

幾何種数の計算公式と楕円型特異点について

京大 数理研 泊 昌孝

Introduction 2次元有理特異点が *blowing up* による単純な *resolution process* (*absolute isolatedness*) を有することは, Brieskorn, Tjurina, Lipmann により明らかにされている。また2重点を大前提とすると, Brieskorn [1] はその特徴付けを与えている。我々は *resolution process* によって特異点を解析することを目標とする。まず, 有理2重点の場合を *Special* に含む「*resolution process* と *invariants*」に関する理論を構成してゆくのが目的である。1次元の場合にその型の議論を求めると, *infinitely near singular points* の重複度を用いた *conductor number formula* がある。2次元正規特異点に対して同様なことを考えると, まず P_g (幾何種数)-formula が要求される。しかし, *conductor* 的な *numerical invariant* を「*resolution space* の標準因子から引き出されるもの」ととらえると, *invariant* (for 1次元) に対応するのは P_g だけで

はないように思われる。Wagreich の導入した p_a もそうである。これは, resolution の例外集合の dual graph の交差形式にのみ依る。また, 筆者が導入 (S2 に於て) する invariant L (for 2次元 Gorenstein 特異点) も標準因子と resolution process に依る量である。これら invariants の間の特殊な関係式は, resolution process の何に注目するべきかともをぐる手がかりになるのではないか。

このノートに於けるプログラムは次の通り。§1 では, blowing up (with smooth compact center) の center に関する Hilbert-Samuel 関数によって p_g が計算されることを示す。§2 では, Gorenstein で $p_a = 1$ なる特異点の resolution process に関する必要条件を導き, 更に超曲面 3 重点の場合について特徴付けを与える (2 重点については [1] を参照)。§3 では, 以上の考察を背景にひとつの問題を提出する。以上, 詳細は [12] を参照して下さい。また, このノートでの諸概念の定義は [3] を参照。ただし, 我々は Wagreich [13] に従って, 楕円型特異点と $p_a = 1$ によりせだめる。

§1 Hilbert-Samuel 関数と p_g -formula

初めに, compact complex analytic space X を blowing up した時, 構造層の Euler-Poincaré characteristic がいかに変化するかと

計算し, それを P_g -formula に応用する。

定理 1 Compact 複素解析空間 $\bar{V}$, 及びその部分多様体 C が, 次の 2 条件を満たすとする。(*) $\bar{V}$ は C の近傍で global に ambient 多様体を有する (i.e., $\bar{V}$ における C の開近傍 V が存在して, ある多様体 $\square$ に $V \hookrightarrow \square$ closed に埋め込まれている)。(**) C を center とする V 及び $\bar{V}$ の blowing up を $\psi: V_1 \rightarrow V$ (及び $\psi: \bar{V}_1 \rightarrow \bar{V}$) とする時, 標準写像 $\mathcal{O}_V \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_{V_1}$ が単射である。

この時, 次の等式が成立する。

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ P(k) - \chi\left(\mathcal{I}_C^k \mathcal{O}_V / \mathcal{I}_C^{k+1} \mathcal{O}_V\right) \right\}$$

ただし, ideal sheaf $\mathcal{I}_C$ は C の定義 ideal。 k の関数 $P(k)$ は

$$P(k) = \chi\left(\mathcal{I}_C^k \mathcal{O}_V / \mathcal{I}_C^{k+1} \mathcal{O}_V\right) \quad k: \text{十分大},$$

によって定まる, 多項式である。

注① $\dim V = 1$ の時は, D.Kirby により証明されている [4]。② 条件(**) は, 例えば, V が reduced であって, C が V の各既約成分に対して $\text{codim} > 0$ の時に成立する。

例 1 center $C \in 1 \text{ 点 } p$, すなわち local ring $\mathcal{O}_{V,p}$ の 極大 ideal $\mathfrak{m}_{V,p}$ を center にとると, $\chi(\mathfrak{m}_{V,p}^k \mathcal{O}_V / \mathfrak{m}_{V,p}^{k+1} \mathcal{O}_V)$ は, $\mathcal{O}_{V,p}$ の

