

分解不可能かつ可約な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形の存在問題について

前多 啓一 (東京大学数理科学研究科)

Keiichi Maeta (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

2019 年 10 月 8 日

1 はじめに

本稿のテーマは、分解不可能かつ可約な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形の存在問題である。まず、2つの視点から問題の背景について述べ、その後、この問題に対し2つのアプローチを試みる。1つは、Lie 群の性質を用いた手法、もう1つは Lie 代数のコホモロジーを用いた手法である。

1.1 分解不可能な擬リーマン対称空間

多様体 M の各点 $p \in M$ に対し、その点を孤立固定点に持つような接続を保つ微分同相写像 $\sigma_p : M \rightarrow M$ をもつものを対称空間という。この σ_p は点対称と呼ばれる。対称空間 M は等質空間であり、 M に推移的に作用する Lie 群 G およびその閉部分群 H を用いて $M = G/H$ と表すことができる。この Lie 群の対 (G, H) (また、その Lie 代数の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) を対称対という。対称空間は、球面やトーラス、上半平面など、等質空間の中でも「性質の良い」多様体のクラスであり、幾何学的に重要な例を多く含む。その中でも、リーマン対称空間 (H がコンパクト) の分類は É. Cartan によって行われた。それは、単連結なリーマン対称空間は接空間への H の作用によって、既約リーマン対称空間の直積として分解できることに基づき、既約リーマン対称空間を分類するというものである。その後、Berger[Ber57] によって、非リーマン (H が非コンパクト) を含む既約対称空間が分類された。しかし、擬リーマン対称空間の分類問題は未解決である。これは、擬リーマン対称空間は接空間に退化する部分空間を持つため、可約であったとしても、既約擬リーマン対称空間の積に分解するとは限らないためである。擬リーマン対称空間としてそれ以上分解できない「最小単位」は、分解不可能な擬リーマン対称空間と呼ばれ、その分類が擬リーマン対称空間の分類の目標となる。分解不可能なローレンツ対称空間は Cahen–Wallach[CW70] によって、符号 $(n, 2)$ の擬リーマン対称空間は Kath–Olbrich ら [KO09] によって完全に分類されている。

1.2 Clifford–Klein 形

Clifford–Klein 形を定義するために、群作用の性質である固有不連続性を復習しておく。

定義 1.1 (固有不連続). 群 Γ が空間 M に固有不連続に作用するとは、任意の2点 $p, q \in M$ に対し、その近傍 U, V が存在して、 $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap V \neq \emptyset\} < \infty$ となることを言う。

群 Γ の多様体 M への作用が固有不連続かつ自由であることと、 $\Gamma \backslash M$ の多様体構造が一意に存在して、自然な全射 $\pi: M \rightarrow \Gamma \backslash M$ が可微分な被覆写像となることは同値となる。もし作用が固有不連続でなければ、 $\Gamma \backslash M$ は Hausdorff でずらなくなり、固有不連続であって、自由でなければ、オービフォールドと呼ばれる空間になる。

以下では、 G を Lie 群、 H をその閉部分群とする。Clifford–Klein 形とは、等質空間 G/H を、固有不連続かつ自由に作用する離散部分群 $\Gamma \subset G$ で割った商空間 $\Gamma \backslash G/H$ に、上でのべた多様体構造を入れた空間をいう。 $\pi: G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ は被覆写像であり、 G/H の G -不変幾何構造は、Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ も自然に持つことになる。

G/H がリーマン等質空間 (H がコンパクト) の場合、任意の離散部分群 $\Gamma \subset G$ は、空間に固有不連続かつ自由に作用するため、Clifford–Klein 形の研究は G の離散部分群の研究とほぼ同義となる。一方、 G/H が非リーマン (H が非コンパクト) の場合には、離散部分群の作用が固有不連続になるとは限らない。この場合に対する 1980 年の小林俊行による研究 [Kob89] 以降、非リーマンな等質空間に対する Clifford–Klein 形が研究され始めた。小林によって提起された Clifford–Klein 形の重要な未解決問題の 1 つに、コンパクト Clifford–Klein 形をもつ等質空間 G/H の分類問題がある。

