

研究論文

X線CTを利用したボイド形状の特徴観察と CFRP樹脂支配型強度へのボイドの影響の評価

新玉 重貴^{*1}, 橋爪 良輔^{*2}, 古賀 貢史^{*2}, 西川 雅章^{*3}, 北條 正樹^{*4}, 松田 直樹^{*5}

(2017年11月9日受付)

Evaluation of the Effect of Voids on Matrix-Dominated Strength of CFRP Based on Void Shape Characterization Using X-ray CT

Shigeki ARATAMA,^{*1} Ryosuke HASHIZUME,^{*2} Koshi KOGA,^{*2}
Masaaki NISHIKAWA,^{*3} Masaki HOJO^{*4} and Naoki MATSUDA^{*5}

(Received November 9, 2017)

Abstract: In this study, void distributions in unidirectional carbon fiber-reinforced plastic (CFRP) laminates were measured using X-ray computed tomography (CT), and the stress concentrating effects of the voids on the reduction of the CFRP matrix-dominated strength were modeled. We first investigated the statistical features of the void sizes, geometrical shapes, and locations by analysis of the X-ray CT three-dimensional images. The natural logarithms of the void sizes showed a three-dimensional normal distribution; consequently, the void shapes and aspect ratios were correlated. Next, using the measured results regarding the voids, the stress concentration effect on the reduction of transverse tensile strength was modeled based on the Weibull model considering the volume dependence of strength. From the results, we attributed the decrease in the matrix-dominated strength with increases in void volume fraction to the increase in stress concentration volumes accompanying the increased number of voids.

Key words: Polymer-matrix composites (PMCs), Void, Matrix-dominated strength, X-ray computed tomography (CT), Weibull model

1. 緒 言

軽量・高強度なCFRP (carbon fiber reinforced plastics)を用いた部材の製造において、設計された成形条件からの差異によって材料内にボイド (空孔) と呼ばれる欠陥が発生することがあり、構造強度に影響する。近年、

CFRPの適用が特に拡大している航空機構造では、その影響を十分な試験結果に対する統計的な分析に基づいて正しく評価することが、必要な強度を確保する上で必要不可欠である。特に、CFRPは異方性の強度特性を持つ材料であるため、安全性を確保しながら、より効率的な機体構造を設計する観点からは、その異方性を把握した上で活かすような設計を行う必要がある。同時に、ボイドのような構造内の欠陥による強度への影響について、力学的な理解に基づいて適切に考慮し、部材の設計に反映する手法を確立することが求められている。

CFRP構造の品質保証において、部材内部のボイドの有無や量については、製造時欠陥の一つとして、超音波検査を用いて評価されることが通例となっている¹⁾。従来、この超音波検査では、ボイド体積含有率という指標を用いて、材料内部のボイド量が、超音波の材料への入射波に対する透過波あるいは反射波の減衰率との間の相

^{*1} 川崎重工業株式会社航空宇宙カンパニー 基幹職
Senior Staff Officer, Aerospace Company,
Kawasaki Heavy Industries, Ltd.

^{*2} 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻 修士課程 (注: 本研究従事時)

Graduate Student, Department of Mechanical
Engineering and Science, Kyoto University

^{*3~*5} 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻
Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

^{*3} 准教授 Associate Professor, ^{*4} 教授 Professor,

^{*5} 助教 Assistant Professor

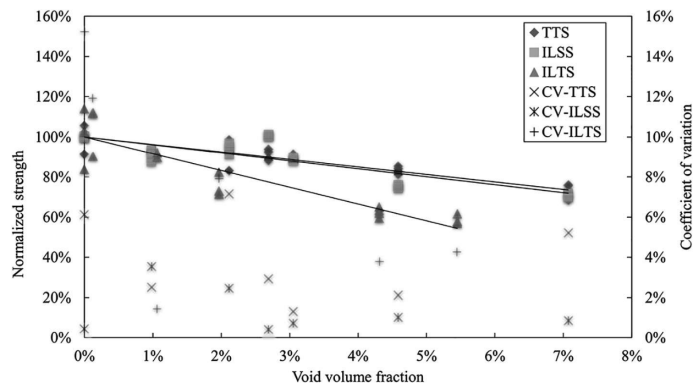


Fig. 1 V_v vs TTS, ILSS and ILTS results with CV of respective strengths.⁹⁾ TTS, transverse tensile strength; ILSS, inter-laminar shear strength; ILTS, inter-laminar tensile strength. Note: Each test result was normalized using the average of respective results for $V_v=0\%$.

関に基づいて評価されている^{2,3)}。過去の多くの研究では、このように評価されたボイド体積含有率とCFRPの強度の関係について実験的に研究されてきた^{4~8)}。これらの研究では、CFRP内部のボイドは、特に、繊維直方向引張強度や層間せん断強度、層間引張強度といった樹脂支配型強度を大きく低下させることが報告されている。樹脂支配型強度とは、マトリクス破壊を主な破壊モードとする負荷形態における強度を指す。一方で、このボイド体積含有率と強度低下率の関係に注目すると、同一のボイド体積含有率であっても、負荷形態によって強度低下量は必ずしも同じではなく⁹⁾、ボイド体積含有率を用いた単純な複合則を強度低下量の予測に適用することはできない。

著者らは先行研究⁹⁾において、成形条件の差異により意図的にボイドを内部に導入した試験片を用いて、上記の樹脂支配型強度の低下量に及ぼすボイド体積含有率の影響を調べた。Fig. 1に示すように、いずれの強度も、ボイド体積含有率の増加に伴って強度が低下したが、その低下量は負荷形態によって異なっていた。これは、負荷形態によって、ボイドが周囲の材料に対して異なる応力集中効果をもたらしたためであると考察したが、詳細なモデル化は行っていない。ボイド量と強度低下量を関係づける一つの仮説として、ボイドによる応力集中効果の総和に応じて強度低下が生じる可能性が考えられる。応力集中効果は、主にボイドの寸法的特徴に依存すると考えられることから、本研究ではこの観点からの詳細な検討を目的とした。

