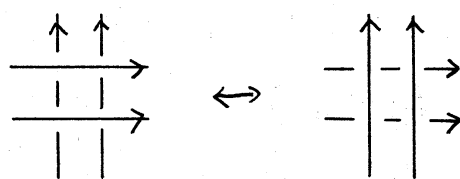


Some metric functions on classical knots

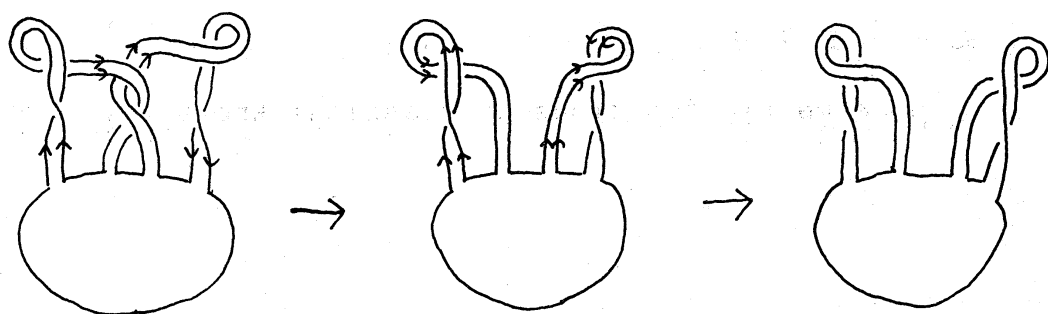
大阪市大 村上 斉 (Hitoshi Murakami)

結び目をほどくという操作を, 2つ考える。まず, よく知られている *unknotting operation* がある。これは, 結び目の *projection* の交差の上下を入れかえる操作である。すべての結び目は, この操作を有限回行なうことでほどけることは, すぐにおかる。

もう一つの操作として, 次のような *#-unknotting operation* が考えられる。この操作を有限回行なうことで, すべての結



び目がほどけることを, 以下に 4_1 -結び目 (*figure-eight knot*) を例にとって示す。



(結び目に, 向き
付け不能な曲面を
はり, standard form
にする。)

(band をほどく)

(band のねじれを
とって できあがり)

これら2つの結び目をほどく操作を使って, 結び目の間の
距離を次のように定義する。

定義0 $\begin{cases} d_G(K, K') = \min (K \text{ から } K' \text{ を得るために必要} \\ \text{な unknotting operation の数}) \\ d_G^\#(K, K') = \min (K \text{ から } K' \text{ を得るために必要} \\ \text{な \#-unknotting operation の数}) \end{cases}$

また $\begin{cases} u(K) = d_G(K, 0) \\ u^\#(K) = d_G^\#(K, 0) \end{cases}$ (0 は 自明な結び目)

とおく, (結び目には, 向きをつけておく。)

d_G を Gordian distance, $d_G^\#$ を $\#$ -Gordian distance,
 $u(K)$ を unknotting number, $u^\#(K)$ を $\#$ -unknotting number
と呼ぶ, $u(K)$ は, 多くの人によ, て研究されている。([1],

[5], [7], [8], [10], [11], [16])

なお, なぜ Gordian か, については, [12] の序文を参照されたい。

§1 Gordian distance

まず, [10] により, unknotting operation を一度ほどこせば, 結び目の signature は -2 , 0 , or 2 だけ変わるので,

定理 1.1 $d_G(K, K') \geq \frac{1}{2} |\sigma(K) - \sigma(K')|$

がわかる。これは, K' が自明のとき [10, Theorem 10.1] と一致する。

例 $K(p, 2)$ を, $(p, 2)$ -torus knot とすれば (p : odd),

$$d_G(K(p, 2), K(q, 2)) = \begin{cases} \frac{1}{2} |p - q| & (pq > 0) \\ \frac{1}{2} |p - q| - 1 & (pq < 0) \end{cases}$$

