

Trace の存在証明

名工大 小野貴生

3.1. 序

Murray-v. Neumann は可分 α -factor を有限型 von Neumann 代数において trace の存在を証明し, Dixmier が一般の有限型 von Neumann 代数の場合に拡張した. Kadison はこれらの証明の簡易化を行った. また, Yen は十分に多くの p -normal な state をもつ有限型 AW^* 代数において, Goldman は十分に多くの center の値をとる拡張された意味での p -normal な state をもつ有限型 AW^* 代数において, それぞれ, center の値をとる trace の存在を証明した. いづれの証明も, Murray-v. Neumann に淵源する相対次元と p -normal な state との比較法に由っている.

この小文で, これに関連して, つぎの定理の証明の概略を述べたい.

定理. 有限型 AW^* 代数において Dixmier trace が存在する.

(1)

§2. Reduction

A は有限型 AW^* 代数とする。以下 Z , H , P , U , W は、それぞれ、 A の center, 自己共役元, 射影元, U = ユニタリ, 準等距離元の全体とする。 A は主単位元 e を持つ。これに 1 を表はす。 P の次元函数を D , A の restricted Dixmier trace を F で表はす。

Z の character λ と Z の極大イデアル N とは対応:

$$N = \{z; \lambda(z) = 0, z \in Z\}$$

により一対一に対応する (Gelfand)。この極大イデアル N と A の極大イデアル M とは対応:

$$N = M \cap Z$$

により一対一に対応する (Wright)。この極大イデアル M を任意にとると商代数 A/M は有限型 AW^* -factor になる。(Wright-Yen, Wright が Dixmier trace の存在を仮定し, Yen がこの仮定をとり除いた。) この Wright-Yen の reduction 定理を使って, Yen は '有限型 AW^* -代数における trace の存在問題は有限型 AW^* -factor における trace の存在問題に帰着できる' ことを示した。したがって, trace の存在証明をするためには, 考察する有限型 AW^* 代数は factor としてよい。

A は有限型 AW^* -factor とする. A は discrete の場合と continuous の場合に別れるが, discrete の場合, A は複素数体 C 上の有限 n 次の行列全体のつくる有限型 AW^* -factor $(C)_n$ と同型で, $(C)_n$ では trace t は

$$t(a) = (1/n) \sum_{i=1}^n (a)_{ii},$$

つまり $a \in (C)_n$, $(a)_{ij}$ は a の ij -成分, の形で存在するから, A には trace が存在する. したがって, A は continuous の場合, すなわち type II, AW^* -factor の場合に限定してよい.

A は type II, 型 AW^* -factor とする. A (あるいは可算個の type II, 型 AW^* -factors $\{A_n\}$) から出発して新しい type II, AW^* -factor をつくり出す方法がある.

- i) $0 \neq e \in P$ をとり, eAe をつくる. これは Kaplansky により, A とともに type II, AW^* -factor となる.
- ii) A 上有限 n 次の行列全体 $(A)_n$ をつくる. これは Berberian により, A とともに type II, AW^* -factor となる.
- iii) $\{A_n\}$ の Kaplansky の意味における C^* -sum K をつくる. K の center を m とおく. m は C の有界数列全体のつくる可換 AW^* -algebra になる. m の basis $\{\xi_j\}$ ($\xi_j = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$),

δ_{ij} は Kronecker delta) ε とし, $\lambda(\xi_j) = 0$ for $\forall j$ ε なる m の character 全体 $\varepsilon \Delta$ とする. K は有限型 AW^* 代数で, $\lambda \in \Delta$ ε 任意にとつて, λ に対応する K の極大イデアル M による K の商代数 K_λ ε つくれば, Wright-Yen の reduction 定理により, K_λ は $\{A_n\}$ とともに type II, AW^* -factor になる.

A から出発して, 行列代数 $(A)_n$ ($n \geq 1$) ε つくり, $\{(A)_n\}$ の全体 $\varepsilon \Psi$ とし, $B_n \in \Psi$ ($n \geq 1$) ε とし, $\{B_n\}$ の C^* -sum K ε つくり, 任意の $\lambda \in \Delta$ に対し K_λ ε つくる, このようにしてできる K_λ の全体 $\varepsilon \overline{\Psi}$ とし, $\overline{\Psi}$ に含まれる type II, AW^* -factor の部分 Banach $*$ 代数 となる type II, AW^* -factor の全体 $\varepsilon \Gamma$ で表はす. type II, AW^* -factor B が Γ に含まれる type II, AW^* -factor と $*$ 同型に等しいと ε ' $B \in \Gamma$ ' で表はす.