Hilbert-Samuel関数 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1}$ であり, $P(k)$ はその Hilbert-Samuel 多項式である。特殊な場合に定理1の右辺を計算して

みる。① (V, p) : n 次元超曲面かつ $\text{mult}_p V = \rho$ とすると

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = (-1)^{n+1} \binom{\rho}{n+1} \quad \text{である (補題1を参照)}$$

② (V, p) : n 次元で $(\mathbb{C}^{n+2}, 0)$ に tangential に complete intersection となっており埋め込まれており, 定義idealの standard basis の degree $\in (d_1, d_2)$ とする。 $n=1$ の時 $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = \frac{1}{2} d_1 d_2 (d_1 + d_2 - 2)$ (Northcott [7])。 $n=2$ の時は

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = -\frac{1}{12} d_1 d_2 \{ 2(d_1 + d_2)^2 - d_1 d_2 - 9(d_1 + d_2) + 11 \}$$

となる。③ $\dim V = 2$, (V, p) : Cohen-Macaulay with maximal embedding dim. i.e., $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1} = \text{mult}_p V + 1$ の時, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1} = (\text{mult}_p V)k + 1$

$k \geq 0$ である (Sally [9], [10] 参照)。ゆえに, $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = 0$ 。

④ $\dim V = 2$, (V, p) : Gorenstein with maximal embedding

dim かつ $\text{mult}_p V \geq 3$. i.e., $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1} = \text{mult}_p V \geq 3$ の時,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1} = (\text{mult}_p V)k \quad k \geq 1 \quad \text{である (Sally [9], [10] 参)}.$$

ゆえに, $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = -1$ である。

以後, 常に特異点 (V, p) として2次元を仮定する。2次元正規特異点 (V, p) について, (V は代数的であるとして良いため) compact 解析空間 $\bar{V}$ を $V \subset_{\text{open}} \bar{V}$ とするようにとれる。 V は多様体 U に closed に埋め込まれているとしよう。

特異点 (V, p) について, blowing up with smooth centers の合成による resolution をとると, data (U, V, V) に対して次の図 (☆) が定まる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 U & = & U_0 & \xleftarrow{\psi_1} & U_1 & \xleftarrow{\psi_2} & \cdots \xleftarrow{\psi_N} U_N \\
 \text{(*)} \quad V & = & V_0 & \xleftarrow{\quad} & V_1 & \xleftarrow{\quad} & \cdots \xleftarrow{\quad} V_N = \tilde{V} \\
 \bar{V} & = & \bar{V}_0 & \xleftarrow{\quad} & \bar{V}_1 & \xleftarrow{\quad} & \cdots \xleftarrow{\quad} \bar{V}_N
 \end{array}$$

$\bigcup$ $\bigcup$ $\bigcup$
 $\bigcap$ $\bigcap$ $\bigcap$

$\psi_i : U_i \rightarrow U_{i-1}$: the blowing up of U_{i-1} with center I_{C_i} .

ただし, $I_{C_i} \mathcal{O}_{V_{i-1}} = \mathcal{I}_{C_i}$, C_i は V_{i-1} の closed submanifold.

V_i : blowing ψ_i による V_{i-1} の 強変換像

$\bar{V}_i$: V の compact 化 $\bar{V}$ より canonical に induce されるもの.

$\Theta_i^{(i)}$: U_i における ψ_i の例外集合。 $\psi_i^{-1}(I_{C_i})$ により定まる.

$\Theta_i^{(j)}$ (for $i < j$) : $\Theta_i^{(i)}$ の $\psi_i \circ \cdots \circ \psi_{j+1}$ による 強変換像.

E_i : V_i に於ける, blowing up $\psi_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$ の例外集合.

h_i : $h_i \in \mathcal{I}_{\Theta_i^{(i)}} / \mathcal{I}_{\Theta_i^{(i)}}^2 \in \text{Pic}(\Theta_i^{(i)})$.

W_i : resolution 多様体 $\tilde{V}$ 上に $(\psi_2 \circ \cdots \circ \psi_N)^{-1}(I_{C_i})$ なる $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ -ideal sheaf を制限して, 定まる effective Cartier divisor.