一つのアプローチとして、CFRP内部に形成されたボイドを可視化する手法により、その寸法や形状の特徴を

定量化することで、ボイドのアスペクト比のようなパラメータと応力集中の関係について注目する方法が考えられる。近年、高解像度X線CT(computed tomography)とその画像処理技術の発展により、CFRP内部のボイドを非破壊かつ3次的に可視化できるようになってきた。この方法を用いると、従来の超音波検査では得られなかった、ボイドの分布状況や個々のボイドの寸法と形状が詳細に同定できる。

これらの情報は、例えば、ボイドの分布状況と損傷発生との関係を実験的に調べる上で役立つ。一例として、Lambertら¹⁰⁾は、ボイドを含むGFRP積層板に対する引張-圧縮疲労試験を実施し、その前後でX線CT撮影を行うことで、ボイドと疲労破壊発生メカニズムの関係性を調べている。一方、X線CT画像から得られたボイドの3次元形状情報を用いて、直接的にイメージベースで有限要素モデルを構築することで、ボイドによる応力集中効果について解析された例もある。Nikishkovら⁷⁾やSeonら¹¹⁾は、ボイドを含む試験片に対して屈曲はり4点曲げ試験を実施して層間引張強度へのボイドの影響を調査した。試験前後でのX線CT画像を基に、破壊起点と予想されるボイドを同定し、その一つのボイドを有限要素モデルに組み込んで解析を実施して破壊荷重を予測する方法を提案した。

しかしながら、これらの過去の研究では、破壊起点と考えられるボイドを観察結果から仮定した検討となっている。一方で、実際に既定の成形条件からの差異により形成したボイドはCFRP内部に多数存在する。したがって、上述の成果からは、ボイドの増加に伴って、強度低下が大きくなる点が十分には説明されない。多数の欠陥

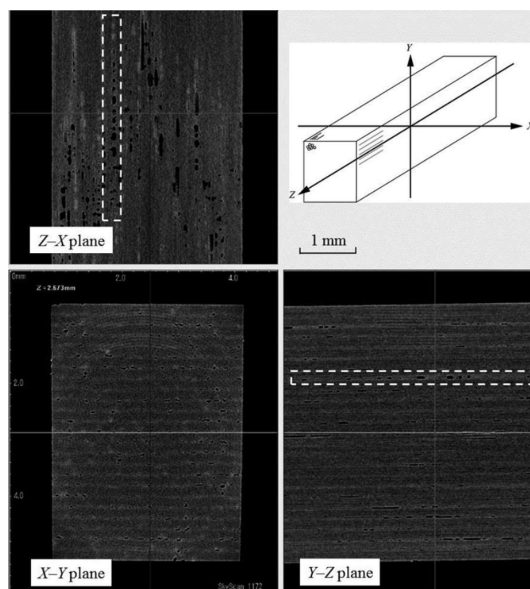
と強度の関係については、従来、例えばCFRPの繊維における欠陥と引張強度の関係においては最弱リンク仮説に基づくワイブルモデル¹²⁾が適用されてきた¹³⁾。これにより強度の体積依存性が表現される。樹脂支配型強度についても脆性的な破壊様相を示すことから、この考え方を応用して、強度の体積依存性を整理することが試みられてきた^{14~20)}。(Wisnom¹⁷⁾によって、強度の寸法効果の要因、および、繊維引張方向強度や樹脂支配型強度に関する寸法効果の実験結果が系統的にレビューされている。)ここで、ボイドは大きさ、位置、形状等の状況によって、必ずしも破壊の起点となる欠陥にはならないことから、周囲の材料に応力分布を生じさせる応力集中源として影響するものと仮定する。ボイドの寸法や形状に依存して応力集中効果やその効果の及ぶ範囲は異なることから、CFRP内部に形成された多数のボイドの応力集中効果と強度低下との関係について、実際にボイドの寸法や形状を同定した上で検討することが重要である。

そこで本研究では、CFRP一方向積層板に形成されたボイドの材料内での分布や寸法、形状をX線CTにより統計的に整理するとともに、ボイドによる応力集中効果がCFRP樹脂支配型強度低下に与える影響についてワイブルモデルを用いてモデル化した。まず、2章では、既報⁹⁾にてボイド体積含有率と強度低下の関係について調査したCFRP一方向積層板から切り出した試験片に対して、3次元的にボイドの寸法や形状、位置といった特徴量を測定した。主な傾向は既報で報告済みであるが、統計的分析を加えることで、ボイド寸法の統計的特徴について明らかにすることを目的とした。次に、3章では、測定結果に見られたボイドの特徴を踏まえたうえで、各ボイドが引き起こす応力集中領域の体積が強度低下に寄与すると仮定することで、ボイドによる応力集中効果と強度低下の関係についてモデル化した。ここでは、破壊の標定部における応力分布がおおよそ無視できる繊維直交方向引張強度 (Fig. 1におけるTTS (transverse tensile strength)) に対して、モデル化を実施した。

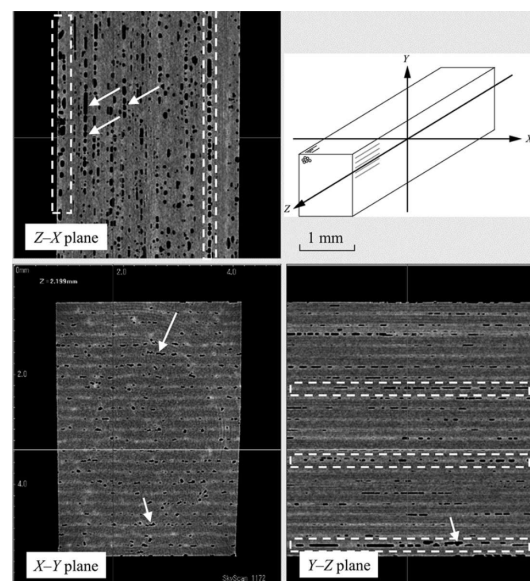
2. ボイドの寸法と形状の実験的計測

2.1 X線CT撮影

著者らの過去の実験⁹⁾に使用したCFRP一方向平板 $[0_{24}]$ について、X線CTによりボイドを観察するため、幅3mm、長さ20~30mmの試験片を切り出した。板厚は4.6mmであった。積層板は炭素繊維と180℃硬化のエポキシ樹脂で構成されるプリプレグUTS50/#135(東邦テナックス)を成形したものである。積層板内部のボ



(a) 2.1% void volume fraction



(b) 3.1% void volume fraction

Fig. 2 X-ray CT scan image of the specimens with voids for measured data.

