

# Clairaut 方程式とツイスター理論

待田 芳徳 (沼津高専)

Yoshinori MACHIDA (Numazu College of Technology)

## 1. はじめに

Clairaut 方程式は、微分方程式を初めて習うとき、解の種類として一般解、特殊解に続いて特異解が出てきたときの例としてお目にかかるものである。しかしその後、解析学や物理学などで出会うことは稀である。ここでの目的は、Clairaut 方程式の本質はツイスター理論の核心そのものであることを述べて、さらに Clairaut 方程式が自然に一般化されることをみることにある。

## 2. Clairaut 方程式

簡単に Clairaut 方程式を復習しておこう。

Clairaut 方程式とは、

$$y = xp + f(p),$$

ここで  $x$  は独立変数、 $y$  は未知関数、 $p = y' = \frac{dy}{dx}$ 、 $f$  は任意の適当な関数、である。

微分すると、 $p'(x + f'(p)) = 0$  となり、(i)  $p' = 0$ 、または (ii)  $x + f'(p) = 0$  となる。  
(i)  $p' = 0$  のとき、 $p = c$  (定数) となり、一般解

$$y = cx + f(c)$$

を得る。これは直線群を表わしている。

(ii)  $x + f'(p) = 0$  のとき、 $x = -f'(p)$ 、 $y = xp + f(p)$  から  $p$  を消去して、特異解  $y = \varphi(x)$  が得られる。これは、 $y = cx + f(c)$  と、これを  $c$  で偏微分した  $0 = x + f'(c)$  から、

$$\begin{cases} x = -f'(c) \\ y = -cf'(c) + f(c) \end{cases}$$

に他ならない。これは直線群の包絡線を表わしている。

例えば、(1)  $f(p) = p^2$  をとれば  $y = \varphi(x) = -\frac{1}{4}x^2$ 、(2)  $f(p) = p^3$  をとれば  $27y^2 + 4x^3 = 0$ 、(3)  $f(p) = \sqrt{1+p^2}$  をとれば  $x^2 + y^2 = 1$  (上半分) が、それぞれ包絡線となる。

2 階微分方程式の場合の Clairaut 方程式は、

$$y = -\frac{x^2}{2}q + xp + f(q),$$

ここで  $q = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ , である. 一般解は,

$$y = \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + f(c_1)$$

( $c_1, c_2$  は定数) である. これは放物線群である. 特異解は,

$$\begin{cases} x = \sqrt{2f'(c_1)} \\ y = c_1f'(c_1) + c_2\sqrt{2f'(c_1)} + f(c_1) \end{cases}$$

である. これは  $c_1$  をパラメーターとする 1-パラメーター放物線群 ( $c_2$  は定数) の包絡線である.

偏微分方程式の場合の Clairaut 方程式は,

$$y = x_1p_1 + \cdots + x_np_n + f(p_1, \cdots, p_n),$$

ここで  $x_1, \cdots, x_n$  は独立変数,  $y$  は未知関数,  $p_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$ , である. 完全解は,

$$y = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + f(c_1, \cdots, c_n)$$

( $c_i$  は定数) である. これは超平面群である. 特異解は,

$$\begin{cases} x_i = -\frac{\partial f}{\partial c_i} \\ y = -\sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial f}{\partial c_i} + f(c_1, \cdots, c_n) \end{cases}$$

であり, 完全解の包絡面である.

平面  $\mathbb{R}^2 : (x, y)$  での 2-パラメーター直線群  $y = ax + b$  ( $a, b$  は定数) の共通の性質は, 平坦な 2 階常微分方程式

$$y'' = 0$$

である. さらに発展させる方向として,

(1) 直線を曲線に「一般化」して, 正規形 2 階常微分方程式

$$y'' = f(x, y, y')$$

を考えることができる. 解は 2-パラメーター曲線群である.

(2) 2-パラメーターを 1-パラメーターに「特殊化」して, 一般形 1 階常微分方程式

$$F(x, y, y') = 0$$

を考えることができる. 解は部分 1-パラメーター直線群である. これが 1 階 Clairaut 方程式である.

平面  $\mathbb{R}^2 : (x, y)$  での 3-パラメーター放物線群  $y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  は定数) の共通の性質は, 平坦な 3 階常微分方程式

$$y''' = 0$$

である. さらに発展させる方向として,

(1) 放物線を曲線に「一般化」して, 正規形 3 階常微分方程式

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

を考えることができる. 解は 3-パラメーター曲線群である.

(2) 3-パラメーターを 2-パラメーターに「特殊化」して, 一般形 2 階常微分方程式

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

を考えることができる. 解は部分 2-パラメーター放物線群である. これが 2 階 Clairaut 方程式である.

