \infty$, ただし $\mu_n \in \sigma_p((T^*T)^{1/2})$) とする。特に C_1 を trace class ($\|\cdot\|_1$ を trace norm), C_2 を Hilbert-Schmidt class ($\|\cdot\|_2$ を H-S norm) とする。1950年に Fuglede は N が normal として $NX = XN$ が成立するときに $N^*X = XN^*$ が成り立つことを示し、さらに翌年 Putnam が N_1, N_2 を normal として、 $N_1X = XN_2$ が成立するときに $N_1^*X = XN_2^*$ が成り立つことを示した。

次に $\mathcal{I}$ を $B(\mathcal{H})$ の norm ideal とするとき、最近、G. Weiss は Fuglede-Putnam の定理を、 N_1, N_2

が normal で

$$N_1 X - X N_2 \in \mathcal{Q} \implies N_1^* X - X N_2^* \in \mathcal{Q} \dots (*)$$

となるような $\mathcal{Q}$ はどのようなものか ということの問題にした。 $(*)$ は Fuglede の定理を Putnam が拡張したと同様な方法で、 N を normal としたとき

$$NX - XN \in \mathcal{Q} \implies N^*X - XN^* \in \mathcal{Q} \dots (*')$$

ということと同値であることが容易にわかり、以後は $(*)'$ の方を考えていく。

2. まず、 $\mathcal{Q} = \{0\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は compact operators 全体の集合) とするとき $(*)'$ が成立することは容易である。又 $\mathcal{Q} = \mathcal{F}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{H})$ は finite rank operators 全体の集合) とするとき $(*)'$ は必ずしも成立しない。これは次のようにしてわかる。

$D_1, D_2 \in C_1$ は diagonal, $X_1 \in C_2$ で $X, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ を $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$DX - XD = \begin{pmatrix} 0 & D_1 X_1 - X_1 D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^*X - XD^* = \begin{pmatrix} 0 & D_1^* X_1 - X_1 D_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で、 $\text{rank}(DX - XD) = 1$, $\text{rank}(D^*X - XD^*) = \infty$

となるように D_1, D_2, X_1 を構成する。 D_1, D_2, X_1 を行列表示して、

$$D_1 = \text{diag} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \right)$$

$$D_2 = \text{diag} (z_1, z_2, z_3, \dots)$$

$$X_1 = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \text{ で } x_{ij} = 4^{-(i+j)} (z^{-i} - z_j)^{-1} \text{ とする。}$$

今 (z_j) を

$$\textcircled{1} \quad z_j \in P_1 \quad (P_1 \text{ は closed left half plane})$$

[これは $X_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の十分条件]

$$\textcircled{2} \quad |z_j| < 2^{-j} \quad [\text{これは } D_2 \in C_1 \text{ の十分条件}]$$

となるようにとる。このとき $(D_1 X_1 - X_1 D_2)_{ij} = 4^{-(i+j)}$

となり $\text{rank} (D_1 X_1 - X_1 D_2) = 1$ がわかる。

$$\text{一方, } (D_1^* X_1 - X_1 D_2^*)_{ij} = 4^{-(i+j)} (z^{-i} - \bar{z}_j) / (z^{-i} - z_j)$$

で $\text{rank} (D_1^* X_1 - X_1 D_2^*) = \infty$ なるように (z_j) のとり方にさらに制限をつける。即ち、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$x_j = (4^{-(i+j)} (z^{-i} - \bar{z}_j) / (z^{-i} - z_j))_{i=1}^{\infty} \quad (1 \leq j \leq N)$$

は $D_1^* X_1 - X_1 D_2^*$ の像に入るから、これらの vectors が 1 次独立になるようにする。即ち、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det ((4^{-(i+j)} (z^{-i} - \bar{z}_j) / (z^{-i} - z_j))_{i,j=1}^N) \neq 0$$

なるように (z_j) をとる。実際に帰納法で $(z_j)_{j=1}^N$ までは条件にあうようにとれたとすると

$$f(z_{N+1}, \bar{z}_{N+1}) = \det ((4^{-(i+j)} (z^{-i} - \bar{z}_j) / (z^{-i} - z_j))_{i,j=1}^{N+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} (-1)^{N+1-i} D_i 4^{-(i+N+1)} (z^{-i} - \bar{z}_{N+1}) / (z^{-i} - z_{N+1})$$

(D_i は $(i, N+1)$ における小行列式)

で $f(z_{N+1}, \bar{z}_{N+1})$ が $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の条件をみたす z_{N+1} で常に 0