問題 1.2. [Kob89] コンパクト Clifford–Klein 形をもつ等質空間 G/H を分類せよ。

この問題に対する手法として、Benoist–Kobayashi の固有性判定法に基づく Lie 群論的手法 ([Ben96],[Kob96]) や、行列要素の漸近挙動の解析に基づく手法 ([Mar97])、Lie 代数のコホモロジーを用いた手法 ([KO90],[Mor15]) などが用いられている。既約な対称空間 G/H に対しては、現在までに 12 系列の対称空間に対しコンパクト Clifford–Klein 形の存在が知られている [KY05]。既約な対称空間の場合、リー群 G は簡約群であり、多くの研究においては簡約群の Clifford–Klein 形の分類を目標とされてきた。

1.3 問題および主結果

既約な対称空間に対する Clifford–Klein 形の問題についての研究が多い一方、「最小単位」である分解不可能な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形は少ない。そこで、次のような、問題 1.2 の部分問題を考える。

問題 1.3. 可約かつ分解不可能な擬リーマン対称空間 G/H でコンパクト Clifford–Klein 形を持つものを分類せよ。

この問題に対する先行研究としては、Lorentz 対称空間に関して [KO15] がコンパクト Clifford–Klein 形を持つための必要十分条件を与えているが、一般の次元に対しては調べられていない。

詳しい記号の定義は 2 章以降で述べることにして、主結果を先に述べる。一つ目は、コンパクト Clifford–Klein 形を持つための必要条件である。

定理 1.4. $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $D' = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ とするとき、 $G_{D,D'}/H$ (定義 2.1 を参照) がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、ある $\{\varepsilon_i\} \in \{\pm 1\}^n$ で

$$\sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \quad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0,$$

を満たすものが存在する。ただし、 $c_i := \sqrt{a_i} \sqrt{b_i}$ である。

例えば, 符号 $(4, 1)$ の可約かつ分解不可能な Lorentz 対称空間のパラメーター空間は, 球面で与えられる. この必要条件を満たす空間は, その中でも, 以下の図における円で与えられる. 実際には, この条件の稠密な部分集合の空間がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことが知られている [KO15].

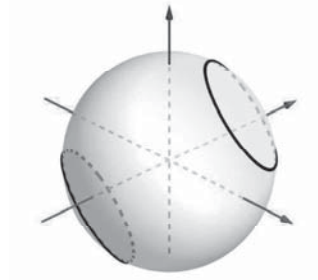


図 1 パラメーター空間および必要条件を満たすパラメータ

主結果の二つ目は, 符号 $(2, 2)$ におけるコンパクト Clifford–Klein 形をもつ空間の分類定理である.

定理 1.5. 分解不可能な擬リーマン対称空間 G/H で以下を満たすものは, $G_{I_{1,1}, -I_{1,1}}/H$ に局所同型である.

1. G は可解群であり, G/H の移換群である.
2. G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持つ.
3. G/H の次元は 4 以下である.

2 対称空間 $G_{D,D'}/H$ の定義

まず, 主結果に登場する擬リーマン対称空間を定義する.

定義 2.1. $D, D' \in GL(n, \mathbb{R})$ を対称かつ可逆な行列とし, $W \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ を以下で定義する.

$$W := \begin{pmatrix} & D' \\ D & \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}).$$

ハイゼンベルク代数 $\mathfrak{h}_n := \mathbb{R}\text{-span}\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$ ($[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$) に対し, 以下の写像を考える.

$$\rho: \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der } \mathfrak{h}_n \quad X \mapsto \begin{pmatrix} X & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき, 以下のように定義する.

$$\mathfrak{g}_{D,D'} := \mathbb{R}W \ltimes_{\rho} \mathfrak{h}_n, \quad \mathfrak{h} := \mathbb{R}\text{-span}\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

部分空間 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ を, $\mathfrak{q} := \mathbb{R}\text{-span}\{W, X_1, \dots, X_n, Z\}$ とすると, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ となり, $G_{D,D'}/H$ の接空間は自然に $\mathfrak{q}$ と同一視できる. さらに, $\mathfrak{q}$ 上の内積を, 以下で定義する.

$$g := \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & D'^{-1} & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

$G_{D,D'}$ を, $\mathfrak{g}_{D,D'}$ を Lie 代数に持つような 1-連結 Lie 群とし, H を, $\mathfrak{h}$ に対応する解析的部分群とする.