ここではいずれも (2) の立場の「特殊化」で議論をしていく.

## 2. ツイスター理論

Penrose によって名づけられたツイスター理論は, 4 次元時空上の共形不変な場をツイスター空間と呼ばれる 3 次元複素多様体上の幾何学的対象に置き換えて議論するものであった. その考え方を敷衍させて, ツイスター理論とはダブル・ファイブレーションを通しての 2 つの異なった幾何構造の双対性である, とここでは喝破しておこう. 2 つの幾何構造の下部多様体の次元は一般に異なっていることに注意する.

次のような設定をする:  $M$  をある幾何構造をもつ多様体とし,  $X_s$  ( $s \in S$ ) をその幾何構造に付随した  $M$  の部分多様体の族とする. そのとき, 空間  $N = \{X_s\}$  は他の幾何構造をもつ多様体であり,  $N$  はその幾何構造に付随した部分多様体  $Y_t$  ( $t \in T$ ) の族をもち, 空間  $\{Y_t\}$  は  $M$  自身であるとする. インシデンス空間  $Z \subset M \times N$  は,

$$Z = \{(m, X_s) \mid m \in X_s\} = \{(Y_t, n) \mid n \in Y_t\}$$

である. そのとき, ツイスター図式と呼ばれるダブル・ファイブレーションをもつ:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ Y & & X \\ \{Y_t\} = M \supset X_s & \longleftrightarrow & \{X_s\} = N \supset Y_t. \end{array}$$

ここで, 各  $X_s$  は多様体  $X$  に微分同相で, 各  $Y_t$  は多様体  $Y$  に微分同相と仮定すれば,  $Z$  はファイバー  $Y$  をもつ  $M$  上のファイバー束であり, ファイバー  $X$  をもつ  $N$  上のファイバー束である.

## 3. 階数 2 の Lie 代数からの Clairaut 方程式

階数 2 の Lie 代数  $A_2, C_2 = B_2, G_2$  から定まる 3 つのツイスター図式は, 直線, Legendre 直線, ヌル直線, Monge 直線, Goursat 直線の幾何学である. それぞれのパス幾何学,

Clairaut 方程式が構成されるが、準備のための紙数の関係上、Monge 型 Clairaut 方程式と Goursat 型 Clairaut 方程式は割愛する。

### 3.1. $A_2$ 型:

平面  $M^2 = \mathbb{R}^2 : (x, y)$  において、直線全体の集合

$$N^2 = \{y = ax - b \mid a, b : \text{定数}\},$$

の共通の性質は、 $a, b$  を消去するために微分して、

$$y'' = 0$$

である。インシデンス空間  $Z^3 = \{(x, y; a, b) \in M \times N \mid y = ax - b\}$  は、0-ジェット空間  $M = J^0(1, 1)$  とみて、標準的な接触形式  $\omega = dy - p dx$  をもつ 1-ジェット空間  $Z = J^1(1, 1) : (x, y, p = y')$  とみなされる。

$M$  における直線  $y = ax - b$  の Legendre リフト  $x = t, y = at - b, p = a$  を、 $a, b, t$  で解いた  $a = p, b = xp - y, t = x$  は、 $N$  における双対直線  $b = xa - y$  の Legendre リフトであり、Legendre 変換に他ならない。次のツイスター図式と Legendre 双対性をもつ：

$$\begin{array}{ccc} p & \longrightarrow & Z : (x, y, p) \longleftrightarrow (a, b, t) \longleftarrow t \\ & \swarrow & \searrow \\ & M : (x, y) & N : (a, b) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = at - b \\ p = a \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = p \\ b = xp - y \\ t = x \end{array} \right.$$

任意の関数  $b = f(a)$  をとり、 $N$  における曲線  $(a, f(a))$  を考える。その  $Z$  への逆像である  $Z$  における曲面  $(a, f(a), t)$  から、Legendre 双対性を取り  $(t, at - f(a), a)$  として、 $M$  への射影から  $(t, at - f(a))$  となる。 $M$  における 1-パラメーター直線群

$$y = ax - f(a)$$

( $a$  は定数) ができ、 $a$  を消去するために微分して、Clairaut 方程式

$$y = xy' - f(y')$$

ができる。この Clairaut 方程式を  $A_2$  型 Clairaut 方程式 と言おう。

上記の曲線  $(a, f(a))$  の  $Z$  への Legendre リフト  $(a, f(a), f'(a))$  から、Legendre 双対性を取り  $(f'(a), af'(a) - f(a), a)$  として、 $M$  への射影から  $(f'(a), af'(a) - f(a))$  となる。 $M$  における曲線

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f'(a) \\ y = af'(a) - f(a) \end{array} \right.$$

は,  $N$  における曲線  $(a, f(a))$  の双対曲線であり, 1-パラメーター直線群  $y = ax - f(a)$  の包絡線である.

