

- [12] van Hove limitについては、例えば、
 E.B.Davies: Quantum Theory of Open Systems(Academic Press,1976);
 V.Gorini,A.Frigerio,M.Verri,A.Kossakowski and E.C.G.Sudarshan:Rep.Math.Phys.
 13,149(1978); 一柳 正和:本研究会での報告。
 [13] I.Ojima: preprint RIMS-532('86) 及び Proceedings of International Symposium
 on Foundations of Quantum Mechanics(1987),pp.91-96。
 [14] E.B.Davies:Comm.Math.Phys.39,91(1974)。
 [15] 例えば、斎藤正彦:超積と超準解析(東京図書、1976)。
 [16] 超準解析と量子化との係わりについては、小澤・小嶋:in preparation。
 [17] 例えば、O.Bratteli and D.W.B.Robinson,Operator Algebras and Quantum
 Statistical Mechanics,vol.I & II(Springer-Verlag,1979 & 1981)。
 [18] 例えば、岩波講座現代物理学の基礎[第2版]第2巻、古典物理学II。
 [19] 例えば、[2]或いは、小嶋 泉: '86年度原子核三者若手夏の学校講義録、等。
 [20] 確率過程の文脈では、Lebowitzが多熱浴開放系として定式化し、長谷川がその有用
 性に着目してレーザの記述に応用している。長谷川 洋: 確率過程の方法による非
 平衡熱力学、1986年度基研研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告
 [物性研究47,no.5('87);素粒子論研究74,no.6('87)]、及びその末尾文献参照。
 [21] ランダウ-リフシッツ:統計物理学、第1章・第2章。
 [22] 杉本大一郎:現代天文学講座7・星の進化と終末[恒星社厚生閣、1979]、第8章。

量子系の解の安定性の一般論

慶応大・理工 福田 礼次郎

ラグランジアン $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ が与えられたとき、解の安定性はどのように決まるかを考える。こ
 こで安定性とは時間 t についての安定性であって、時刻 t_0 で考えている解のごく近くにある別の解を考え、
 その解が $t \rightarrow +\infty$ でもとの解から大きく離れるときもともと考えた解は不安定、そうでなくずれがいつも
 小さいなら安定と呼ぶ(ここで考える解自身は、有限の領域にとどまっているものとして議論を進める)。

I 古典力学系では

作用を

$$I[q] = \int dt \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

と書いたとき運動は

$$0 = \frac{\partial I[q]}{\partial q_i(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

でもとまる。その一つの解を $q_i(t) = q_i^{(0)}(t)$ として $q^{(0)}(t)$ の安定性を議論するため

$$q_i(t) = q_i^{(0)}(t) + \Delta q_i(t)$$

という解をさがす。そして $\Delta q_i(t)$ は小さいとして $\Delta q_i(t)$ の一次までとる $\Delta q_i(t)$ の満たす運動方程式は

$$0 = \frac{\partial I}{\partial q_i(t)} \Big|_{q_i(t)=q_i^{(0)}(t)+\Delta q_i(t)}$$

より

$$0 = \int dt' \left(\frac{\partial^2 I}{\partial q_i(t) \partial q_j(t')} \right)_0 \Delta q_j(t') \equiv \int dt' I_{ij}^{(0)}(t, t') \Delta q_j(t')$$

という形をしており $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ というように t について local なラグランジアンの場合は

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i(t) \partial \dot{q}_j(t)} \right)_0 \Delta \dot{q}_j(t) \right\} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_i(t) \partial q_j(t)} \right)_0 \Delta q_j(t) = 0 \quad \dots (1)$$