今, (V, p) reduced であるから, 各 V_i は reduced である (p317 [2]) ゆえに (V_i, C_i) について定理1の条件は成立している。Leray の spectral sequence と $\bar{V}_N \rightarrow \bar{V}$ に適用して, $-P_g(V, p) = \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_N}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}})$ が かるので, 定理1

は Hilbert-Samuel 関数 $\chi(\mathcal{I}_{C_i}^k / \mathcal{I}_{C_i}^{k+1})$ の言葉で, ひとつの P_2 -formula を与えている。

もう少し具体的な表示を超曲面 (V, p) の場合について与える。

定理 2 (V, p) 2次元超曲面孤立特異点について,
resolution $(\star)$ をとり fix する。次の等式が成立する。

$$(i) \chi(\mathcal{O}_{V_i}) - \chi(\mathcal{O}_{V_{i-1}}) = -\frac{1}{6} p_i(p_i-1)(p_i-2) \quad \text{center } C_i: \text{point.}$$

$$(ii) \chi(\mathcal{O}_{V_i}) - \chi(\mathcal{O}_{V_{i-1}}) = -\frac{1}{6} p_i(p_i-1)(p_i+1)h_i^2 - \frac{1}{2}(p_i-1)p_i(g_i-1-r_i') \\ = \frac{1}{12} p_i(p_i-1)(p_i-2)h_i^2 - \frac{1}{4}(p_i-1)E_i^2 - \frac{1}{2}p_i(p_i-1)(g_i-1)$$

center C_i が compact nonsingular curve の時。

ただし, p_i : center C_i の Zariski open set の各点での V_{i-1} の重複度。

r_i' : は $E_i \equiv p_i h_i - r_i' f_i$ と $\text{Num}(\mathcal{O}_i^{(1)}) = 2h_i \oplus 2f_i$ と
この分解より定まる数。 f_i は $\mathcal{O}_i^{(1)} \rightarrow C_i$ の fiber.

g_i : genus of C_i .

E_i^2, h_i^2 ; $\mathcal{O}_i^{(1)}$ (今 2次元) 上での交点数。

証明は, 次の補題に, Riemann-Roch-Hirzebruch の公式を用いれば良い。

補題 1 記号を定理 1 と同様とし, $\dim U = \dim V + 1$

を仮定する。2次元(※)と同じ図をつくる。次の等式が成立す

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = -\sum_{j=1}^{p_i} \chi(\mathcal{L}_{\mathcal{O}_{\bar{V}}}^{m_j-1} / \mathcal{L}_{\mathcal{O}_{\bar{V}}}^{m_j} \otimes \mathcal{L}_{V_i})$$

ここで, $\mathcal{O}_{\bar{V}_i}$ -ideal sheaf $\mathcal{L}_{V_i}$ は V_i の 定義 ideal. p_i, m_j は 2次元の場合に準ずる.

我々は, 更に, 次の計算の差の補題を得る。

補題 2 定理 2 の仮定の下に, 次の等式が成立する。

(i) $W_i^2 = -p_i$ center C_i が point (勿論 Prop 2.7 [13] より出る)。

$W_i^2 = -p_i h_i^2 + r_i'$ center C_i が curve.

$$(ii) \quad r_i' = \sum_{j < i} \frac{p_j W_j \circ W_i}{p_i}$$

これより, 定理 2 の結果は数値としては統一的に

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) &= \frac{1}{6} (p_i - 1)(2p_i - 1) \sum_{j < i} \frac{p_j W_j \circ W_i}{p_i} + \frac{1}{6} (p_i^2 - 1) W_i^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} p_i (p_i - 1) \chi(\mathcal{O}_{C_i}) \end{aligned}$$

と書ける。通常の resolution の計算及び, 例外集合の weighted dual graph を求める手づきで, p_j が計算できることがわかる。(また, 2重点 (V.p) の canonical resolution について [11] で使った Lemma 2 [1], もこれから容易に導かれる。)