**定理**  $A_2$  型 Clairaut 方程式は,  $y'' = 0$  の解である  $M$  における 2-パラメーター直線群における部分 1-パラメーター直線群を,  $N$  における曲線から  $Z$  への逆像, Legendre 双対性,  $M$  への射影をとおして構成したものである.

$N$  におけるその曲線の双対曲線は, 1-パラメーター直線群の包絡線であり, Clairaut 方程式の特異解である.

注意: 2-パラメーター直線群  $\{y = ax - b\}$  において, 部分 1-パラメーター直線群  $\{y = ax\}$  をとると,  $b = f(a) = 0$  であり, Clairaut 方程式は  $y = xy'$  である.  $N$  における曲線  $(a, 0)$  の双対曲線は, 1 点  $(0, 0)$  である.

別の部分 1-パラメーター直線群  $\{y = g(b)x - b\}$  をとると, その表わす微分方程式は, 例えば  $g(b) = 1$  のとき  $y' = 1$  であり, Clairaut 方程式の形をしていない.  $N$  における曲線  $(g(b), b)$  は, 関数  $b = f(a)$  でなく関数  $a = g(b)$  から作ったものである. 広い意味の Clairaut 方程式と言ってよいだろう.

### 3.2. $C_2$ 型と $B_2$ 型:

平面  $\mathbb{R}^2 : (x, y)$  において, ( $y$  軸に平行な軸をもつ) 放物線全体の集合

$$N^3 = \{y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c \mid a, b, c : \text{定数}\},$$

の共通の性質は,  $a, b, c$  を消去するために微分して,

$$y''' = 0$$

である. 標準的な接触形式  $\omega = dy - p dx$  をもつ 1-ジェット空間  $M^3 = J^1(1, 1) : (x, y, p = y')$  を考えて,  $M$  と  $N$  のインシデンス空間  $Z^4 = \{(x, y, p; a, b, c) \in M \times N \mid y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c, p = ax + b\}$  は, 標準的な 2 次接触形式 (Engel 形式という)  $\omega_1 = dy - p dx, \omega_2 = dp - q dx$  をもつ 2-ジェット空間  $Z = J^2(1, 1) : (x, y, p = y', q = y'')$  とみなされる.

$M$  における Legendre 直線  $y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c, p = ax + b$  の Engel リフト  $x = t, y = \frac{a}{2}t^2 + bt + c, p = at + b, q = a$  を,  $a, b, c, t$  で解いた  $a = q, b = -xq + p, c = \frac{1}{2}x^2q - xp + y, t = x$  は, Engel-Legendre 変換という. 次のツイスター図式と Engel-Legendre 双対性をもつ:

$$\begin{array}{ccc}
 q & \longrightarrow & Z : (x, y, p, q) \longleftrightarrow (a, b, c, t) \longleftarrow t \\
 \swarrow & & \searrow \\
 M : (x, y, p) & & N : (a, b, c)
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \\ p = at + b \\ q = a \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = q \\ b = -xq + p \\ c = \frac{1}{2}x^2q - xp + y \\ t = x \end{array} \right.$$

$N$ 上に自然な  $(2, 1)$  型共形構造  $g = ds^2 = 2dad\bar{c} - db^2$  をもつ. そのとき,  $N$ における  $q$  をパラメーターとする曲線  $a = q, b = -xq + p, c = \frac{1}{2}x^2q - xp + y$  ( $x, y, p$  は定数) は, ヌル直線である. 共通の性質は,  $x, y, p$  を消去して,  $a$  を独立変数とした拘束された微分方程式

$$\begin{cases} b'' = 0, \\ b'^2 = 2c' \end{cases}$$

である.

任意の関数  $c = f(a)$  をとり,  $N$  におけるヌル曲線  $(a, \sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha, f(a))$  ( $\alpha$  は定数) を考える. その  $Z$  への曲線の逆像である  $Z$  における曲面  $(a, \sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha, f(a), t)$  から, Engel-Legendre 双対性を取り  $(t, \frac{1}{2}at^2 + (\sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha)t + f(a), at + \sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha, a)$  として,  $M$  への射影から  $(t, \frac{1}{2}at^2 + \beta t + f(a), at + \beta)$  ( $\beta = \sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha$  とした) となる.  $M$  における 2-パラメーター Legendre 直線群

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + \beta x + f(a)$$

( $a, \beta$  は定数) ができ,  $a, \beta$  を消去するために微分して, 2 階 Clairaut 方程式

$$y = -\frac{x^2}{2}y'' + xy' + f(y'')$$

ができる. この Clairaut 方程式を  $C_2$  型 Clairaut 方程式と言おう.