命題 2.2. D' の符号を (p, q) とするとき, $G_{D,D'}/H$ は符号 $(p+1, q+1)$ の分解不可能かつ可約な対称空間の構造を持つ.

3 Lie 群的なアプローチ

3.1 主定理の証明の流れ

この節では, 定理 1.5 の証明の流れについて述べる.

まず, 定理の条件を満たすもののリストは, 以下で与えられる.

事実 3.1. [KO09] 分解不可能かつ可約な符号 $(2, 2)$ の, 冪零でない可解な擬リーマン対称空間の Lie 代数の対称対は以下の D, D' に対応する $(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h})$ で与えられる.

1. $D = \text{diag}(\pm 1, a), D' = I_{1,1} \ (a \in \mathbb{R}^\times),$
2. $D = -P^{-1} \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 1 & -\nu \end{pmatrix} Q, D' = -Q^{-1} \begin{pmatrix} -\nu & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix} P,$
 ただし, $P = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/(1+\nu^2) \\ 1 & -\nu/(1+\nu^2) \end{pmatrix} \ (\nu \in \mathbb{R}),$
3. $D_\pm = \begin{pmatrix} \pm 2 & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}, D'_\pm = \pm \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$

したがって, 対称空間 $G_{D,D'}/H$ のコンパクト Clifford–Klein 形の存在を調べれば良い, それを判定するための必要十分条件を与えるために, ハイゼンベルク群 H_n の部分群 L_C を定義しておく.

定義 3.2. $C \in M(n, \mathbb{R})$ に対し, $\mathfrak{l}_C$ を, 以下の行列で定まる線形写像 $f_C: \mathfrak{h}_n \rightarrow \mathfrak{h}_n$ の像とする.

$$\begin{pmatrix} I_n & C & \mathbf{0} \\ O & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \in M(2n+1, \mathbb{R})$$

ただし, $\mathfrak{h}_n$ の基底は, $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$ で与える. このとき, $\mathfrak{l}_C$ は $\mathfrak{h}_n$ の部分代数であり, これに対応する $G_{D,D'}$ の解析的部分群を L_C と書く.

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.3. 可逆な対称行列 D, D' に対し, 以下の条件は同値である.

- (a) 対称空間 $G_{D,D'}/H$ はコンパクト Clifford–Klein 形を持つ.
- (b) ある行列 $C \in M(n, \mathbb{R})$ で, 以下の条件を満たすものが存在する.
 - (i) 行列 $A_t + B_t C$ は全ての $t \in \mathbb{R}$ に対し, 可逆である.
 - (ii) 部分群 $L_C \subset G_{D,D'}$ はある $l \in G_{D,D'} \setminus H_n$ に対し, T_l -不変な格子を持つ.

ここで, T_l は $l \in G_{D,D'}$ に関する内部自己同型であり, $A_t, B_t \in M(n, \mathbb{R})$ は次で定義される行列である.

$$X_t = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ * & * \end{pmatrix} := \exp t \begin{pmatrix} & D' \\ D & \end{pmatrix}.$$

この命題を、事実 3.1 のリストの D, D' に対し適用することで、求める定理を得ることができる。以下では、この命題の証明のキーアイデアを述べたい。

3.2 連続類似と (L)-condition

コンパクト Clifford–Klein 形の存在を調べる上で重要な考え方の一つとして、連続類似がある。これは、小林 [Kob89] によって導入されたアイデアであり、以下の事実が本質的である。

事実 3.4. [Kob89] Lie 群 L が多様体 M に可微分に作用しているとし、 $\Gamma \subset L$ を余コンパクト離散部分群とする。このとき、以下が成り立つ。

1. $\Gamma \backslash M$ がコンパクト $\iff L \backslash M$ がコンパクト
2. Γ の作用が固有不連続 $\iff L$ の作用が固有