とすると $D_{n+1} \neq 0$ (帰納法の仮定) に反することがわかる。

3. 次に $\mathcal{Q} = C_p$ の場合を考える。

D. Voiculescu [3] は、次の定理を示した。

[定理 1] N を normal とするとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、diagonal D と unitary U が存在して、
 $N - U D U^* \in C_2$ かつ $\|N - U D U^*\|_2 < \varepsilon$ とできる。
 証明は [5] で紹介してある。

G. Weiss は [4] で $\mathcal{Q} = C_2$ のとき次の定理を示した。
 証明は generating function を用いてなされているが
 ここでは 定理 1 の結果を用いて示す。

[定理 2] N を normal, X を任意の operator とするとき

$$\|NX - XN\|_2 = \|N^*X - XN^*\|_2 \quad \text{が成立.}$$

証明. 定理 1 より diagonal D_n と Unitary U_n が存在して、
 $N - U_n D_n U_n^* \in C_2$, かつ

$$\|N - U_n D_n U_n^*\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{とできる.}$$

$$\begin{aligned} \text{今 } & \left| \|NX - XN\|_2 - \|U_n D_n U_n^* X - X U_n D_n U_n^*\|_2 \right| \\ & \leq \| (N - U_n D_n U_n^*) X - X (N - U_n D_n U_n^*) \|_2 \\ & \leq 2 \|N - U_n D_n U_n^*\|_2 \cdot \|X\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \|U_n D_n U_n^* X - X U_n D_n U_n^*\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|NX - XN\|_2$$

がわかる。一方 D を diagonal とするとき, 任意の $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対し

$\|DY - YD\|_2 = \|D^*Y - YD^*\|_2$ は容易に示されるから

$$\begin{aligned} & \|U_n D_n U_n^* X - X U_n D_n U_n^*\|_2 \\ &= \|D_n (U_n^* X U_n) - (U_n^* X U_n) D_n\|_2 \\ &= \|D_n^* (U_n^* X U_n) - (U_n^* X U_n) D_n^*\|_2 \\ &= \|U_n D_n^* U_n^* X - X U_n D_n^* U_n^*\|_2 \\ &\longrightarrow \|N^* X - X N^*\|_2 \quad \text{がわかる。} \end{aligned}$$

よって定理は成立する。

又 $0 < p < 1$ のとき $\mathcal{Q} = \mathcal{C}_p$ とすると $(*)'$ は必ずしも成立しないことがわかっている。

4. 次に $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の norm ideal とするとき, $N \in \mathcal{Q}$ を modulo とする normal (即ち $NN^* - N^*N \in \mathcal{Q}$) のとき

$$NX - XN \in \mathcal{Q} \implies N^*X - XN^* \in \mathcal{Q}$$

が, 1 かなる $\mathcal{Q}$ で成立するかという問題が考えられる。

これに関しては, $\mathcal{H}$ の orthonormal basis を $(e_j)_{j=1}^\infty$ として $Se_i = e_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots$) (S : unilateral shift operator) とする。このとき $S^*S - SS^* = P_1$ (P_1 は e_1 で generate される subspace 上の projection)。

[Proposition 3] S is unilateral shift,
 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする

$$SX - XS \in C_2 \implies S^*X - XS^* \in C_2$$

証明. $X = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, $SX - XS = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$,
 $S^*X - XS^* = (b_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ と行列表示をする.

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{i,j+1} & (i=1) \\ x_{i-1,j} - x_{i,j+1} & (i \geq 2) \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} x_{i+1,1} & (j=1) \\ x_{i+1,j} - x_{i,j-1} & (j \geq 2) \end{cases} \quad \text{とある}$$

よって

$$\|SX - XS\|_2^2 = \sum_{j \geq 1} |x_{1,j+1}|^2 + \sum_{\substack{i \geq 2 \\ j \geq 1}} |x_{i-1,j} - x_{i,j+1}|^2$$

又

$$\begin{aligned} \|S^*X - XS^*\|_2^2 &= \sum_{i \geq 1} |x_{i+1,1}|^2 + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 2}} |x_{i+1,j} - x_{i,j-1}|^2 \\ &= \sum_{i \geq 1} |x_{i+1,1}|^2 + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 1}} |x_{i,j} - x_{i+1,j+1}|^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i \geq 1} |x_{i+1,1}|^2 \leq \sum_{i \geq 1} |x_{i,1}|^2 = \|X^*e_1\|^2 < \infty \quad \text{より}$$

$$SX - XS \in C_2 \implies S^*X - XS^* \in C_2 \quad \text{がわかる.}$$

5. 次に $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ のとき, $p \geq 1$ とした

$$\text{とき} \quad \sup \left\{ \frac{\|D^*X - XD^*\|_p}{\|DX - XD\|_p} \mid D, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad D: \text{diagonal} \right\}$$

の値が n, p の函数として求められるかどうか問題が考

えらけるが $n=3$, $p \geq 1$ に関しは次のことがいえる.