イドは、成形条件を意図的に変化させることにより導入しており、ボイド体積含有率 V_v は0%, 1.0%, 2.1%, 2.7%, 3.1%, 4.6%, 7.1%の7種類である。X線CT撮影に用いた試験片の寸法は、ボイドの解像度をできるだけ高くする観点から決定した。具体的には、板厚は積層

板のままで、幅は板厚より少し小さく設定した。長さは、ボイドの長さより十分長い観察領域に加えて、装置への着脱の都合等を考慮した。X線透過画像の撮影では後述する Fig. 2 の Z 軸周りに試験片を回転させるため、上記の板厚と幅の設定により、幅方向にも板厚方向と同等の観察領域を確保しながら、線源をできるだけ試験片に近づけられるようにし、解像度を可能な限り高くすることとした。

試験片の X 線 CT 撮影には高解像度マイクロ CT スキャナ (SkyScan 1172, Bruker) を用いた。線源の管電圧は 100 kV、管電流は $41 \mu\text{A}$ とした。X 線透過画像撮影時の回転角ステップは 0.2° とし、試験片が一回転するまで撮影を行った。取得した X 線透過画像は、装置メーカー提供の画像再構成ソフトウェア (SkyScan NRecon, Bruker) により、断層画像として再構築した。X 線 CT スキャン画像のサイズは 2,000 ピクセル $\times$ 1,336 ピクセルであり、1 ピクセルあたりの長さは $3.39 \sim 3.66 \mu\text{m}$ であった。 ($V_v=1.0\%$, 7.1% の試験片: $3.66 \mu\text{m}$, $V_v=2.1\%$, 2.7% , 3.1% の試験片: $3.39 \mu\text{m}$, $V_v=4.6\%$ の試験片: $3.52 \mu\text{m}$). Z 方向の分解能 (1 ピクセルあたりの長さ) は上記の二次元画像における寸法と等しく、Z 方向ピクセル数は約 1,318 $\sim$ 1,336 であった。再構成した立体像の X, Y, Z 寸法に関して、 $X=3.0 \text{ mm}$, $Y=4.6 \text{ mm}$, $Z=4.5 \sim 4.9 \text{ mm}$ であった。 ($V_v=1.0\%$, 7.1% の試験片: 4.9 mm , $V_v=2.1\%$, 2.7% , 3.1% の試験片: 4.5 mm , $V_v=4.6\%$ の試験片: 4.7 mm .)

Fig. 2 に、ボイドを含む試験片に対する X 線 CT 画像を示す。Fig. 2(a), (b) はそれぞれ、 $V_v=2.1\%$, 3.1% の試験片の画像である。繊維に直交な断面 (X-Y 断面) 画像の濃淡値が高い縞状の領域にボイドが多数存在していることが分かる。すなわち、ボイドは局所的に樹脂の存在比率が高い層間領域に分布する傾向があることが分かる。これらのボイドは図中の鎖線で示した部分のように、同一直線状に整列している傾向があった。また、ボイドの形状については、既報⁹⁾でも述べた通り、層間領域に沿って扁平な形状を取っており、繊維方向に長い円柱状や楕円球状であることが分かる。なお、ボイド体積含有率の異なる試験片において、ボイドの形状や分布に関して観察された傾向に特段の変化は見られなかった。

2.2 ボイドの寸法と形状に関する統計的分析

まず、取得した X 線 CT 画像を用いたボイド寸法の計測方法について述べる。手順は以下に示す通りである。

(1) まず、再構成した断層画像を画像処理ソフト VG Studio Max 2.2 (Volume Graphics) により立体画像

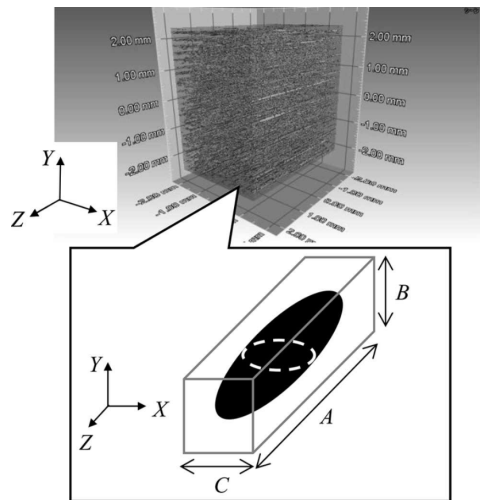
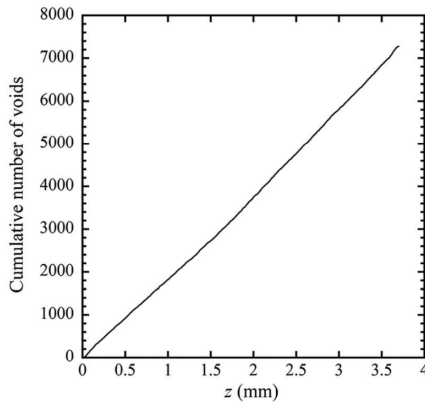


Fig. 3 (a) Measurement of size and position of voids by image processing.