上記の曲線  $(a, \sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha, f(a))$  の  $Z$  への延長リフト  $(a, \sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha, f(a), -\sqrt{2}\sqrt{f'(a)})$  から, Engel-Legendre 双対性を取り  $(-\sqrt{2}\sqrt{f'(a)}, af'(a) - \beta\sqrt{2}\sqrt{f'(a)} + f(a), -a\sqrt{2}\sqrt{f'(a)} + \beta, a)$  として,  $M$  への射影から  $(-\sqrt{2}\sqrt{f'(a)}, af'(a) - \beta\sqrt{2}\sqrt{f'(a)} + f(a), -a\sqrt{2}\sqrt{f'(a)} + \beta)$  となる.  $M$  における  $a$  をパラメーターとする Legendre 曲線

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2}\sqrt{f'(a)} \\ y = af'(a) - \beta\sqrt{2}\sqrt{f'(a)} + f(a) \\ p = -a\sqrt{2}\sqrt{f'(a)} + \beta \end{cases}$$

は,  $N$  におけるヌル曲線  $(a, \sqrt{2} \int \sqrt{f'(a)} da + \alpha, f(a))$  の双対曲線であり, 1-パラメーター Legendre 直線群  $y = \frac{1}{2}ax^2 + \beta x + f(a)$  ( $\beta$  は定数) の反帰 (そりかえり) 曲線である.

**定理**  $C_2$  型 Clairaut 方程式は,  $y''' = 0$  の解である  $M$  における 3-パラメーター Legendre 直線群における部分 2-パラメーター Legendre 直線群を,  $N$  におけるヌル曲線から  $Z$  への逆像, Engel-Legendre 双対性,  $M$  への射影をとおして構成したものである.

$N$  におけるそのヌル曲線の双対曲線は, Legendre 曲線であって, さらに部分 1-パラメーター Legendre 直線群の反帰曲線であり, 2 階 Clairaut 方程式の特異解である.

次に, 双対性の立場から, 逆を考える. 任意の関数  $y = f(x)$  をとり,  $p = f'(x), dy = p dx = f'(x) dx, y = f(x) + \alpha$  ( $\alpha$  は定数) から,  $M$  における Legendre 曲線  $(x, f(x) + \alpha, f'(x))$

を考える. その  $Z$  への曲線の逆像である  $Z$  における曲面  $(x, f(x) + \alpha, f'(x), q)$  から, Engel-Legendre 双対性を取り  $(q, -xq + f'(x), \frac{x^2}{2}q - xf'(x) + f(x) + \alpha, x)$  として,  $N$  への射影から  $(q, -xq + f'(x), \frac{x^2}{2}q + \beta)$  ( $\beta = -xf'(x) + f(x) + \alpha$  とした) となる.  $N$  における 2-パラメーターヌル直線群

$$\begin{cases} b = -xa + f'(x), \\ c = \frac{x^2}{2}a + \beta \end{cases}$$

( $a, \beta$  は定数) ができ,  $a, \beta$  を消去するために微分して,  $a$  を独立変数とした拘束された 1 階 Clairaut 方程式

$$\begin{cases} b = -ab' + f(b'), \\ b'^2 = 2c' \end{cases}$$

ができる. この Clairaut 方程式を  $B_2$  型 Clairaut 方程式と言おう.

上記の曲線  $(x, f(x) + \alpha, f'(x))$  の  $Z$  への Engel リフト  $(x, f(x) + \alpha, f'(x), f''(x))$  から, Engel-Legendre 双対性を取り  $(f''(x), -xf''(x) + f'(x), \frac{x^2}{2}f''(x) + \beta, x)$  として,  $N$  への射影から  $(f''(x), -xf''(x) + f'(x), \frac{x^2}{2}f''(x) + \beta)$  となる.  $N$  における  $x$  をパラメーターとするヌル曲線

$$\begin{cases} a = f''(x) \\ b = -xf''(x) + f'(x) \\ c = \frac{x^2}{2}f''(x) + \beta \end{cases}$$

は,  $M$  における Legendre 曲線  $(x, f(x) + \alpha, f'(x))$  の双対曲線であり, 1-パラメーターヌル直線群  $b = -xa + f'(x), c = \frac{x^2}{2}a + \beta$  ( $\beta$  は定数) の反帰曲線である.

**定理** 拘束された 2 階微分方程式  $b'' = 0, b'^2 = 2c'$  の解である  $N$  における 3-パラメーターヌル直線群における部分 2-パラメーターヌル直線群を,  $M$  における Legendre 曲線から  $Z$  への逆像, Engel-Legendre 双対性,  $N$  への射影をとおして構成したものである.  $M$  におけるその Legendre 曲線の双対曲線は, ヌル曲線であって, さらに部分 1-パラメーターヌル直線群の反帰曲線であり, 拘束された 1 階 Clairaut 方程式の特異解である.