補助定理 1. Γ はつぎの性質をもつ:

- 1) $A \in \Gamma$,
- 2) $B \in \Gamma$ かつ e が B の 0 でない射影元ならば $eBe \in \Gamma$,
- 3) $B \in \Gamma$ ならば $(B)_n \in \Gamma$ for $\forall n$,
- 4) $B_n \in \Gamma$ ($n \geq 1$) かつ $\lambda \in \Delta$ ならば $K_\lambda \in \Gamma$, $\equiv$ に

K_λ は $\{B_n\}$ の C^* -sum K の λ に対応する極大イデアルによる商代数.

次節においては，与えられた Type II, AW^* -factor A から出発して Γ を作り， $\rho\Gamma$ ($\in\Gamma$ といっても本質的に同じ) とする Type II, AW^* -factor のみを考察する。すなわち，無制限に左に「はん」の Type II, AW^* -factor は考える。いちいち $\rho\Gamma$ であることは断らる。また，記号 A は $\rho\Gamma$ とする任意の Type II, AW^* -factor に使う。

§3. 射影元の 1 次不等式の变形.

II₁ 型 AW^* -factor A における射影元の 1 次結合不等式

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n e_i \leq \eta \quad (\text{または } \geq \eta)$$

を簡単のため第一種 (または第二種) の関係式という，ここには， n は自然数， $\{e_1, \dots, e_n\}$ は A の射影元の系， η は実数で，

$$(2) \quad \rho = \sum_{i=1}^n D(e_i)$$

とおく。このとき，この関係式は A で定義されているという。

関係式の素材

$$(3) \quad (n, \leq, \eta, \rho) \quad (\text{または } (n, \geq, \eta, \rho))$$

は，適当な II₁ 型 AW^* -factor A が存在して，そこで定義された関係式 (1) 或 (3) をみたすものがあるとき，この関係式

(1) によって実現される，あるいは単に実現されるという。

このとき，関係式 (1) 或 (4) を実現する関係式という。以降

(5)

, 関係式の素材を單に素材という. 素材 (3) は不等号の向きが $\leq$ (または $\geq$) であるとき第一種 (または第二種) であるという.

素材 $(n, \leq, \eta, 0)$ は関係式 $\sum_{i=1}^n 0 \leq \eta$ により, 素材 $(n, \geq, \eta, n)$ は, $\eta \leq n$ のとき, 関係式 $\sum_{i=1}^n 1 \geq \eta$ により, それぞれ実現されている.

素材

$$(4) \quad (n, \leq, \eta, p^*) \quad (\text{または } (n, \geq, \eta, p^*))$$

が, $p \in$ 適当にとると素材 (3) が実現されていて,

$$(5) \quad p^* = \sup \quad (\text{または } \inf) \{p; \text{素材 (3) が実現される}\}$$

をみたすとき, この素材は最適であるという.

関係式 (1) または素材 (3) は

$$(6) \quad \eta = 0 \quad \text{または} \quad p = 0$$

であるとき trivial であるという. 関係式 (1) は

$$(7) \quad e_1 \vee \dots \vee e_n = 1 \quad \text{または} \quad \eta = p = 0$$

であるとき正規であるという. 関係式 (1) は

$$(8) \quad D(e_1) = \dots = D(e_n)$$

であるとき, 均質であるという.

最適な素材に関して下記の 3 つの基本的な補助定理が成立する.

補助定理 2. 最適素材は実現される.

補助定理 3. η が

$$(9) \quad 0 \leq \eta \leq n$$

をみたすとき, 最適素材 (4) は存在する.

補助定理 4. trivial なる最適素材を実現する関係式は正規である.

最適素材の変形に関しての 3 つの基本的な補助定理が成り立つ.

補助定理 5. 素材 (4) が最適で (9) が成り立つとき素材

$$(n, \geq, n-\eta, n-p^*) \quad (\text{または } (n, \leq, n-\eta, n-p^*))$$

は最適である.