§2 楕円型特異点の resolution process について

この節では、次の定理をめぐって論ずる。

定理 3 2次元超曲面孤立特異点 (V, p) であって重複度が3以上とすると、次の3条件は同値である。(a) $p_a = 1$ (i.e., 楕円型) (b) $p_g = 1$ (c) (V, p) は3重点であり、次の resolution を持つ。 $V_N \xrightarrow{\psi_N} V_{N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \xrightarrow{\psi_1} V$, ψ_k : blowing up with smooth center, 整数 $M (\leq N)$ があって、次の条件が $1 \leq k \leq M$ で成立する。(i) V_k : 正規 (ii) ψ_k with center p_k 及び $\text{mult}_{p_k} V_{k-1} = 3$. (iii) $V_{k-1} - \{p_k\}$ の各点の重複度は高々2 (iv) V_M の各点の重複度は高々2. (v) $p_k \notin \bigcup_{j \leq k-2} \Theta_j^{(k-1)}$ ($\Theta_j^{(k)}$ については §1 の(*) に参照)。

この statement の証明に入る前に、少しながめてみよう。
implication (c) $\Rightarrow$ (a) で $M=1$ としてみよう。それは「超曲面3重点 (V, p) は、1回 p で blowing up して、正規かつ、重複度がすべての点で落ちていれば $p_a = 1$ である。」となる。(少々非数学的な発言となるが)筆者には、この部分証明はできるのだが、もうひとつ良く理解できない。それについては、次節で述べる^(*)。この節の目的は、定理3の証明の(*)「手計算で…」といか言えないことが
8
くずしいのである。

仕組を説明することである。

まず, 2次元正規 Gorenstein 特異点 (V, p) について, invariant $L(V, p)$ を定めよう。resolution $\psi: (\bar{V}, A) \rightarrow (V, p)$ をとる。 (V, p) Gorenstein であるので, resolution 多様体 $\bar{V}$ の canonical line bundle は, 例外集合 $A (= \bigcup_{i=1}^m A_i)$ と既約分解する) の近傍では, ある integral divisor $\sum_{i=1}^m k_i A_i$ ($k_i \in \mathbb{Z}$, $i=1, \dots, m$) により定まる line bundle となる。この divisor を標準因子と呼び $K_{\bar{V}}$ と書く。次に, blowing down $(\bar{V}, A) \xrightarrow{\psi} (V, p)$ に対する極大イデアル因子とは, 次の様に定まる $\bar{V}$ 上の effective Cartier divisor Y_{ψ} である。

$$Y_{\psi} = \sum_{j=1}^m \left\{ \inf_{h \in \mathcal{M}_{V,p}} \text{ord}_{A_j}(\psi^* h) \right\} A_j$$

ここで, $\mathcal{M}_{V,p}$ は local ring $\mathcal{O}_{V,p}$ の極大イデアル, $\text{ord}_{A_j}(\psi^* h)$ は関数 $\psi^* h$ の A_j の generic 点での vanishing order である。更さうには, ある $h \in \mathcal{M}_{V,p}$ があって, $Y_{\psi} = \sum_{j=1}^m \text{ord}_{A_j}(\psi^* h) A_j$ と書ける。 $|Y_{\psi}|$ (Y_{ψ} の包) は例外集合全体であるから, 次式の右辺は意味を持ち, これで $L(V, p)$ を定める。

$$L(V, p) = \min \{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid -K_{\bar{V}} \leq \alpha Y_{\psi} \}.$$

これは, resolution ψ のとり方に依らずに定まる非負の数である。 $L(V, p)$ を ρ_2 と関係づけよう。その準備として, Lanterによる ρ_2 の表現 とよく習する。V: Stein かつ $V - \{p\}$ smooth

にとる時, 次の等式が成立する (Th3.4 [5])。

$$p_g(V, p) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\tilde{V}-A, \Omega^2 \tilde{V}) / \Gamma(\tilde{V}, \Omega^2 \tilde{V}) .$$

ここで $\Omega^2 \tilde{V}$ は $\tilde{V}$ 上の正則2形式の層である。Gorenstein (V, p) については, $\tilde{V}-A$ 上の nowhere vanishing な正則2形式, ω としよう, ε を用いて, $\Gamma(\tilde{V}-A, \Omega^2 \tilde{V}) / \Gamma(\tilde{V}, \Omega^2 \tilde{V}) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \text{ch}[\omega]$ と書ける。 $\text{ch}[\omega]$ は, ω が左辺に於いて定める class のこと。