である。ここで $(\dots)_0$ は $q_i = q_i^{(0)}$ での値を意味し、 $\sum_j$ は省略してある。もし $\mathcal{L}$ が t を含まず $q_i^{(0)}(t) = q_i^{(0)}(t$ を含まない) ならば $I^{(2)}$ は $t - t'$ の関数となりその Fourier 変換 $I^{(2)}(\omega)$ を用いて (1) は $I^{(2)}(\omega) \equiv \int dt I^{(2)}(t) e^{i\omega t}$,

$$I_{ij}(\omega) \Delta q_j(\omega) = 0 \quad \dots (2)$$

となる。さらに

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - V(q_i)$$

のときは (2) は、次のようになる。

$$(-m\omega^2 \delta_{ij} + V_{ij}) \Delta q_j(\omega) = 0, \quad \dots (3)$$

$$V_{ij} \equiv (\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j)_0.$$

(3) を満たす ω は $\frac{1}{m} V_{ij}$ の固有値であり離散的にしか存在しない。 $\Delta q_j(\omega)$ はその固有ベクトルである。 V_{ij} を対角化する行列を S とする;

$$S^{-1} V S \equiv [V] = \begin{bmatrix} v_1 & & 0 \\ & v_2 & \\ 0 & & \dots \end{bmatrix}.$$

この S を用いると、 C_j を任意の定数として

$$\Delta q_i(\omega) = \sum_j S_{ij} \delta(-m\omega^2 + v_j) C_j$$

となり

$$\Delta q_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \Delta q_i(\omega)$$

が $t \rightarrow +\infty$ で発散しないための条件は $v_i \geq 0$ つまり V_{ij} が positive semi-definite というよく知られた条件となる。 $q_i^{(0)}(t)$ が t による 一般の場合の固有値条件——スペクトラム条件 or モード決定条件——は

$$\det I_{ij}^{(2)}(t, t') = 0 \quad \dots\dots (4)$$

である。(4) は $(i, t), (j, t')$ を行列の index とみて $\det$ をとることを意味する。(4) は量子論へ移ったとき一般化された on-shell 条件を与える。古典的にも、量子論的にも、 t に依存する background があるとき、そのまわりにどのようなモードが発生するかを決定する式である。

II 量子力学系では

q_i は operator なので c -数の変数 φ_i として q_i の ground state での期待をとる： $\varphi_i = \langle q_i \rangle$ 。Effective action $\Gamma[\varphi]$ が $I[q_i]$ と全く同じ役割をすることが判る。つまり次の様な parallelism が存在する。

$$I[q] \longrightarrow \frac{\delta I[q]}{\delta q_i(t)} = 0 \longrightarrow \int dt' \left(\frac{\delta^2 I[q]}{\delta q_i(t) \delta q_j(t')} \right)_0 \Delta q_j(t') = 0$$

$$\Gamma[\varphi] \longrightarrow \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(t)} = 0 \longrightarrow \int dt' \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_j(t) \delta \varphi_j(t')} \right)_0 \Delta \varphi_j(t') = 0$$

上の最後の式は素粒子の場の理論では粒子の spectrum を決める式で正に on-shell 条件を与える。 φ として composite field operator をとるとこれは Bound state 方程式そのものを与え $\Delta \varphi_j$ が Bound state の wave function となる。

N-粒子系で以下説明をするが、和を積分になおせば場の理論でもそのまま成立する。まず $\Gamma[\varphi]$ の定義は、

$$\Gamma[\varphi] = W[j] - \int dt j_i(t) \frac{\delta W[j]}{\delta j_i(t)},$$

$$\exp iW[j] = \int [dq] \exp i \left\{ \int dt \mathcal{L} + \int dt j_i(t) q_i(t) \right\},$$

$$\frac{\delta W[j]}{\delta j_i(t)} = \varphi_i(t).$$

φ の運動方程式は

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(t)} = 0$$

その解を $\varphi_i^{(0)}(t)$ として $\varphi_i(t) = \varphi_i^{(0)}(t) + \Delta\varphi_i(t)$ とおいて $\Delta\varphi_i(t)$ に対して,

$$\int dt' \Gamma_{ij}^{(0)}(t, t') \Delta\varphi_j(t') = 0 \quad \dots (5)$$

を得る。ただし

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(t, t') = \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(t) \delta \varphi_j(t')} \right)_0$$