M_K を, S^3 の K に沿った double branched cover, $D(K)$ を, K の determinant (つまり $|H_1(M_K)|$), $\lambda: H_1(M_K) \times H_1(M_K) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を M_K の linking form とする。

定理 1.2 $dg(K, K') = 1$ ならば, ある $a \in H_1(M_K)$ と, ある $a' \in H_1(M_{K'})$ が存在して, $\lambda(a, a) \equiv \pm n/D(K)$, $\lambda(a', a') \equiv \pm n/D(K') \pmod{1}$ が成り立つ。
ただし, $n = \frac{1}{2} |D(K) - D(K')|$ である。

証明は, K と K' の Seifert matrix が, それぞれ $\left(\begin{array}{c|c} c & * \\ \hline * & v \end{array} \right)$, $\left(\begin{array}{c|c} c \pm 1 & * \\ \hline * & v \end{array} \right)$ の形で与えられることと, M_K の linking form が, K の Seifert matrix S により $-(S + S^t)^{-1}$ で与えられること ([15], [2]) を使えばよい。(S^t は S の転置行列。)

定理 1.2 を, 2-bridge knot $K_{p,q}$ (double cover が lens space $L_{p,q}$ となる結び目) に適用することにより, 次の系が得られる。

系 $dg(K, K_{p,q}) = 1$ ならば, ある整数 ρ が存在して, $\pm \rho^2 \equiv \frac{1}{2} |p - D(K)| \pmod{p}$ となる。

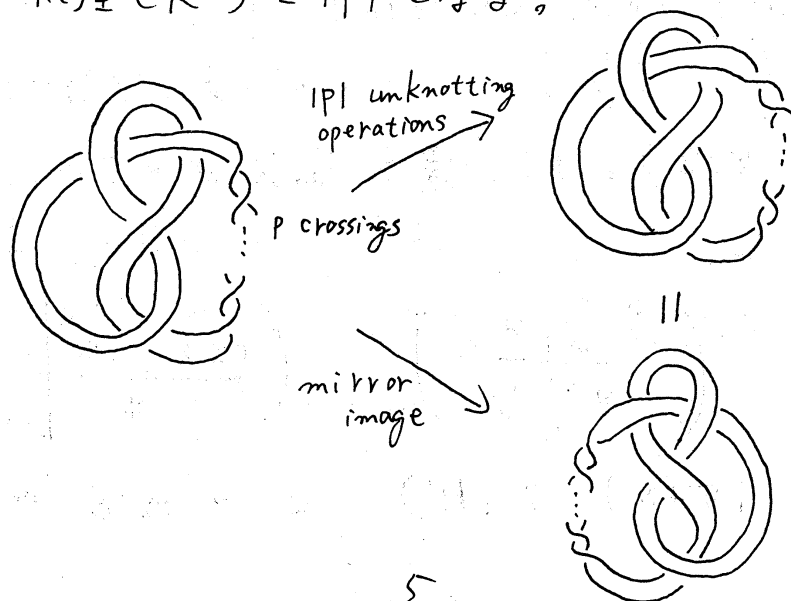
例 4_1 -結び目は, 2-bridge knot $K_{5,2}$ と表わされるので, $dg(K, 4_1) = 1$ ならば, $D(K) \equiv 1, 5, \text{ or } 9 \pmod{10}$ でなければならぬ。特に, trefoil knot 3_1
4

は, $D(3,) = 3$ であるから, $d_G(3, 4) = 2$, つまり, 一度の unknotting operation では, 3_1 から 4_1 は得られないことがわかる。

上の系は, 任意の正の奇数 α に対し, $u(K) = 1$ かつ $D(K) = \alpha$ となる結び目 K が存在する ([6], [14]) ことと比較すると興味深い。