#### 4. 高階方程式への一般化

平面  $\mathbb{R}^2 : (x, y)$  において, ( $y$  軸に平行な軸をもつ)  $n$  次関数 (曲線) 全体の集合

$$N^{n+1} = \{y = \frac{a_n}{n!}x^n + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_2}{2!}x^2 + a_1x + a_0 \mid a_i : \text{定数}, i = 0, \dots, n\},$$

の共通の性質は,  $a_i$  を消去するために微分して,

$$p_{n+1} = y^{(n+1)} = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0$$

である. 標準的な  $(n-1)$  次接触形式  $\omega_1 = dy - p_1dx, \omega_2 = dp_1 - p_2dx, \dots, \omega_{n-1} = dp_{n-2} - p_{n-1}dx$  をもつ  $(n-1)$ -ジェット空間  $M^{n+1} = J^{n-1}(1, 1) : (x, y, p_1 = y', p_2 =$

$y'', \dots, p_{n-1} = y^{n-1}$ ) を考えて,  $M$  と  $N$  のインシデンス空間

$$Z^{n+2} = \{(x, y, p_i; a_j) \in M \times N \mid p_i = \frac{a_n}{(n-i)!} x^{n-i} + \dots + a_{i+1}x + a_i, i = 0, \dots, n-1, p_0 = y\}$$

は, 標準的な  $n$  次接触形式  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n = dp_{n-1} - p_n dx$  をもつ  $n$ -ジェット空間  $Z = J^n(1, 1) : (x, y, p_1, \dots, p_n)$  とみなされる.

$M$  における  $(n-1)$  次 Legendre 直線  $y = \frac{a_n}{n!} x^n + \dots + a_1 x + a_0, \dots, p_{n-1} = a_n x + a_{n-1}$  の  $(n-1)$  次 Legendre リフト  $x = t, y = \frac{a_n}{n!} t^n + \dots + a_1 t + a_0, \dots, p_{n-1} = a_n t + a_{n-1}, p_n = a_n$  を,  $a_n, \dots, a_0, t$  で解いた  $a_n = p_n, a_{n-1} = -xp_n + p_{n-1}, \dots, t = x$  は,  $(n-1)$  次 Legendre 変換という. 次のツイスター図式と  $(n-1)$  次 Legendre 双対性をもつ:

$$\begin{array}{ccc} p_n & \longrightarrow & Z : (x, y, p_1, \dots, p_n) \longleftrightarrow (a_n, \dots, a_0, t) \longleftarrow t \\ & \swarrow & \searrow \\ M : (x, y, p_1, \dots, p_{n-1}) & & N : (a_n, \dots, a_0) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{a_n}{n!} t^n + \dots + a_1 t + a_0 \\ p_1 = \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots + a_2 t + a_1 \\ \dots \\ p_{n-2} = \frac{1}{2} a_n t^2 + a_{n-1} t + a_{n-2} \\ p_{n-1} = a_n t + a_{n-1} \\ p_n = a_n \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = p_n \\ a_{n-1} = -xp_n + p_{n-1} \\ a_{n-2} = \frac{1}{2} x^2 p_n - xp_{n-1} + p_{n-2} \\ \dots \\ a_1 = (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} p_n + \dots \\ \quad - xp_3 + p_2 \\ a_0 = (-1)^n \frac{1}{n!} x^n p_n + \dots - xp_2 + p_1 \\ t = x \end{array} \right.$$

$N$  上には完全  $n$  次関数  $y = (\alpha x + \beta)^n$  から定まる 2 次元ヌルコーンをもつ. そのとき,  $N$  における  $p_n$  をパラメーターとする曲線  $a_n = p_n, a_{n-1} = -xp_n + p_{n-1}, \dots, a_0 = (-1)^n \frac{1}{n!} x^n p_n + \dots - xp_2 + p_1$  は, ヌル直線である.  $N$  を  $n+1$  次元ベクトル空間  $V$  とみなせば,  $V \cong S^n V$  であり  $SL(2)$  の表現空間である.  $N$  は幾何構造として  $SL(2)$ -構造をもつことになる.