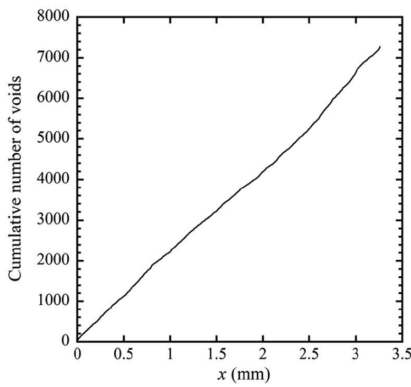
として可視化し、解析を行った。

- (2) 読み込んだグレースケールの立体画像に対して、分析対象とする関心領域 (region of interest, ROI) を定義した。
- (3) ソフトウェアの欠陥解析機能 (グレースケールの閾値による判定アルゴリズム) を用いて、ボイドの自動検出を行った。これにより、ROI 内でボイドとして定義された部分の位置座標、寸法データを画像から計測した。

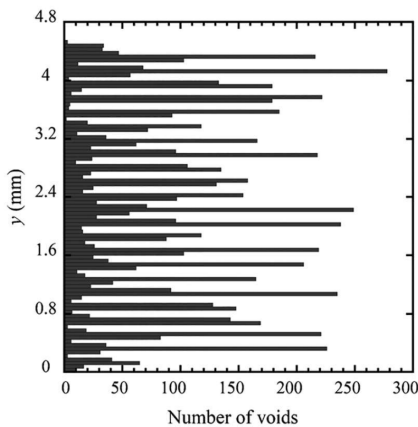
CFRP 内部のボイドは繊維方向に長い円柱状や楕円球状であることから、ボイドの寸法を、ボイドに外接し、各辺が座標軸に平行な直方体の辺の長さとして計測した。それぞれ X 軸 (幅方向), Y 軸 (積層方向), Z 軸 (繊維方向) に対するボイドの寸法をそれぞれ A , B , C として表記する (Fig. 3(a)). B は、3 方向の寸法の中で最も小さい値を示す傾向にあり、およそ $30 \sim 50 \mu\text{m}$ である。X 線 CT 画像の解像度が $5 \mu\text{m}$ 程度であることから、 B の測定精度 (分解能) は、 A , C と比較して劣るものと考えられる。また、ROI の設定の制約から、ボイドの繊維方向 (Z 方向) 長さ C は、その全長を計測できていないデータが複数含まれていることには注意が必要である。ただし、十分多数のボイドが含まれるように観察しているため、議論の一般性は失わないものとする。実際にそれぞれの試験片で抽出したボイドの数は、各ボイド体積含有率に対して、 $V_v=1.0\%$: 2,450 個, $V_v=2.1\%$: 7,279 個, $V_v=2.7\%$: 9,924 個, $V_v=3.1\%$: 14,141 個, $V_v=4.6\%$: 15,651 個, $V_v=7.1\%$: 15,424 個



(i) Cumulative distribution in fiber direction: Z-direction

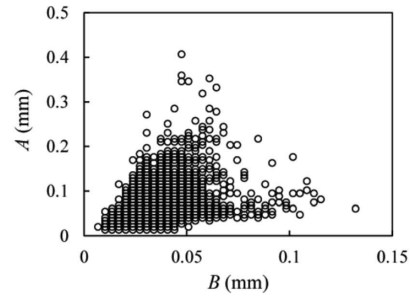


(ii) Cumulative distribution in 90° direction: X-direction

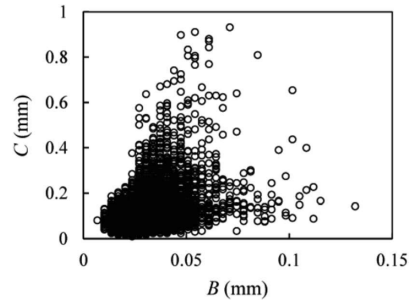


(iii) Frequency distribution in thickness direction: Y-direction

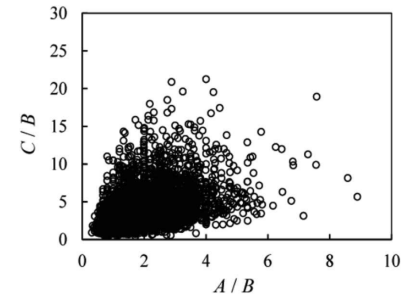
Fig. 3 (b) Distribution of number of voids ($V_v = 2.1\%$).



(a) Correlation of size between B and A



(b) Correlation of size between B and C



(c) Correlation of aspect ratio

Fig. 4 Correlation with regard to void size and aspect ratio.

であった。得られたボイドの位置座標から、ボイドは層間領域に局在する以外は空間的に様に分布している。この結果の一例として、 $V_v = 2.1\%$ の場合について繊維方向 (Z 方向)、90° 方向 (X 方向)、板厚方向 (Y 方向) の座標に対するボイドの個数分布を Fig. 3 (b) に示した。繊維方向と 90° 方向についてはボイドの累積個数が位置座標に対して概ね線形に増加していることから、板厚方向に直交する面内では空間的に様にボイドが分布していることが分かる。ボイドの個数分布に周期的なピークが存在し、その周期は一層の厚さにおよそ一致していることから、ボイドが板厚方向には層間領域に局在している。