τK を, K の鏡像, $-K$ を, K の向きを変えたものとしたとき, $\text{Ref}_+(K) = d_G(K, \tau K)$, $\text{Ref}_-(K) = d_G(K, -\tau K)$, $\text{Inv}(K) = d_G(K, -K)$ とおき, それぞれ K の positive reflection distance, negative reflection distance, inversion distance と呼ぶ。定理 1.1 より, $\text{Ref}_\pm(K) \geq |\sigma(K)|$, また, $\text{Ref}_\pm(K(p, 2)) = |p| - 1$ となることはすぐにはわかる。

K^p を figure-eight knot の $(2, p)$ -cable とすると, 次の図より $\text{Ref}_\pm(K^p) \leq |p|$ となる。



また, $|\sigma(K^p)| = |p| - 1$ だから, $\text{Ref}_{\pm}(K^p) = |p| - 1$ or $|p|$ である。 K^p の exterior の torus 分解 ([3], [4], を考えれば, $\text{Ref}_{\pm}(K^1) = 1$ となることは証明できるが, $|p| \geq 3$ に対して $\text{Ref}_{\pm}(K^p) = |p|$ となるかどうかは, わからない。

§2 # - Gordian distance

まず, signature との関係を述べる。

定理 2.1 $d_G^{\#}(K, K') = 1$ なる $|\sigma(K) - \sigma(K')| = 2, 4, \text{ or } 6$ である。

証明には, [2] による signature の計算法を使う。 # - unknotting operation が, 同じ band の上下の入れ換えに対応するときは, K と K' の Goeritz matrix (定義は [2] による) がそれぞれ $\left(\begin{array}{c|c} c & * \\ * & v \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|c} c \pm 4 & * \\ * & v \end{array}\right)$ で与えられるので, $|\sigma(K) - \sigma(K')| = 2 \text{ or } 4$ となる。また, 違う band の上下の入れ換えに対応するときは,

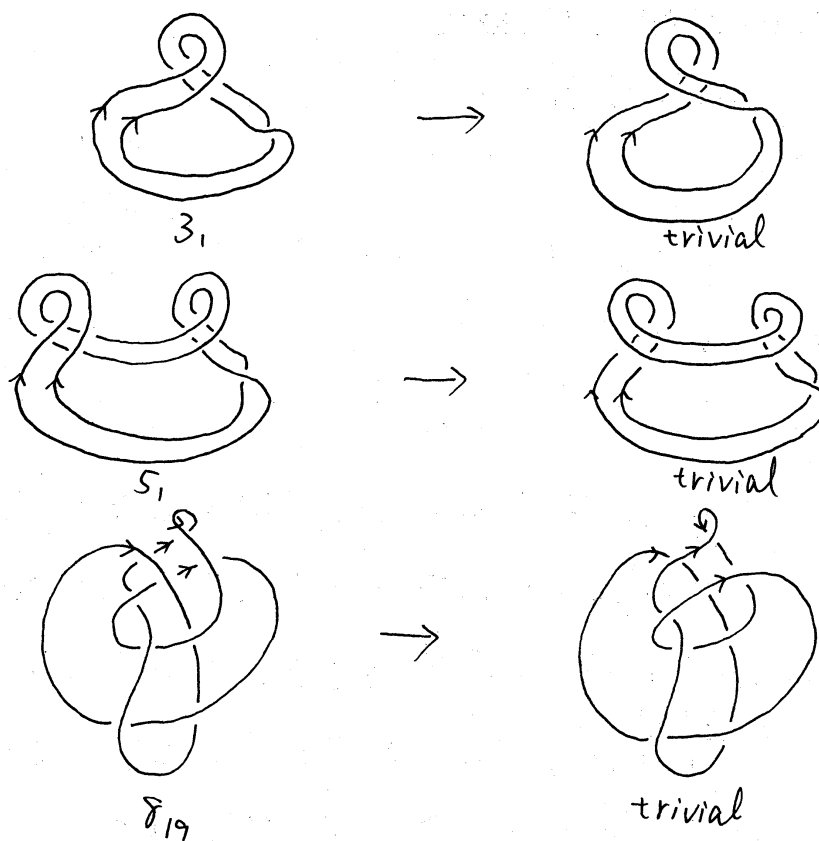
$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & * \\ c & h & * \\ * & * & v \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} a & c \pm 2 & * \\ c \pm 2 & h & * \\ * & * & v \end{array}\right)$$