である。(5) が spectrum 決定条件であることは次の関係式を見れば明らかであろう。ルジャンドル変換の性質として

$$\begin{aligned} -\delta_{ij} \delta(t-t') &= \int dt'' \Gamma_{ik}^{(2)}(t, t'') W_{kj}^{(2)}(t'', t') \\ &= \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &= \quad \quad W^{(2)} \quad \quad \Gamma^{(2)} \end{aligned}$$

ここで

$$W_{ij}^{(2)}(t, t') = \left(\frac{\delta^2 W[j]}{\delta q_i(t) \delta q_j(t')} \right)_0 = \langle T(q_i(t) q_j(t')) \rangle.$$

つまり $\Gamma^{(2)}$ は $W^{(2)}$ の逆行列 (のマイナス) で $W^{(2)}$ は causal Green's function であるから $\Delta\varphi_i$ は $W^{(2)}$ の pole に対応する eigen-vector であって我々は $W^{(2)}$ の pole をさがしているわけである。

$\varphi_j^{(0)}(t) = \varphi_j^{(0)}$ のときで, $\mathcal{L} = \frac{m^2}{2} q_i^2 - \frac{k}{2} q_i^2$ なら $\varphi_j^{(0)} = 0$ が一つの解で

$$(\Gamma_{ij}^{(2)}(\omega))_0 = (m\omega^2 - k) \delta_{ij}$$

であって $\Delta\varphi_j(\omega) \propto \delta_{ji} \delta(\omega^2 - \frac{k}{m})$ ($i = 1 \sim N$) となるから $\varphi_j^{(0)} = 0$ の stability の条件は $k > 0$ である。そして $\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$ は $W_{ij}^{(2)}(\omega)$ の pole を与える。

Bound state の方程式は φ_i として例えば bilocal field の期待値をとると出てくる。場の理論を考え

$$I = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x))$$

をとる。ここで ψ はボソンとする。そして

$$\varphi(x, y) = \langle T \psi(x) \psi(y) \rangle$$

とおく。 $W[j]$ は $\int d^4x \mathcal{L}$ に $\int d^4x \int d^4y j(x, y) \psi(x) \psi(y)$ を加え定義し

$$\Gamma[\varphi] = W[j] - \int d^4x \int d^4y j(x, y) \frac{\delta W[j]}{\delta j(x, y)},$$

$$\frac{\delta W[j]}{\delta j(x, y)} = \varphi(x, y)$$

とおく。運動方程式は

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x, y)} = 0$$

でこれがSchwinger-Dyson方程式であることはよく知られている。この1つの解を $\varphi^{(0)}(x, y)$ として $\varphi(x, y) = \varphi^{(0)}(x, y) + \Delta\varphi(x, y)$ とおくと

$$\int d^4x' \int d^4y' \Gamma^{(2)}(x, y; x', y') \Delta\varphi(x', y') = 0 \quad \dots\dots (6)$$

を得る。ただし

$$\Gamma^{(2)}(x, y; x', y') = \left(\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x, y) \delta \varphi(x', y')} \right)_0$$

であるが $\Gamma^{(2)}$ と $W^{(2)}$ はやはり逆行列 (のマイナス) の関係があるので

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x, y; x', y') &= -W^{(2)-1}(x, y; x', y') \\ &= -\langle T\psi(x)\psi(y)\psi(x')\psi(y') \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

つまり (6) は4-点causal Green's functionの2体のpoleをさがす式でこれはExactなB-S方程式のはずである。実際、 $\Gamma[\varphi]$ のdiagrammaticな表式が判っていて

$$\Gamma[\varphi] = \text{Tr} \ln \varphi - \text{Tr} \varphi \varphi_f^{-1} + r[\varphi],$$