任意の関数  $a_0 = f(a_n)$  をとり,  $N$  におけるヌル曲線  $a_n = a_n, a_{n-1} = \sqrt[n]{n!} \int \sqrt[n]{f'(a_n)} da_n + \beta_{n-1}, a_{n-2} = -\frac{1}{2} \sqrt[n]{(n!)^2} \int \sqrt[n]{f'(a_n)^2} da_n + \beta_{n-2}, \dots, a_1 = (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \sqrt[n]{(n!)^{n-1}} \int \sqrt[n]{f'(a_n)^{n-1}} da_n + \beta_1, a_0 = f'(a_n)$  ( $\beta_i$  は定数) において,  $Z$  への逆像,  $(n-1)$ -次 Legendre 双対性,  $M$  への射影を経て, 部分  $n$ -パラメーター  $(n-1)$  次 Legendre 直線群

$$y = \frac{a_n}{n!} x^n + \frac{\gamma_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + \frac{\gamma_2}{2!} x^2 + \gamma_1 x + f(a_n)$$

( $\gamma_i$  は定数) ができ,  $a_n, \gamma_i$  を消去するために微分して,  $n$  階 Clairaut 方程式

$$y = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} x^n p_n + (-1)^{n-2} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} p_{n-1} + \dots - \frac{1}{2} x^2 p_2 + x p_1 + f(p_n)$$

ができる.

上記の  $N$  におけるヌル曲線の  $Z$  への延長リフトから,  $(n-1)$  次 Legendre 双対性を取り,  $M$  への射影によって,  $M$  における  $a_n$  をパラメーターとする  $(n-1)$  次 Legendre 曲線

$$\begin{cases} x = -\sqrt[n]{n!} \sqrt[n]{f'(a_n)} \\ \dots \\ p_{n-1} = -a_n \sqrt[n]{n!} \sqrt[n]{f'(a_n)} + \beta_{n-1} \end{cases}$$

は,  $N$  におけるそのヌル曲線の双対曲線であり, 1-パラメーター  $(n-1)$  次 Legendre 直線群 ( $\beta_i$  は定数) の反帰曲線である.

**定理**  $n$  階 Clairaut 方程式は,  $(n-1)$  次接触形式をもつ  $(n-1)$ -ジェット空間  $M$  における  $y^{(n+1)} = 0$  の解である  $(n+1)$ -パラメーター  $(n-1)$  次 Legendre 直線群における部分  $n$ -パラメーター  $(n-1)$  次 Legendre 直線群を,  $SL(2)$ -構造をもつ  $N$  におけるヌル曲線から  $Z$  への逆像,  $(n-1)$  次 Legendre 双対性,  $M$  への射影をとおして構成したものである.  $N$  におけるそのヌル曲線の双対曲線は,  $(n-1)$  次 Legendre 曲線であって, さらに部分 1-パラメーター  $(n-1)$  次 Legendre 直線群の反帰曲線であり,  $n$  階 Clairaut 方程式の特異解である.

## 5. 偏微分方程式への一般化

Clairaut 方程式とは, ツイスター空間における幾何構造に付随した曲線 (あるいは曲面) のツイスター対応したもとの空間における直線群 (あるいは平面群) の表わす微分方程式である. その方程式は, 常微分, 偏微分であったり, 単独, 連立であったり, 非拘束, 拘束であったりする. 付随した曲線 (あるいは曲面) の双対曲線 (あるいは双対曲面) が, 直線群 (あるいは平面群) の包絡線 (あるいは包絡面) である.

- $A_l (= SL(l+1))$  の場合,  $A_{l,k}$  型 Clairaut 方程式 ( $k = 2, \dots, l$ ) が考えられる.
- $C_l (= Sp(l))$  の場合,  $C_{l,k}$  型 Clairaut 方程式 ( $k = 2, \dots, l$ ) が考えられる.
- $B_l, D_l (= SO(l+1, l), SO(l, l))$  の場合,  $B_{l,k}, D_{l,k}$  型 Clairaut 方程式 ( $k = 2, \dots, l$ ) が考えられる.

ここでは紙数の関係で,  $A_{l,2}$  型と  $A_{l,l}$  型の Clairaut 方程式についてのみ述べる.

### 5.1. $A_{n+1,n+1}$ 型:

$V^{n+2}$  を  $(n+2)$  次元実ベクトル空間とする.  $V_k$  は  $V$  での  $k$  次元部分空間を表わす. すべての 1 次元部分空間の集合は射影空間  $P^{n+1}$  であり, すべての  $(n+1)$  次元部分空間の集合は双対射影空間  $P^{n+1*}$  である.  $P^{n+1}$  と  $P^{n+1*}$  の間のダブル・ファイブレーションを考える:

$$\begin{array}{ccccc} P^n & \longrightarrow & F_{1,n+1} = \{V_1 \subset V_{n+1}\} & \longleftarrow & P^n \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & P^{n+1} = \{V_1\} & & & P^{n+1*} = \{V_{n+1}\} \end{array}$$

$P^{n+1}$  と  $P^{n+1*}$  は射影構造をもつ. 空間  $Z = F_{1,n+1}$  は  $P^{n+1}$  上の接超平面束であり,  $P^{n+1}$  上の射影余接束と同一視される.  $P^{n+1}$  でのすべての超平面  $P^n$  の空間は  $P^{n+1*}$  にほかならない.