補助定理 6. 素材 (4) が最適で

$$(10) \quad 1 \leq \eta \leq n$$

が成り立つとき素材

$$(n, \geq, n/\eta, n/p^*) \quad (\text{または } (n, \leq, n/\eta, n/p^*))$$

は最適である.

(7)

補助定理 7. 素材 $(n, \leq, r, p^*)$ (r は自然数) が最適で

(10) が成り立つとき素材

$$(r(n-r), \leq, r, (n-r)p^*/(n-p^*))$$

は最適である.

以下,

$$(11) \quad n \geq 5$$

とし,

$$\eta_1 = (n - \sqrt{n^2 - 4n})/2, \quad \eta_2 = (n + \sqrt{n^2 - 4n})/2$$

とおいて,

$$(12) \quad \eta_1 < \eta < \eta_2$$

とする. $f(t) = n-t$, $g(t) = n/t$, $S(t) = g \circ f(t)$ とおけば, f , g は t の減少函数, S は t の増加函数で, η_1 , η_2 は S の不動点で,

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta_1 \eta_2 = n.$$

(12) は f , g , S の範囲が不変. $\xi_0 = 2$, $\xi_{n+1} = S(\xi_n)$

($n = 0, \pm 1, \dots$) によって $\{\xi_n\}$ を定義する. (12) は範囲

$$\xi_{n+1} \leq \eta \leq \xi_n$$

の和集合となる.

つぎの 3 つの補助定理を準備する.

補助定理 8. 最適素材 $(n, \leq, 2, f^*)$ が存在して,

$$(13) \quad 2 \leq f^* \leq n/2.$$

補助定理 9. 最適素材 (4) が存在して,

$$(14) \quad \eta_1 < f^* < \eta_2.$$

補助定理 10. 最適素材 (4) は trivial なる…均質な関係式によって実現される.

補助定理 8 を強化して,

補助定理 11. 最適素材 $(n, \leq, 2, f^*)$ が存在して,

$$(15) \quad 2 \leq f^* < n/2.$$

τ_0 は素材 $(5, \leq, 2, 5/(2+\tau_0))$ が最適という = とで定義する. $2 \leq 5/(2+\tau_0) < 5/2$ から

$$(16) \quad 0 < \tau_0 < \infty.$$

$\{m_s\} (s \geq 0)$ は

$$(17) \quad m_0 = 5, \quad m_{s+1} = 2(m_s - 2) \quad (s \geq 0)$$

で定義する, すなわち

$$m_s = 4 + 2^s \quad (s \geq 0).$$

(9)

$\{\alpha_s\} \ (s \geq 0)$ を

$$(18) \quad \alpha_0 = 5/(2+\tau_0), \quad \alpha_{s+1} = (m_s-2)\alpha_s/(m_s-\alpha_s) \quad (\alpha \geq 0)$$

で定義する, すなわち

$$\alpha_s = (4+2^s)/(2+\tau_0 \cdot 2^s) \quad (s \geq 0)$$

であって

$$(19) \quad \alpha_s \rightarrow 1/\tau_0 \quad (s \rightarrow \infty).$$

各 s に対して, $r=r_s=m_s/2$ とおいて, $\{n_k\}$ を

$$(20) \quad n_0 = 2r, \quad n_{k+1} = r(n_k - r) \quad (k \geq 0)$$

で定義する, すなわち

$$n_k = r^2/(r-1) + \beta r^k \quad (k \geq 0),$$

ここに, β は

$$(21) \quad n_0 = r^2/(r-1) + \beta$$

によってきめる. $\{\beta_k\}$ を

$$(22) \quad \beta_0 = 2r(1-1/\alpha_s), \quad \beta_{k+1} = (n_k - r)\beta_k/(n_k - \beta_k) \quad (k \geq 0)$$

で定義する, すなわち

$$\beta_k = (r^2/(r-1) + \beta r^k) / (r/(r-1) + \alpha r^k) \quad (k \geq 0),$$

ここに, α は

$$(23) \quad \beta_0 = n_0 / (r/(r-1) + \alpha)$$

によってきめる. このとき,

$$(24) \quad \beta_k \rightarrow \beta/\alpha \quad (k \rightarrow \infty).$$

また,

$$(25) \quad \theta = (1 - \tau_0) / \tau_0$$

とおくと,

$$(26) \quad 1 \leq \theta < \infty$$

で

$$(27) \quad \beta / (r\alpha) \rightarrow \theta \quad (s \rightarrow \infty).$$

つぎの 3つの補助定理を準備する.