[Proposition 4] $\dim \mathcal{H} = 3$ とする. 又 $p \geq 1$ とする.

$D \in \text{diagonal}$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とすると

$$\|DX - XD\|_p = \|D^*X - XD^*\|_p$$

証明. $D = \text{diag}(d_i)$, $X = (x_{ij})_{i,j=1}^3$ とする.

このとき

$$DX - XD = ((d_i - d_j)x_{ij})_{i,j}$$

$$D^*X - XD^* = ((\bar{d}_i - \bar{d}_j)x_{ij})_{i,j} \quad \text{である}$$

$$A = DX - XD = (a_{ij})_{i,j} \quad (\text{i.e. } a_{ij} = (d_i - d_j)x_{ij})$$

$$A^* = D^*X - XD^* = (a'_{ij})_{i,j} \quad (\text{i.e. } a'_{ij} = (\bar{d}_i - \bar{d}_j)x_{ij})$$

とすると

$$a_{13} \bar{a}_{23} a_{21} \bar{a}_{31} a_{32} \bar{a}_{12} + a_{12} \bar{a}_{32} a_{23} \bar{a}_{13} a_{31} \bar{a}_{21}$$

$$= 2 |d_1 - d_3|^2 |d_2 - d_3|^2 |d_1 - d_2|^2 \text{Re}(x_{12} x_{23} x_{31} \bar{x}_{21} \bar{x}_{32} \bar{x}_{13})$$

$$\text{と } |a_{ij}| = |a'_{ij}| \quad \forall i, j$$

$$\det(A^*A - \lambda I) = \det(A^*_* A_* - \lambda I)$$

故に $\|DX - XD\|_p = \|D^*X - XD^*\|_p$ が成立する

6. G. Weiss [4] は N を normal operator, $X \in \mathcal{C}_2$ かつ $NX - XN \in \mathcal{C}_1$ とするとき $\text{tr}(NX - XN) = 0$ ($\text{tr} A$ は A の trace) を示したが, さらに 次のことがいえる。

[定理 5] 次の命題 $\alpha)$, $\beta)$ で $\alpha) \Rightarrow \beta)$

?

$\alpha)$ $\mathcal{Q} = \mathcal{C}_1$ で $(*)'$ が成立する.

$\beta)$ N を normal, K を compact とするとし

$NK - KN \in \mathcal{C}_1$ ならば $\text{tr}(NK - KN) = 0$

証明. $\alpha)$ より $(N + N^*)K - K(N + N^*) \in \mathcal{C}_1$ がいえる. 故に $S := \text{Re } N$ とすると

$$T = SK - KS \in \mathcal{C}_1$$

$$\text{今 } T - T^* = S(K + K^*) - (K + K^*)S$$

$$T + T^* = S(K - K^*) + (K - K^*)S \quad \text{で}$$

$K + K^*, K - K^*$ は compact normal であり

$K + K^*, K - K^*$ は diagonalizable.

$$\text{故に } \text{tr}(T - T^*) = 0 = \text{tr}(T + T^*)$$

で $\text{tr } T = 0$ が出る.

同様に

$$\text{tr}((\text{Im } N)K - K(\text{Im } N)) = 0 \quad \text{が示せて}$$

$$\text{tr}(NK - KN) = 0 \quad \text{がいえる.}$$

References

- [1] B. A. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators, Proc. N. A. S. 36 (1950), 35-40.
- [2] C. R. Putnam, On normal operators in Hilbert space, Amer. J. Math. 73 (1951), 357-362.
- [3] D. Voiculescu, Some results on norm-ideal perturbations Hilbert space operators, J. Operator Theory 2 (1979), 3-38.

- [4] G. Weiss, The Fuglede commutative theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions for matrix operators I, Trans. Amer. Math. Soc. 246 (1978), 193-210.
- [5] 大久保和義, Operator の norm-ideal perturbation について
教理解析研究所講究録 377 (1980).