ただし、 L の作用が固有であるとは、任意のコンパクト集合 $S \subset M$ に対し、集合 $L_S := \{\ell \in L \mid \ell S \cap S \neq \emptyset\}$ が L の中でコンパクトであることを言う。離散部分群の作用に対しては、固有不連続性と固有性は一致する。

この事実により、扱いづらい離散部分群の作用を L の作用に置き換えて考えることができる。特に、 L が連結であれば、Lie 代数を用いた解析が可能である。例えば、 G が冪零 Lie 群のとき、その離散部分群 Γ は、syndetic hull と呼ばれる連結閉 Lie 部分群 L を保つことが知られている ([Sai57], [BK10])。しかし、この事実は一般の可解群に対しては成り立たない。そこで、以下の概念を新しく導入する。

定義 3.5 ((L)-condition). Lie 部分群 $L' \subset G_{D,D'}$ が (L)-condition を満たすとは、 $L_0 = L' \cap H_n$ が連結であり、ある $l \in L' \setminus L_0$ で、 $L' = \langle l \rangle L_0$ となるものが存在することを言う。

この (L)-condition は、連結とは限らないが、「連結に近い」部分群の条件であり、Lie 代数を用いた解析が可能になる。さらに、以下で述べるように、 $G_{D,D'}/H$ にコンパクト Clifford–Klein 形が存在するとすれば、(L)-condition を満たす部分群が常に存在する。

命題 3.6. Γ を $G_{D,D'}$ の離散部分群で、 $G_{D,D'}/H$ に余コンパクトに作用するとする。 $L_0 = L \cap H_n$ とすると、 $l \in \Gamma$ で、 $L' := \langle l \rangle L_0$ となる L' が存在し、 Γ を余コンパクトに含む。さらに、 $\Gamma \cap L_0$ は L_0 の余コンパクト部分群である。

次の命題は、(L)-condition を満たす L' の余コンパクト性と固有性の判定条件を与えている。

命題 3.7 (余コンパクト性と固有性の判定条件). D, D' を対称かつ可逆な行列とし、 L' を $G_{D,D'}$ の部分群で (L)-condition を満たすとする。 $L_0 := L' \cap H_n$ とするとき、次の条件は同値である。

- (a) L' の $G_{D,D'}/H$ への作用が余コンパクトかつ固有である。
- (b) ある行列 $C \in M(n, \mathbb{R})$ が存在し、 $L_0 = L_C$ であり、 $A_t + B_t C$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し可逆である。(記号は定義 3.2 および命題 3.3 を参照)

命題 3.6 と命題 3.7 を用いることで、 $G_{D,D'}/H$ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、命題 3.3 の条件 (b)(i) が成り立つことがわかる。条件 (b)(ii) は L_C が余コンパクトな離散部分群 Γ を持つための必要十分条件である。

4 コホモロジーを用いたアプローチ

4.1 コホモロジーに現れる障害

この節では、定理 1.4 の証明の流れについて述べる。この証明には、Lie 代数のコホモロジーに現れるコンパクト Clifford–Klein 形の障害を用いる。この手法は小林-小野 [KO90] において提起され、森田 [Mor15] により発展した。

G を Lie 群とし、 H をその閉部分群、 $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{h}$ を G および H の Lie 代数とする。 G/H の不連続群 $\Gamma \subset G$ に対し、Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ を考える。このとき、以下の包含写像を考える。

$$\eta : (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^{\mathfrak{h}} \simeq \Omega(G/H)^G \rightarrow \Omega(G/H)^{\Gamma} \simeq \Omega(\Gamma \backslash G/H)$$

ただし、 $\Omega(G/H)$ は G/H 上の微分形式の集合、 $\Omega(G/H)^G$ は G -不変な微分形式の部分集合を表す。この写像は、コホモロジーの準同型を誘導する。

$$\eta : H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\Gamma \backslash G/H)$$