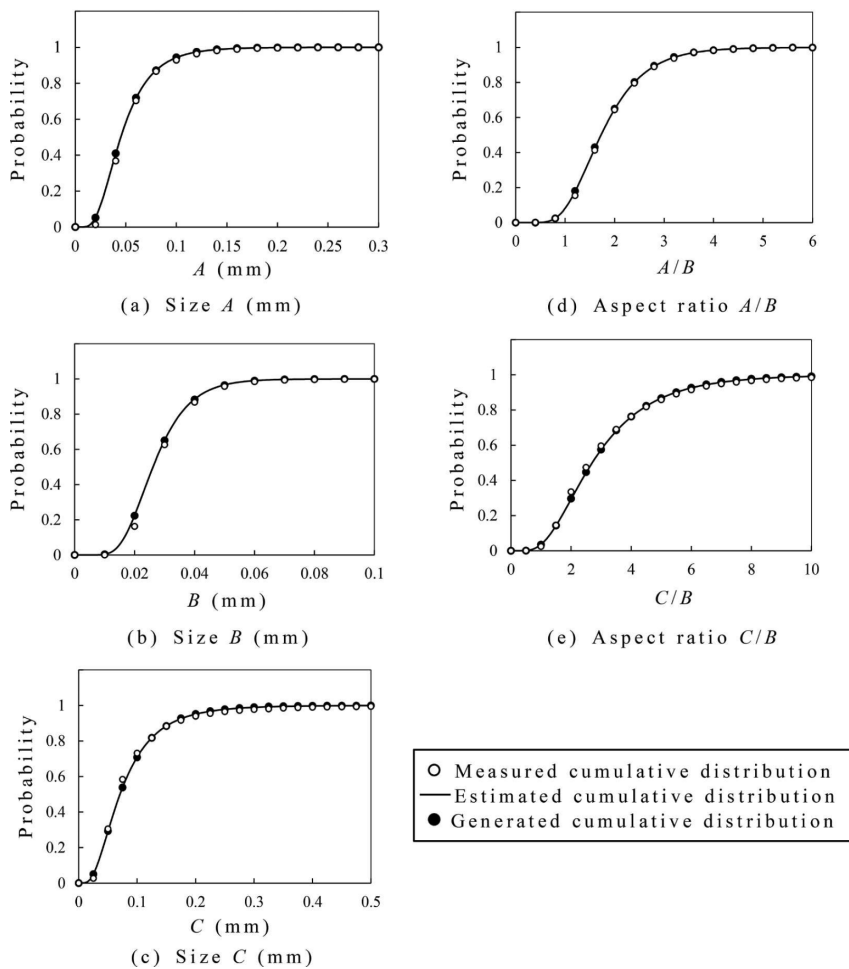


Fig. 5 Verification of fitting to log-normal distribution for 2.1% void volume fraction.

次に、上記の手法によって得られたボイド寸法の計測結果について統計的に検討する。まず、Fig. 4において、 $V_v=2.1\%$ の場合について、ROI内の個々のボイドの各軸方向寸法やアスペクト比についての相関を検討した。Fig. 4(a), (b)は、各ボイドの寸法 B に対してそれぞれ A , C をプロットしている。プロット点は原点付近に頂点を持つ三角形に分布している。このように、プロット点の存在しない領域があり、個々のボイドの寸法には相関関係が存在する。同様に、Fig. 4(c)は、アスペクト比 A/B に対して C/B をプロットした。プロット点の分布が、Fig. 4(a), (b)と同様の分布を示すことから、アスペクト比に関しても相関関係が存在することが分かる。

以上の観察を踏まえて、個々のボイドの寸法やアスペクト比に対して、対数正規分布が成立することを示す。

既報⁹⁾において、ボイドの寸法やアスペクト比は対数正規分布に従っており、ボイド体積含有率に対して大きく変動しないことを述べた（このことは後出の Fig. 6 においても述べる）。そこで、Fig. 5において、 $V_v=2.1\%$ の場合を例として、寸法 A , B , C とアスペクト比 A/B , C/B に対して、対数正規分布を仮定して得た累積分布関数と、実際の計測結果から得た相対累積度数分布を比較した。ここで、確率変数 W が対数正規分布に従うとき、確率密度関数および累積分布関数は、

$$f(w|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma w} \exp\left\{-\frac{(\ln w - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1)$$

$$F(w|\theta) = \int_0^w f(w|\theta) dw$$

$$0 < w < \infty, \Theta = \{\theta = (\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty\}$$

で与えられる。このとき、 Θ は母数空間で、 μ, σ は母数空間に含まれる定数であり、以下のように求められる。 W の標本数を N とすると、 W の自然対数 $\ln(W)$ に対する標本平均および標本不偏分散は次式で表せる²¹⁾。

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \ln W^{(m)} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N \{\ln W^{(m)} - \hat{\mu}\}^2\end{aligned}\quad (2)$$

母数 μ, σ が未知のとき、標本数 N が十分大きければ、確率密度関数および累積分布関数は、式(2)の推定量を用いて近似できる。Fig. 5 に見られるように、ボイドの寸法やアスペクト比は、対数正規分布としての近似と良い一致を示しており、これらは異なる母数をもつ対数正規分布に従うとみなせる。

一方、Fig. 4 で見られたように、寸法やアスペクト比どうしはそれぞれ相関性を持つと考えられるため、この相関性について検討する。対数正規分布に従う確率変数 W は、その自然対数 $\ln W$ を考えると正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う。寸法 A, B, C に対してそれぞれ対数正規分布が成り立つことから、これをベクトル変数に対して考える。すなわち、それぞれ異なる母数を持つ対数正規分布に従う A, B, C は、その自然対数が3次元正規分布に従うと仮定する。このとき、 $\ln A, \ln B, \ln C$ の任意の線形結合は1次元の正規分布に従うため、アスペクト比 $A/B, C/B$ や断面積、体積のように、ボイドの寸法 A, B, C に対する乗除算で表される量は寸法と同様に対数正規分布に従うと考えられる。したがって、「①ボイドの寸法やアスペクト比が対数正規分布に従うこと」と「②ボイドの寸法やアスペクト比に相関性があること」は、「ボイドの寸法 A, B, C について、確率変数ベクトル $\mathbf{V}=(\ln A, \ln B, \ln C)^T$ が3次元正規分布に従う」ことによる帰結という仮説が立てられる。