補助定理 12. $(n, \leq, 2, p_n) \ (n \geq 5)$ を最適素材とすれば, $p_n \uparrow 1/\tau_0$.

補助定理 13. $(n, \leq, r, p_n) \ (n \geq 5)$ を最適素材とすれば, $p_n \uparrow \beta/\alpha$.

補助定理 14. $0 < \theta\varepsilon < 1$ かつ $(n, \leq, 1/(1-\varepsilon), p^*)$ が最適であれば, $p^* \leq 1/(1-\theta\varepsilon)$.

補助定理 15. $(n, \leq, r, p^*)$ が最適素材とすれば, $p^* \leq \theta r$.

補助定理 16. $\theta = 1$.

(11)

以上の準備の下に,

補助定理 17. $\sum_{i=1}^n e_i \leq \eta$ ならば $\sum_{i=1}^n D(e_i) \leq \eta$.

34. 定理の証明.

補助定理 18 を 2 つ 準備する.

補助定理 18. $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \leq \eta$ ならば $\sum_{i=1}^n \alpha_i D(e_i) \leq \eta$,
 二に, η は実数, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ は正の実数, $\{e_1, \dots, e_n\}$
 は射影元の系.

補助定理 19. $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\| \leq \varepsilon$ ならば $|\sum_{i=1}^n \alpha_i D(e_i)| \leq \varepsilon$,
 二に, $\varepsilon > 0$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ は実数の系, $\{e_1, \dots, e_n\}$ は
 射影元の系.

補助定理 19 を使って定理が証明できる.

定理の証明. $A \in \Pi$ 型 AW^* -factor, $F \in A$ の restricted
 trace, $a, b \in H$ とし

$$(28) \quad F(a+b) = F(a) + F(b)$$

が証明できれば, F は trace によって定理の証明が終る.

(12)

さて, $\varepsilon > 0$ を与える. $a \in H$ に対し, 実数の系 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ と射影元の系 $\{e_1, \dots, e_m\}$ がとれる

$$(29) \quad \|a - \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i\| \leq \varepsilon$$

かつ

$$(30) \quad |F(a) - \sum_{i=1}^m \alpha_i D(e_i)| \leq \varepsilon$$

与えられる. $b \in H$, $a+b \in H$ に対しても同様に, 実数の系 $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$, 射影元の系 $\{f_1, \dots, f_m\}$, $\{g_1, \dots, g_r\}$ がとれる

$$(31) \quad \|b - \sum_{j=1}^m \beta_j f_j\| \leq \varepsilon$$

$$(32) \quad |F(b) - \sum_{j=1}^m \beta_j D(f_j)| \leq \varepsilon$$

$$(33) \quad \|(a+b) - \sum_{k=1}^r \gamma_k g_k\| \leq \varepsilon$$

$$(34) \quad |F(a+b) - \sum_{k=1}^r \gamma_k D(g_k)| \leq \varepsilon$$

与えられる. (29) (31) (33) から

$$\|\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^m \beta_j f_j - \sum_{k=1}^r \gamma_k g_k\| \leq 3\varepsilon,$$

補助定理 19 を使って

$$(35) \quad |\sum_{i=1}^m \alpha_i D(e_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j D(f_j) - \sum_{k=1}^r \gamma_k D(g_k)| \leq 3\varepsilon.$$

(30) (32) (34) (35) から

$$|F(a) + F(b) - F(a+b)| \leq 6\varepsilon.$$

$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば, (28) を得る.

3.5. 補遺.

(13)

補助定理 11 を証明するために、以下の補助定理が使われる。

補助定理 20. $xx^* \leq x^*x \implies xx^* = x^*x$.

補助定理 21. $0 \leq a \leq b$ かつ $F(a) = F(b) \implies a = b$

補助定理 22. $F(e+f) = D(e) + D(f)$

補助定理 23. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は射影元の系で

$$D(e_1) = D(e_2) = D(e_3) = D(e_4) = 1/2$$

かつ

$$e_1 + e_2 \leq e_3 + e_4$$

ならば、

$$e_1 + e_2 = e_3 + e_4.$$

以上