命題1 (V, p) : 2次元正則 Gorenstein 特異点について,

$$L(V, p) = \max_{h \in \mathcal{M}_{V, p}} \left\{ \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}[\Psi^*(h)] \text{ch}[\omega]) \right\}$$

である。ただし, $\mathbb{C}[\Psi^*(h)] \text{ch}[\omega]$ とは, $\Gamma(\tilde{V}-A, \Omega^2 \tilde{V})$ の $\mathbb{C}$ -部分空間 $\bigoplus_{l \geq 0} \mathbb{C}(\Psi^*(h))^l \omega$ より定まる $\Gamma(\tilde{V}-A, \Omega^2 \tilde{V}) / \Gamma(\tilde{V}, \Omega^2 \tilde{V})$ の $\mathbb{C}$ -部分空間である。

系1 (V, p) : 2次元正則 Gorenstein 特異点で, embedding dim $\leq v$ とすると, $L \leq p_g \leq \binom{L+v-1}{v}$ である。

命題1 に気をつければ, S.S.-T. Yau の定理 3.2 [4] は次の定理として理解できる。

定理4 (Yau) (V, p) : 2次元正則 Gorenstein 特異点について, $L = p_g$ ならば $p_a \leq 1$ である。

定理3 では, 特殊な場合に, Yan の定理の逆を resolution process (c) を通して証明しようというのである。まず, (d) $\Rightarrow$ (c) についての考察をはじめ。

定理5 (V, p) : 2次元正規 Gorenstein 特異点であって $P_a = 1$ かつ multiplicity $p \geq 3$ とする。この時, (V, p) は Gorenstein with maximal embedding dimension (i.e., $\dim \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 = p$) であって, $\mathcal{M}_{V,p}$ を blowing up しても正規である。

証明. 次の命題を使う。

命題2 (Laufer Prop 5 [6]) (V, p) : 正規2次元特異点。 $\psi: (\bar{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を resolution であって $\psi^* \mathcal{M}_{V,p}$: invertible とする。 (V, p) の generic hyperplane section として得られる 1次元 reduced 特異点 (C, p) を考える。 $\delta \in (C, p)$ の conductor number とすると, $\delta = -\frac{1}{2}(\chi_4^2 - K_V \chi_4)$ である。

この命題により, $\delta = P_a(\chi_4) - 1 + p$ である。(Prop 2.7 [13])。1次元 (C, p) についての定理1により $\delta \geq$

$\sum_{k=0}^{\infty} \{P(k) - H(k)\}$ 。ただし, $H(k) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{C,p}^k / \mathcal{M}_{C,p}^{k+1}$ であって

$P(k)$ はそれに対する Hilbert Samuel 多項式, すなわち

$P(k) \equiv p$ である。 $H(0) = 1$ より, $1 \leq P_a(\chi_4) \leq \sum_{k \geq 1} \{P - H(k)\}$

を得る。 $\mathcal{O}_{C,p}$ が 1次元 Cohen-Macaulay であるから、一般に
 $\rho = P(k) \geq H(k) \quad k \geq 0$ であり (Theorem 1.1 §3 [8]), 更に
 $\mathcal{O}_{C,p}$ Gorenstein から multiply $\rho \geq 3$ だから, $\rho - H(1) \geq 1$
 である (Corollary 3.2 [9]). つまり, $\rho - H(1) = 1$ から
 $\rho - H(k) = 0 \quad k \geq 2$ でなければならぬ。我々は, $\delta =$
 $\sum_{k=0}^{\infty} \{P(k) - H(k)\}$ であることも見たから, (C, p) は 1回 p で
 blowing up すると non-singular である。これより, (V, p) は
 Gorenstein with maximal embedding dim であって, 1回 p で
 blowing up すると isolated singularity を持つのみである。
 Sally の定理 (Corollary 5.2 [10]) より, V は 1回 p で
 blowing up して Gorenstein (特に Cohen-Macaulay) であり
 normal である。 証終