まず、①について考える。実際に、 $\mathbf{V}=(\ln A, \ln B, \ln C)^T$ が3次元正規分布に従うとすると、ボイド計測から得られた標本データから確率ベクトル $\mathbf{V}$ の平均ベクトル $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\{\hat{\mu}_i\}$ と共分散行列 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}[\hat{\Sigma}_{ij}]$ を推定できる。その成分は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_i &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N V_i^{(m)} \\ \hat{\Sigma}_{ij} &= \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N (V_i^{(m)} - \hat{\mu}_i)(V_j^{(m)} - \hat{\mu}_j)\end{aligned}\quad (3)$$

任意の定数ベクトル $\mathbf{t}=(t_1, t_2, t_3)^T$ による確率ベクトル $\mathbf{V}$ の線形結合

$$\mathbf{t}^T \mathbf{V} = t_1 V_1 + t_2 V_2 + t_3 V_3 \quad (4)$$

Table 1 Comparison of measured and estimated statistic parameter of aspect ratio in natural logarithm.

(a) Comparison of $\ln(A/B)$

Void volume fraction	Measured values		Estimated values	
	Mean	Variance	Mean	Variance
1.0%	0.4349	0.1444	0.4349	0.1444
2.1%	0.5452	0.1533	0.5452	0.1533
2.7%	0.5286	0.1450	0.5286	0.1450
3.1%	0.5827	0.1391	0.5827	0.1391
4.6%	0.5934	0.1558	0.5934	0.1558
7.1%	0.6032	0.1713	0.6032	0.1713

(b) Comparison of $\ln(C/B)$

Void volume fraction	Measured values		Estimated values	
	Mean	Variance	Mean	Variance
1.0%	1.3739	0.2644	1.3739	0.2644
2.1%	0.9952	0.3043	0.9952	0.3043
2.7%	0.8510	0.2910	0.8510	0.2910
3.1%	0.9804	0.2653	0.9804	0.2653
4.6%	1.0385	0.3565	1.0385	0.3565
7.1%	1.3180	0.4045	1.3180	0.4045

で定義されるスカラーの確率変数 $\mathbf{t}^T \mathbf{V}$ に対して、平均と分散は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^T \mathbf{V} &\sim N(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \\ E(\mathbf{t}^T \mathbf{V}) &= \mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} \\ V(\mathbf{t}^T \mathbf{V}) &= \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\end{aligned}\quad (5)$$

式(3)と(5)を基に算出した $\ln(A/B)$ 、 $\ln(C/B)$ の平均と分散を、実際のボイド計測から得られた $\ln(A/B)$ 、 $\ln(C/B)$ の平均と分散と Table 1 において比較した。数学的に自明ではあるが、実際に比較した結果においても、寸法 A, B, C に対して3次元正規分布を仮定した推定値と、アスペクト比 $A/B, C/B$ に対して対数正規分布を適用した値とでほぼ一致しており、3次元正規分布の仮定から①が成立する。

次に、②について考える。式(3)で得た $\mathbf{V}=(\ln A, \ln B, \ln C)^T$ の3次元正規分布を基に、寸法 A, B, C の擬似データを作成することによって、寸法の相関性が成り立つかを検証した。正規乱数ベクトル $\mathbf{V}^*$ を計算機によって発生させ、擬似データを作成した。擬似データの作成個数は20,000個とした。まず、Fig. 5 に、擬似データから得た、寸法 A, B, C およびアスペクト比 $A/B, C/B$ の累積相対度数分布を示した。これらは、上述の結果とも良い一致を示していることが分かり、①が成立するこ