このとき、以下の事実が成り立つ。

事実 4.1 ([BH72],[KO90]). Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクトならば、

$$\eta : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/H).$$

は単射である。ただし、 $N := \dim(G/H)$ とする。

森田 [Mor15] はこれを以下の形の障害として定式化した。

事実 4.2 ([Mor15],[Mor17]). K_H を H の極大コンパクト部分群とし、 $\mathfrak{k}_H$ をその Lie 代数とする。 G/H がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、自然な全射 $\pi : G/K_H \rightarrow G/H$ が誘導する以下の写像は単射である。

$$\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R}),$$

ただし、 $N := \dim(G/H)$ とする。

4.2 対称空間 $G_{D,D'}/H$ への適用

特に、 G が 1 連結な可解 Lie 群のとき、コンパクトな連結部分群は自明群しかないため [Hoc65]、 $G_{D,D'}/H$ に対し、上の事実を適用すると、以下のような障害になる。

命題 4.3. 等質空間 $G_{D,D'}/H$ がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、自然な全射 $\pi : G_{D,D'} \rightarrow G_{D,D'}/H$ が誘導する以下の写像 π^* は単射である。

$$\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}; \mathbb{R}) \quad (N = n + 2).$$

次の補題が定理の証明に本質的である。

補題 4.4. 可逆な対角行列 $D = \text{diag}(a_i)$, $D' = \text{diag}(b_i)$ に対し、以下は同値である。

- (a) $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}_{D,D'} : \mathbb{R})$ は単射である。
 (b) $\exists \varepsilon \in \{\pm 1\}^n$ s.t. $\sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0$, $\sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0$.

ただし, $c_i := \sqrt{a_i} \sqrt{b_i}$ である.

定理 1.4 の証明は, 以下の図式のように, 命題 4.3 と補題 4.4 を組み合わせること従う.

$$\begin{array}{ccc}
 G_{D,D'}/H \text{ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ} & \xrightarrow[\text{命題 4.3}]{=} & \pi^* \text{ は単射} \\
 & & \updownarrow \text{補題 4.4} \\
 & & \exists \varepsilon \in (\pm 1)^n \text{ s.t. } \sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \quad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0
 \end{array}$$

また, D, D' が 2 次対称行列のとき, 次の命題が言える.

命題 4.5. D, D' が 2 次対称行列のとき, 次は同値である.

- (a) $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}_{D,D'} : \mathbb{R})$ は単射である。
 (b) $\exists k \in \mathbb{R}^\times$ s.t. $D' = kD^{-1}$.

この命題を使うことで, 次の補題が簡単に証明でき, 定理 1.5 をより簡潔に証明できる.

補題 4.6. 事実 3.1 の D, D' のうち, 2.(a) における $a = 1$ 以外のパラメータに対応する空間は, コンパクト Clifford-Klein 形を持たない.

参考文献

- [Ben96] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)*, 144(2):315–347, 1996.
 [BH72] R. Bott and A. Haefliger. On characteristic classes of Γ -foliations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78:1039–1044, 1972.
 [BK10] A. Baklouti and I. Kédim. On non-abelian discontinuous subgroups acting on exponential solvable homogeneous spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):1315–1345, 2010.
 [Hoc65] G. Hochschild. *The structure of Lie groups*. Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam, 1965.
 [KO90] T. Kobayashi and K. Ono. Note on Hirzebruch’s proportionality principle. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 37(1):71–87, 1990.
 [KO09] I. Kath and M. Olbrich. On the structure of pseudo-Riemannian symmetric spaces. *Transform. Groups*, 14(4):847–885, 2009.
 [KO15] I. Kath and M. Olbrich. Compact quotients of Cahen-Wallach spaces. *ArXiv e-prints*, January 2015.
 [Kob89] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285(2):249–263, 1989.

- [Kob96] T. Kobayashi. Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory*, 6(2):147–163, 1996.
- [KY05] T. Kobayashi and T. Yoshino. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited. *Pure Appl. Math. Q.*, 1(3, Special Issue: In memory of Armand Borel. Part 2):591–663, 2005.
- [Mar97] G. Margulis. Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients. *Bull. Soc. Math. France*, 125(3):447–456, 1997.
- [Mor15] Y. Morita. A topological necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms. pages 1–13, May 2015.
- [Mor17] Y. Morita. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):1931–1953, 2017.
- [Sai57] M. Saito. Sur certains groupes de Lie résolubles. II. *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 7:157–168, 1957.