補題 3 (V, p) : 2次元超曲面孤立特異点で次のデータを
 与えているとする。 ① $\text{mult}_p V = \rho$ ② $\pi_1: V_1 \rightarrow V$
 blowing up at p の後に (1) V_1 : 正規 (2) $\exists p_2 \in V_1 \cap \Theta_1^{(1)}$ s.t.
 $\text{mult}_{p_2} V_1 = \rho$. ③ $\pi_2: V_2 \rightarrow V_1$ blowing up at p_2 の後
 に (3) V_2 : 正規 (4) the point $p_3 \in V_2 \cap \Theta_1^{(2)} \cap \Theta_2^{(2)}$

この時, $P_a(V, p) \geq \frac{1}{8}(\rho-2)^2\rho + \frac{1}{2}(\rho-2) + P_a(V_2, p_3) \quad \rho: \text{even}$
 または $P_a(V, p) \geq \frac{1}{8}\rho(\rho-1)(\rho-3) + \frac{1}{2}(\rho-1) + P_a(V_2, p_3) \quad \rho: \text{odd}$.

証明). V_2 の resolution を更にとり, (*) in §1 のようにした (V, p) の resolution $\gamma: (\bar{V}, A) \rightarrow (V, p)$ をとる。

主張 例外集合 A の既約成分, A_0 と呼ぶ, であって $A_0 \cap |W_3| \neq \emptyset$, $A_0 \cap |W_2| \neq \emptyset$, $A_0 \not\subset |W_2|$ を満たすものが存在する。

(主張の証明) $(V, p) \subset (\mathbb{C}^3, o)$ として, 座標系 (x, y, z) of $(\mathbb{C}^3, o)$ を適当にとり, $(\{z^p + \sum_{i=2}^p a_i(x, y) z^{p-i} = 0\}, o) = (V, p)$ とおさわす。更に $H = \{z=0\}$ と置いて, 次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
 (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \supset V & \xleftarrow{\psi_1} & V_1 & \xleftarrow{\psi_2} & V_2 & \ni p_3 \\
 \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
 (x, y, 0) \in H & \xleftarrow{\psi_1} & H_1 & \xleftarrow{\psi_2} & H_2 & &
 \end{array}$$

ただし, ψ_i は ambient 多様体 $\mathbb{C}^3$ の blowing up とおさえ, V_i, H_i はその i -th stage での 強変換像である。条件 ①及び ②の(2) により, V_2 は p_3 の近傍で, 次の様に書ける。 $(\{(\frac{z}{x^2 y^2})^p + \sum_{i=2}^p a_i(x', y') (\frac{z}{x^2 y^2})^{p-i} = 0\}, o) = (V_2, p_3)$, ただし $(x', y', \frac{z}{x^2 y^2})$ は p_3 の近傍での ambient 多様体の座標系であって, $H_2 = \{\frac{z}{x^2 y^2} = 0\}$ かつ $\pi_2: (x', y', \frac{z}{x^2 y^2}) \mapsto (x', y', 0)$ という具合に対応している。 $p_3 \in H_2 \cap \theta_1^{(2)} \cap \theta_2^{(2)}$ でもあるが, monic 多項式の根の (x', y') についての連続性により, $V_2 \cap \theta_1^{(2)}$ の既約

成分, A'_0 と呼ぶ, であって, $P_3 \in \text{通り}$, かつ $\pi_2(A'_0) = H_2 \cap \Theta_1^{(k)}$ となるものが存在する。 $(\tilde{V}, A) \rightarrow V_2$ による変換の, 強変換像を A_0 とすれば, 主張の A_0 となる。 (主張 OK!)