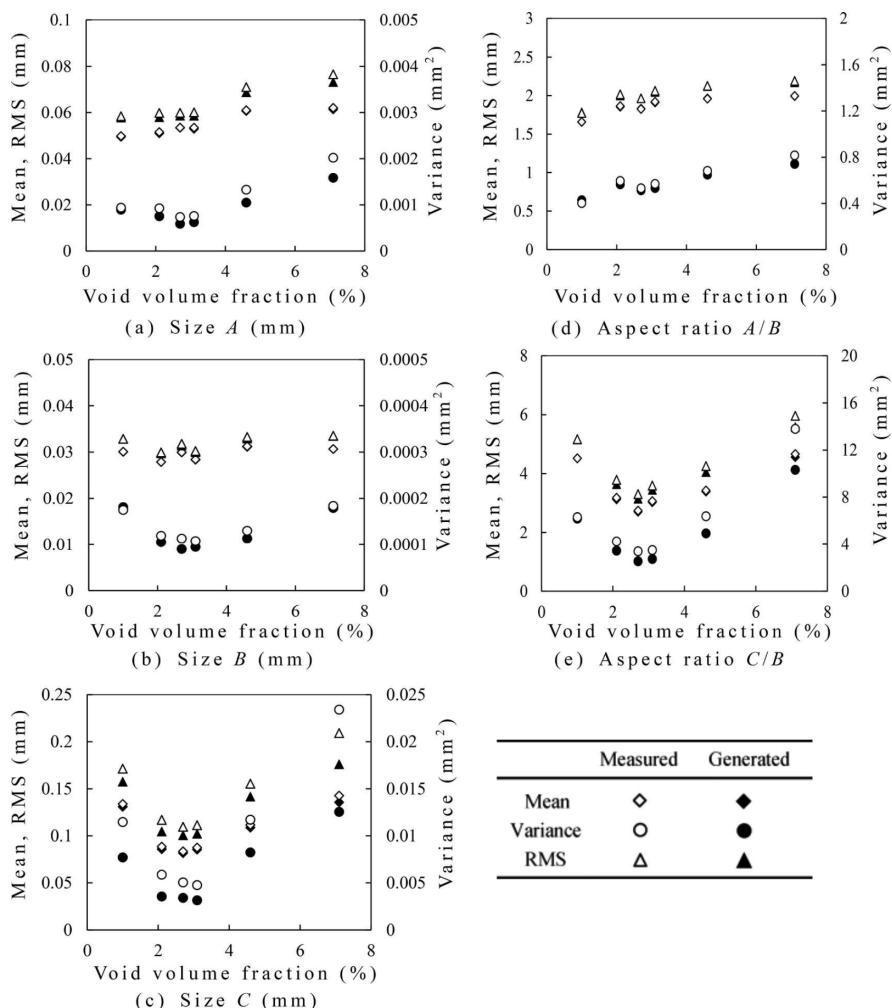


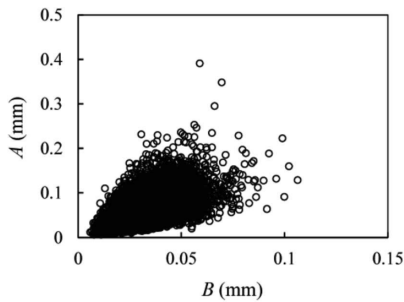
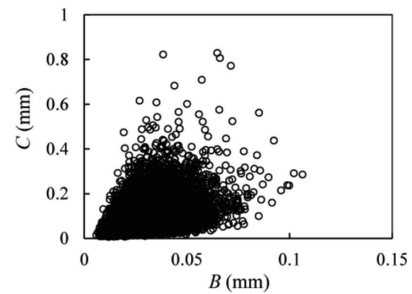
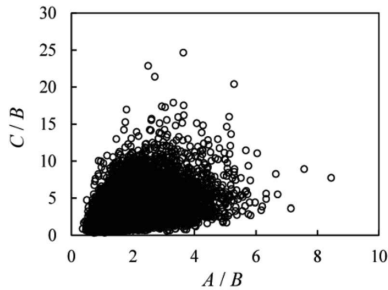
Fig. 6 Comparison of measured and generated statistical parameters for void size distribution.

とが再度、確認できる。また、標本平均、標本分散、二乗平均平方根 (RMS) を Fig. 6 にプロットした。得られた擬似データによる統計量は、実測のボイドによる統計量と概ね良い一致を示した。なお、上述した通り、ボイド体積含有率に対して寸法やアスペクト比の傾向が見られないことが、この図から分かる。Fig. 7 には、Fig. 4 と同様に、乱数から生成された擬似寸法データ A^* , B^* , C^* から得られた寸法およびアスペクト比どうしの相関性をプロットした。Fig. 4 と同様の分布傾向を示しており、寸法やアスペクト比の相関性を再現できることが分かった。

以上のことから、「確率変数ベクトル $\mathbf{V}=(\ln A, \ln B, \ln C)^T$ が 3 次元正規分布に従う」という仮説に基づく統計的整理が有用であることが示された。すなわち、確率

変数ベクトル $\mathbf{V}$ の平均ベクトルと共分散行列における 9 つの成分の決定が重要となる。

また、ボイドの寸法やアスペクト比の分布が、ボイド体積含有率による傾向のない、ある特定の値でピークを有するという対数正規分布で与えられることは重要な特徴である。これらは過去の研究でも、ボイドの寸法²²⁾ やアスペクト比²³⁾ に対して示されている例がある。このような統計的特徴を踏まえると、ボイドが及ぼす応力集中効果の大きさや程度を見積もることが可能と考えられる。3 章では、この実験結果を基にして、複数のボイドが及ぼす応力集中効果を取り込んだモデル化について検討した。

(a) Correlation of size between B and A (b) Correlation of size between B and C 

(c) Correlation of aspect ratio

Fig. 7 Correlation with regard to void size and aspect ratio for generated statistical data.

3. ボイドによる応力集中効果と強度低下

2章では、ボイド寸法や形状の特徴について統計的に整理した。ボイドの体積含有率に対して樹脂支配型強度は線形的に低下する一方で、ボイドの寸法やアスペクト比は、ボイド体積含有率に対して大きく変化していない。このことから、ボイドの個数による影響、すなわち、ボイドによる応力集中が及ぶ体積の総和が、ボイドの個数の変化に伴って変化していることにより、強度低下が起きている可能性が考えられる。これは、後述するように、強度低下に対する体積依存性（寸法効果）としてモデル化できる。

一般に、樹脂支配型強度に関しては、寸法効果による強度の体積依存性が無視できないことが報告されている。欠陥を起点とする脆性的な破壊様相を示す材料の強度に対する寸法効果については、最弱リンク仮説によって説明がなされることが多い。ここでは特に、ワイブルモデルがよく引用される¹²⁾。ワイブル分布の形状を決めるワイブル係数は材料強度のばらつきを示す指標として捉えられ、値が小さいほど材料強度のばらつきは大きくなる。樹脂支配型強度に対する体積依存性を検討した例をTable 2にまとめた。

Wisnom ら¹⁰⁾は、GFRPの層間せん断強度と層間引

張強度に対するワイブル係数を比較しており、層間せん断では31.5、層間引張では7.1と、負荷形態の違いによって異なることを示している。小笠原ら¹⁸⁾は、2種類のCFRP (IM600/133, T800H/3900-2) に対して、繊維直交方向引張強度の体積依存性を検討している。3点曲げ試験の結果からワイブル係数をそれぞれ、9.92, 13.0と求めており、材料によって異なる値を示している。Haraら¹⁹⁾は、CFRP IM600/133について、直接負荷による引張試験と3点曲げから求めた層間引張強度のワイブル係数は、それぞれ23.6, 20.5であると報告しており、試験法の違いによるばらつきは存在するが、ほぼ同一の負荷形態の強度を指す場合は、比較的近い値を示している。末益ら²⁰⁾は、上記のCFRP T800H/3900-2に近い材料であるT800S/3900-2Bに対して、屈曲はりの4点曲げ試験から層間引張強度を評価し、ワイブル係数を16.23と求めており、上記の繊維直交方向引張強度の場合とは異なっている。