ただし Tr は $\int d^4x \int d^4y$ のことであり φ_f は相互作用なしのときの φ の値 (free propagator) であり $r[\varphi]$ はpropagatorを φ としたときの2-particle irreducibleなvacuum diagramの和である。 $\delta\Gamma/\delta\varphi = 0$ は確かにSchwinger-Dysonを与える;

$$\varphi^{-1} - \varphi_f^{-1} = -\delta r[\varphi]/\delta\varphi \equiv \Sigma[\varphi].$$

$\Sigma[\varphi]$ はproper-self energyである。(6)式は

$$(\varphi^{-1})_{0xx'} (\varphi^{-1})_{0y'y} \Delta\varphi(x', y') = (r^{(2)})_{0x, y; x', y'} \Delta\varphi(x', y') \quad \dots\dots (7)$$

ただし $\int d^4x' \int d^4y'$ は省略した。 $(r^{(2)})_0$ は $r[\varphi]$ の2回微分の $\varphi = \varphi^{(0)}$ での値でこれは2-particle irreducible 4-体 Green's functionでまさにB-S kernelである。よって(1)はB-S equationそのものである。

II 量子力学系が有限温度にあるとき

この時もmodifyしたeffective action Γ が定義できる。(5)式に相当する固有値方程式は、こんどはcausal Green's functionではなく

$$W_{ij}^{(2)R}(t, t') = \theta(t - t') \langle [q_i(t), q_j(t')] \rangle$$

の pole つまり retarded Green's function の pole の式となる。Retarded Green's function の pole が spectrum を決めるということはよく知られた事実で、このことと一致する。

ϕ として bilocal field をとれば有限温度の B-S 方程式が得られる。このときは 4-体 Green's function の拡張された retarded combination の pole ということになる。

以上くわしくは

Stability Conditions of the Quantum System — A General Formalism — by
R. Fukuda, Prog. Theor. Phys. 78 No.6 to appear

をごらん下さい。

QCDにおける非摂動効果の計算法

慶応大・理工 福田 礼次郎

くりこんだ結合定数 g の展開の形で、摂動では零となってしまう量 ϕ — 非摂動的な量 — を求める方法を提案する。その展開式は ϕ を naive な質量次元が δ の量とし、その異常次元 r , β -関数の展開を

$$r(g) = r_1 g^2 + r_2 g^4 + \dots$$

$$\beta(g) = b_0 g^3 + b_1 g^5 + \dots$$

とすると、

$$\phi^{1/\delta} = \mu \exp \left(\frac{1}{2b_0 g^2} - \frac{1}{2b_0} \left(\frac{r_1}{b_0} + \frac{b_1}{b_0} \right) g^2 \ln g^{-2} + d_0 + d_1 g^2 + \dots \right) \quad (1)$$

のようになっているはずである。(求まるものとすれば。)

さて摂動ですべての order で零となる量を計算する最もふつうの方法は、外場 J を入れて、その存在のもとでは摂動で零でない ϕ の値が求まるようにする。そして後で外場を零としたとき、 $\phi = 0$ 以外の解があるかどうかをみるというものであろう。今本来のラグランジアンを $\mathcal{L}$, 外場によって変化した fictitious なラグランジアンを $\mathcal{L}_J$ とする。もちろん $\mathcal{L}_{J=0} = \mathcal{L}$ である。 ϕ に対応する operator $\hat{\phi}$ の期待値を $\mathcal{L}_J$ のもとで摂動で計算し、

$$\langle \hat{\phi} \rangle_J \equiv \phi = \sum_{n=0}^{\infty} g^n h_n(J) \quad (2)$$

とおく。実際は有限の order で切った (2) を採用し $J=0$ において $\phi \neq 0$ の解があるかどうかを見る。ところが (2) をそのまま $n = n_0$ で切って用いると $\phi = 0$ しか存在しない (これは明らか)。そこで次のようなことを行う。