となるので, $|\sigma(K) - \sigma(K')| = 2, 4, \text{ or } 6$ がわかり,

証明が終る。

系 $d_G^\#(K, K') \geq \frac{1}{6} |\sigma(K) - \sigma(K')|$

例 次の図により, $u^\#(3_1) = u^\#(5_1) = u^\#(8_{19}) = 1$ であるが, $|\sigma|$ は, それぞれ 2, 4, 6 である。



#-unknotting operation が,  という link との fusion または fission に対応していることに注意すれば, [13] により

定理 2.2 $d_G^\#(K, K') \equiv \text{Arf}(K) + \text{Arf}(K') \pmod{2}$

が得られる。ただし, $\text{Arf}(K)$ は, K の Arf 不変量である。

例 定理 2.1, 2.2 より, $u^\#(4_1) = 3$ となる。($u^\#(4_1) \leq 3$ は, 2 ページ目の図よりわかる。) また, $d_G^\#(4_1, 3_1) = 2$ である。

渋谷氏から, $u^\#(K(p, 2)) = \lfloor \frac{1}{4}(p+1) \rfloor$ (p は正, $\lfloor \rfloor$ は Gauss 記号) が一般に成り立つのではないかと教えていただいたのだが, 上の系が役に立たないこともあって正しいかどうかは, まだわからない。($u^\#(K(p, 2)) \leq \lfloor \frac{1}{4}(p+1) \rfloor$ はすぐにもわかる。)

最後に, §1 と同様に, $\text{Ref}_\pm^\#(K)$, $\text{Inv}^\#(K)$ が定義でき, 定理 2.2 より, これらはすべて偶数の値をとることを注意しておく。

詳しい証明などは, [9] を参照されたい。

References

- [1] M. Boileau et C. Weber : Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des noeuds algébriques, Publication interne, Genève, 1983.
- [2] C. McA. Gordon and R. A. Litherland : On the signature of a link, Invent. Math., 47(1978), 53-69.
- [3] W. Jaco and P. Shalen : A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds, Proc. of Symp. in Pure Math. A.M.S. 32(1977), 209-222.
- [4] K. Johannson : Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries, Lect. Notes in Math. 761, Springer-Verlag, 1979.
- [5] S. Kinoshita : On Wendt's theorem of knots, Osaka Math. J., 9(1957), 61-66.
- [6] H. Kondo : Knots with the unknotting number 1 and their Alexander polynomials, Osaka J. Math., 16(1979), 551-559.
- [7] W. B. R. Lickorish : The unknotting number of a classical knot, preprint, 1982.
- [8] J. Milnor : SINGULAR POINTS OF COMPLEX HYPERSURFACES, Ann. Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [9] H. Murakami : Some metrics on classical knots, preprint, 1984.
- [10] K. Murasugi : On a certain numerical invariant of link types, Trans. A.M.S., 117(1965), 387-422.
- [11] Y. Nakanishi : A note on unknotting number, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 9(1981), 99-108.
- [12] Y. Nakanishi : Unknotting number について, 「代数幾何学に應用を見込んだトポロジー」記録, (1983), 207-221.

- [13] R. Robertello : An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math., 18(1965), 543-555.
- [14] T. Sakai : A remark on the Alexander polynomials of knots, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 5(1977), 451-456.
- [15] H. Seifert : Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11(1935), 84-101.
- [16] H. Wendt : Die gordische Auflösung von Knoten, Math. Z., 42 (1937), 680-696.