0-ジェット空間  $J^0(n, 1) \subset P^{n+1}$  とみなして, 局所座標系  $(x_1, \dots, x_n, y)$  をとる. 1-ジェット空間  $J^1(n, 1) \subset Z$  は局所座標系  $(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n)$  と標準的な接触構造  $\omega = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$  をもつ.

$P^{n+1}$  での超平面はジェネリックに

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i - b$$

によって表わされる. 定数  $(a_i, b)$  は  $P^{n+1*}$  での座標系とみなされる. そのとき次のツイスター図式と Legendre 双対性をもつ:

$$\begin{array}{ccc} p_i & \longrightarrow & Z : (x_i, y, p_i) \rightsquigarrow (a_i, b, t_i) \longleftarrow t_i \\ & \swarrow & \searrow \\ & P^{n+1} : (x_i, y) & P^{n+1*} : (a_i, b) \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_i = t_i \\ y = \sum_{i=1}^n a_i t_i - b \\ p_i = a_i \end{array} \right. & \rightsquigarrow & \left\{ \begin{array}{l} a_i = p_i \\ b = \sum_{i=1}^n x_i p_i - y \\ t_i = x_i \end{array} \right. \end{array}$$

超平面全体の集合

$$\{y = \sum_{i=1}^n a_i x_i - b \mid a_i, b : \text{定数}\}$$

の共通の性質は,  $a_i, b$ , を消去するために微分して,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

である, ここで  $p_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = a_i$ .

任意の関数  $b = f(a_1, \dots, a_n)$  をとり,  $P^{n+1*}$  での超曲面  $(a_1, \dots, a_n, f(a_1, \dots, a_n))$  を考える. その  $Z$  への逆像である  $Z$  における  $2n$  次元曲面  $(a_i, f(a_1, \dots, a_n), t_i)$  から, Legendre 双対性を取り  $(t_i, \sum_i a_i t_i - f(a_1, \dots, a_n), a_i)$  として,  $P^{n+1}$  への射影から  $(t_i, \sum_i a_i t_i - f(a_1, \dots, a_n))$  となる.  $P^{n+1}$  における  $n$ -パラメーター超平面群

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i - f(a_1, \dots, a_n)$$

$(a_i \text{ は定数})$  ができ,  $a_i$  を消去するために微分して, 1 階偏微分方程式

$$y = \sum_{i=1}^n x_i p_i - f(p_1, \dots, p_n)$$

ができる. この方程式を  $A_{n+1, n+1}$  型 Clairaut 方程式 と言おう.

上記の曲面  $(a_i, f(a_1, \dots, a_n))$  の  $Z$  への Legendre リフトである  $n$  次元曲面  $(a_i, f(a_1, \dots, a_n), \frac{\partial f}{\partial a_i})$  から Legendre 双対性を取り  $(\frac{\partial f}{\partial a_i}, \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} - f(a_1, \dots, a_n), a_i)$  として,  $P^{n+1}$  への射影から  $(\frac{\partial f}{\partial a_i}, \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} - f(a_1, \dots, a_n), a_i)$  となる.  $P^{n+1}$  における  $n$  次元曲面

$$\begin{cases} x_i = \frac{\partial f}{\partial a_i} \\ y = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial a_i} - f(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

は,  $P^{n+1*}$  における超曲面  $(a_i, f(a_1, \dots, a_n))$  の双対空間であり,  $n$ -パラメーター超平面群  $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i - f(a_1, \dots, a_n)$  の包絡空間である.

**定理**  $A_{n+1, n+1}$  型 Clairaut 方程式は,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = 0$  の完全解である  $P^{n+1}$  における  $(n+1)$ -パラメーター超平面群において, 部分  $n$ -パラメーター超平面群を,  $P^{n+1*}$  における超曲面から  $Z$  への逆像, Legendre 双対性,  $P^{n+1}$  への射影をとおして構成したものである.  $P^{n+1*}$  におけるその超曲面の双対空間は,  $n$ -パラメーター超曲面群の包絡空間であり,  $A_{n+1, n+1}$  型 Clairaut 方程式の特異解である.