さて, $\tilde{V}$ 上の effective Cartier divisor $B_{(V_2, P_3)}$ であって $|B_{(V_2, P_3)}| = |W_2|$ かつ $\rho_2(B_{(V_2, P_3)}) = \rho_2(V_2, P_3)$ なるものをもとる。 $\rho_2(W_2)$ を命題 2 を用いて計算することによって, $\tilde{V}$ 上で次の不等式が得られる。

$$\rho_2(A_0 + \alpha W_2 + B_{(V_2, P_3)}) \geq -\frac{1}{2}\alpha^2\rho + \frac{1}{2}\alpha(\rho^2 - 2\rho + 2) + \rho_2(B_{(V_2, P_3)})$$

$\alpha \geq 0$. 証終

この補題により, 定理 3 の (a) $\Rightarrow$ (c) がしたがうことは容易である。 更に (一見^{*)}強く, (a) から次の条件 (c)' が生ず。

(c)' (i), (ii), (iii) は (c) と同様

(iii)' $V_{k-1} - \{P_k\}$ の特異点 は高々有理 2 重点

(v)' $P_k \notin \bigcup_{j \leq k-2} \Theta_j^{(k-1)}$ かつ, $g \in V_M$ を not rational な点とすると $g \notin \bigcup_{j \leq M-1} \Theta_j^{(M-1)}$ である。

^(*) 定は, 定理 3 の大前提の下で, (i)(ii)(iii) を仮定すると, (c) から (c)' が出ることを直接計算で (§ 3 で触れる 補題 4 の証明に際して 補題 5 の交点に関する大域的な, 平面曲線の分類により) 確かめることができる。

(C)'を仮定しよう。上記補題3の証明にも使ったが、次の可換図式が存在する。

$$\begin{array}{ccccccc}
 V & \xleftarrow{\psi_1} & V_1 & \xleftarrow{\psi_2} & V_2 & \xleftarrow{\dots} & V_M \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_M \\
 H & \xleftarrow{\psi_1} & H_1 & \xleftarrow{\psi_2} & H_2 & \xleftarrow{\dots} & H_M
 \end{array}$$

各 blowing up ψ_k の center P_k を含む $\Theta_j^{(k-1)}$ と, $\Theta_j^{(M)} \cap V_M$ 及び $\Theta_j^{(M)} \cap V_M$ 等の状況を, 具体的に書いた π_i を用いてながめる。すると, E. Brieskorn が Satz 1 の証明において与えた標準因子の計算公式 [1] を使うことにより, 関係式 $L(V, p) = M-1 + L(V_{M-1}, P_M)$ を得る。一方, 定理1により, $P_g(V, p) = M-1 + P_g(V_{M-1}, P_M)$ であるから, 定理3の $((C) \Rightarrow (b))$ for $M=1$ を仮定すれば, 定理3の証明は完了する。

§3.

前節にて, 証明を保留した, 定理3 $\{(C) \Rightarrow (b)\}$ $M=1$ について, 我々は次の結果を得る。

補題4. (V, p) : 2次元超曲面孤立特異点で重複度3とする。 $\psi: V_1 \rightarrow V$: blowing up at $p \in V$ として, V_1 : 正規を仮定する。この時

(i) $p_2 \in \Theta_1^{(1)} \cap V_1$ なる点をとる時, $\text{mult}_{p_2} V_1 = 2$ ならば

$$p_a(V_1, p_2) \leq 1 \text{ である。}$$

(ii) $V_1 \cap \Theta_1^{(1)}$ の各点における multiplicity が 2 以下ならば

$$L(V, p) = p_g(V, p) \text{ である。}$$

証明は, $(V, p) = (\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}, \mathcal{O})$.

$$f = \sum_{i=3} f_i(x, y, z) \quad f_i : (x, y, z) \text{ の } i \text{ 次同次多項式}$$

という表示を用いた, (主に tangent cone f_3 の) 分類である。

次の結果は重要な役割もある。

定理 6 ([11]) (V, p) : 2次元正規2重点とする時, 次の3条件は同値. (a) $p_a \leq 1$ (b) $L = p_g$ (c) (V, p) に対する Zariski の canonical resolution をとる時, 各正規化は, 1 回の (reduced) $\mathbb{P}^1$ を center とする blowing up で得られる。

補題 5 超曲面弧の特異点 (2次元) $(V, p) \leftarrow V_1$ blowing up at p について. $V_1(\alpha) \leq \{q \in V_1 : \text{mult}_q V_1 \geq \alpha\}$ という記号を導入すれば $\{f_j = 0\}(p)$ も同様に $\mathbb{P}^2$ の curve として定義し, $V_1(\alpha) = \bigcap_{i=p}^{p+\alpha} \{f_i = 0\} (\alpha + p - i) \cap \Theta_1^{(1)}$ $0 \leq \alpha \leq p$ を得る。