## 5.2. $A_{n+1, 2}$ 型 :

すべての 1 次元部分空間の集合は射影空間  $P^{n+1}$  であり, すべての 2 次元部分空間の集合は  $2n$  次元の Grassmann 多様体  $G_{2, n+2}$  である.  $P^{n+1}$  と  $G_{2, n+2}$  の間のダブル・ファイブレーションを考える :

$$\begin{array}{ccccc} P^n & \longrightarrow & F_{1,2} = \{V_1 \subset V_2\} & \longleftarrow & P^1 \\ & \swarrow & & \searrow & \\ P^{n+1} = \{V_1\} & & & & G_{2, n+2} = \{V_2\} \end{array}$$

$P^{n+1}$  は射影構造もち,  $G_{2, n+2}$  は Grassmann 構造をもつ. 空間  $Z = F_{1,2}$  は  $P^{n+1}$  上の接直線束である.  $P^{n+1}$  でのすべての直線  $P^1$  の空間は  $G_{2, n+2}$  にほかならない.

0-ジェット空間  $J^0(1, n) \subset P^{n+1}$  とみなして, 局所座標系  $(x, y_1, \dots, y_n)$  をとる. 1-ジェット空間  $J^1(1, n) \subset Z$  は局所座標系  $(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$  と標準的な 1-形式  $\omega_i = dy_i - p_i dx$  ( $i = 1, \dots, n$ ) をもつ.

$P^{n+1}$  での直線はジェネリックに  $y_i = a_i x - b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 即ち,

$$\begin{cases} x = t \\ y_i = a_i t - b_i \quad (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

( $t$  はパラメーター) によって表わされる. 定数  $(a_i, b_i)$  は  $G_{2, n+2}$  での座標系とみなされる. そのとき次のツイスター図式と一般化された Legendre 双対性をもつ :

$$\begin{array}{ccccc} p_i & \longrightarrow & Z : (x, y_i, p_i) \rightsquigarrow (a_i, b_i, t) & \longleftarrow & t \\ & \swarrow & & \searrow & \\ P^{n+1} : (x, y_i) & & & & G_{2, n+2} : (a_i, b_i) \end{array}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y_i = a_i t - b_i \quad (j = 2, \dots, n) \\ p_i = a_i \quad (i = 1, \dots, n) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a_i = p_i \\ b_i = x p_i - y_i \\ t = x \end{cases}$$

直線全体の集合

$$\{y_i = a_i x - b_i \mid a_i, b_i : \text{定数}, i = 1, \dots, n\}$$

の共通の性質は,  $a_i, b_i$  を消去するために微分して,

$$y_i'' = 0$$

である, ここで  $p_i = y_i' = a_i$ .

任意の関数  $b_i = f_i(a_1, \dots, a_n), i = 1, \dots, n$ , をとり,  $Z$  への逆像,  $Z$  での一般化された Legendre 双対性,  $P^{n+1}$  への射影を経て,  $P^{n+1}$  における  $n$ -パラメーター直線群

$$y_i = a_i x - f_i(a_1, \dots, a_n),$$

( $a_i$  は定数) ができ,  $a_i$  を消去するために微分して, 連立 1 階常微分方程式系

$$y_i = x p_i - f_i(p_1, \dots, p_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

ができる. この方程式を  $A_{n+1,2}$  型 Clairaut 方程式と言おう.

$n$ -次元曲面  $(a_i, f_i(a_1, \dots, a_n))$  が左半平坦曲面 ( $\alpha$ -曲面) であるために  $\frac{\partial f_1}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial f_n}{\partial a_n}$  と仮定しておく. そのとき  $P^{n+1}$  における  $n$  次元曲面

$$\begin{cases} x = \frac{\partial f_i}{\partial a_i} \\ y_i = a_i \frac{\partial f_i}{\partial a_i} - f_i(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

は,  $G_{2,n+2}$  における  $n$  次元曲面  $(a_i, f_i(a_1, \dots, a_n))$  の双対空間であり,  $n$ -パラメーター直線群  $y_i = a_i x - f_i(a_1, \dots, a_n)$  の包絡空間である.

**定理**  $A_{n+1,2}$  型 Clairaut 方程式は,  $y_i'' = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の解である  $P^{n+1}$  における  $2n$ -パラメーター直線群において, 部分  $n$ -パラメーター直線群を,  $G_{2,n+2}$  における左半平坦  $n$  次元曲面から  $Z$  への逆像, 一般化された Legendre 双対性,  $P^{n+1}$  への射影をとおして構成したものである.

$G_{2,n+2}$  におけるその曲面の双対空間は,  $n$ -パラメーター直線群の包絡空間であり,  $A_{n+1,2}$  型 Clairaut 方程式の特異解である.

\*\*\*\*\*

Clairaut 方程式の研究において, 日本では特異点論との結びつきで泉屋周一さん等の研究があり, 簡潔にまとめたものが泉屋・石川著「応用特異点論」第 8 章や別冊・数理科学「現代物理と現代幾何」pp.151-159 に収録されている.

高橋雅朋さんには, 小文のコメントをしていただき感謝を申し上げます.