まず、定理6 とともにして、 $\{f_i=0\}$ 達 ($i=3,4,5$) の交わり等と invariants L, P_g を V_1 の各点について計算し、関係づける (分類する)。それを、補題5 を用いて、 $\Theta_1^{(3)} \cap V_1$ 上の分布の問題にして、 P_g -formula, adjunction formula によって (V, p) の言葉にする。(しかし、場合の数もけっこう多いし、各個別の計算も、名々不規則である)。

問題 (V, p) : 2次元正規 Gorenstein 特異点で maximal embedding dimension (かつ multiplicity ≥ 3) の時、補題4に相当する 楕円性 に関する十分条件を求めよ。

multiplicity 4 以上の場合に筆者は、何と確定的な statement を得ていない。例をひとつ計算して、このノートを終わりたいと思う。

例2 1回 blowing up at p をして、正規であり、かつ各点で Hilbert-Samuel 関数 ($\sum_{i=0}^k H(\mathcal{R}_i) \geq H^{(0)}(\mathcal{R})$ についてえる) が 真に (不等式の意味で) 良くなっている場合。

これは考えてみるべきだろう。しかし、次の (V, p) を考えると、楕円型であることを出す為には不十分である。

$$(V, p) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid xy - wz = 0, w^2 + x^3 + y^3 + z^3 = 0\}, 0$$

$V_1 \rightarrow V$ blowing up at p とする。 V_1 は正規であり、
ただひとつの特異点 p_2 を持つ。

$$(V_1, p_2) = (\{ (s, t, u) \in \mathbb{C}^3 \mid s^2 t^2 + (s^2 + t^3) u + u^5 = 0 \}, 0)$$

である。 $V_2 \rightarrow V_1$ blowing up at p_2 の後、 V_2 は smooth である。 したがって (V, p) は tangential に complete intersection in $\mathbb{C}^4$ で degree $(2, 2)$ だが、 multiplicity 4 である。 この際、 $V_1 \rightarrow V$ にて、 Hilbert-Samuel 関数は真に良くなるが、重複度は 4 で保たれる。 (V_1, p_2) (だが、 (V, p) も) 楕円型ではない (定理 5)。

参考文献

- [1] Brieskorn, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildung. Math. Ann 166, 76-102 (1966).
- [2] Hironaka, H., Rossi, H.: On the equivalence of imbeddings of exceptional complex space. Math. Ann. 156, 313-333 (1964).
- [3] 有田口・吉永・渡辺公.: 多変数複素解析入門, 森北出版 (1980)
- [4] Kirby, D.: The genus of an algebraic curve. Quart. J. Math. Oxford (2) 12 (1961) 217-226.
- [5] Laufer, H.B.: On isolated rational singularities. Amer. J. Math. 94 (1972) 597-608.

- [6] Laufer, H.B.: Simultaneous resolution of some families of isolated surface singularities. Announcement in Arcata (1981)
- [7] Northcott, D.G.: The reduction numbers of one-dimensional local ring. *Mathematika*. vol 6 (1959) 87-90.
- [8] Sally, J.D.: Numbers of generators of ideals in local rings. *Lecture Notes in Pure and Applied Math.*, Marcel Dekker Inc. New York and Basel. vol 35. (1978).
- [9] Sally, J.D.: Tangent cones at Gorenstein singularities. *Compositio Math* 40 (1980) 167-175.
- [10] Sally, J.D.: Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension. *J. Algebra* 56 (1979) 168-183.
- [11] 沼 (Tomari): A geometric characterization of normal two-dimensional singularities of multiplicity two with $\nu_2 \leq 1$. submitted in *Publ. R.I.M.S.* (1981).
- [12] 沼: A p_g -formula and elliptic singularity (準備中).
- [13] Wagreich, P.: Elliptic singularities of surfaces, *Amer. J. Math.* 92 (1976) 419-454.
- [14] Yan, S.S-T.: On maximally elliptic singularities. *Trans. A.M.S.* 257 (1980) 269-329.