以上のように、一方方向積層板における樹脂支配型強度は体積依存性を示し、そのワイブル係数は、負荷形態によっても異なる。この理由として、実際の破壊には複数の種類の欠陥が寄与しているにも関わらず、ワイブル係数を評価する際には、それらをすべて同一視していることが考えられる。したがって、ワイブル係数については、

Table 2 Examples of Weibull modulus.¹⁴⁻²⁰⁾

Material system	Weibull modulus	Method	
CFRP	7.63	TTS, 90° tension, Median rank	O'Brien and Salpekar ¹⁴⁾
AS4/3501-6	12.2	TTS, 90° tension, Log-log plot	Wisnom ^{17)*}
CFRP XAS/913	21.8	ILSS, Short-beam-shear, Log-log plot	Cui et al. ¹⁵⁾
GFRP	31.5	ILSS, Short-beam-shear, Log-log plot	Wisnom and Jones ¹⁶⁾
E glass/913	7.1	ILTS, Curved-beam bending, Log-log plot	Wisnom and Jones ¹⁶⁾
CFRP	13.0	TTS, 3-point bending, Median rank	Ogasawara and Hara ¹⁸⁾
IM600/133	23.6	ILTS, Direct tensile loading, Median rank	Hara et al. ¹⁹⁾
	20.5	ILTS, 3-point bending, Median rank	Hara et al. ¹⁹⁾
CFRP T800H/3900-2	9.92	TTS, 3-point bending, Median rank	Ogasawara and Hara ¹⁸⁾
CFRP T800S/3900-2B	16.23	ILTS, Curved-beam 4-point bending, Weibull plot	Suemasu et al. ²⁰⁾

* with experimental results by O'Brien et al.¹⁴⁾

実験結果に基づいて、強度の体積依存性の度合いを表す指標として取り扱うのが良い。

ここでは、ポイドによる応力集中効果と強度の体積依存性の関係についてワイブルモデルを用いてモデル化する。このモデルに基づいて、Fig. 1 で示した CFRP 繊維直交方向引張強度 (TTS) の低下について検討する。このとき、ワイブル係数は、ポイド体積含有率に対する強度低下の程度を表す感度係数の役割を果たすことを示す。

3.1 ワイブルモデル

最弱リンク仮説に基づくワイブルモデルでは、破壊確率 $P(\sigma)$ を負荷応力 σ の関数として、次式で記述する¹²⁾。

$$P(\sigma) = 1 - \exp \left[- \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \right] \quad (6)$$

この確率分布は二つのワイブル母数 σ_0 , m で記述されており、それぞれワイブル尺度母数、ワイブル形状母数 (ワイブル係数) と呼ぶ。負荷応力 σ が増大するとともに、 $P(\sigma)$ は 1 に近づく。ここで、式(6)で与えられる分布の特徴を考えるため、破壊確率が $P(\sigma) = 1 - e^{-1}$ 以上となる場合に着目する。これを満たす条件は、以下のよう表される。

$$B \geq 1$$

$$\text{where } B = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \quad (7)$$

この B を破壊の危険率と呼ぶ。ここで定義された破壊の危険率は、体積 V の材料に一樣応力 σ が作用するとき

$$P(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m V \right] \quad (8)$$

$$B = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m V \quad (9)$$

と表せる。

一方、体積 V において応力勾配がある場合、体積 V での応力分布に対してある基準となる応力 σ_R を取ることににより、

$$V^{\text{eff}} = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^m dV \quad (10)$$

なるパラメータを定義し、破壊確率 $P(\tilde{\sigma})$ を、媒介変数 $\tilde{\sigma}$ を用いて次式で表す。

$$P(\tilde{\sigma}) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0} \right)^m V^{\text{eff}} \right\} \quad (11)$$

この式(11)において $\tilde{\sigma} = \sigma_R$ とおくと、一般に分布応力を受ける体積 V の材料の破壊確率の式(6)と一致する。つまり、式(11)が、応力勾配を有する体積 V の材料の破壊確率分布を表す式と等価であることが分かる。また、一樣応力の場合の式(8)と類似した形の破壊確率分布の式となっている。このように定義した V^{eff} を有効体積と呼ぶ。この媒介変数を基準応力 σ_R にとった式(11)において、破壊の危険率を定義すると、

$$B = \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_0} \right)^m V^{\text{eff}} = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^m dV \quad (12)$$

と表すことができ、式(7)に帰着する。さらに、式(12)の形は、一樣応力の場合の式(9)の形と類似しており、分布応力を受ける場合に一般化された式となっている。 $B=1$

としたときの基準となる負荷応力 σ_R を代表強度と呼ぶ。

次に、強度の体積依存性について考える。同一のワイブル尺度母数 (σ_0, m) を持った材料が、異なる体積を有するか、異なる分布応力を受けることにより、異なる有効体積 $V_1^{\text{eff}}, V_2^{\text{eff}}$ を有している2つの状態を考える。式(12)は、この2つの状態に対して破壊の危険率が異なることを意味している。一方、この2つの状態それぞれについて、破壊の危険率 $B=1$ となる場合を考え、対応する代表強度を σ_1, σ_2 とすると、破壊の危険率が等しいことから、以下の式が成り立つ。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{V_1^{\text{eff}}}{V_2^{\text{eff}}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (13)$$

同じ破壊確率分布において、異なる2つの状態に対応する異なる代表強度間の関係を示す式であり、有効体積に対する依存性を表す式となっている。特に、一様応力の場合については、有効体積は強度の標定部体積と等しくなり、式(13)は、強度の体積依存性を与える。これを強度の寸法効果と呼ぶ。

3.2 応力集中効果と強度の体積依存性の関係

ボイドを含む材料の破壊を考える。以下の定式化では、ボイドを応力集中源とみなし、応力集中によって元々の材料中に存在する他の欠陥を起点とする破壊が影響を受けると仮定する (Fig. 8)。弾性論に基づく、ボイドによってその近傍の限られた範囲で応力集中が生じるため、この応力集中領域における破壊の危険率を近似的に求める。

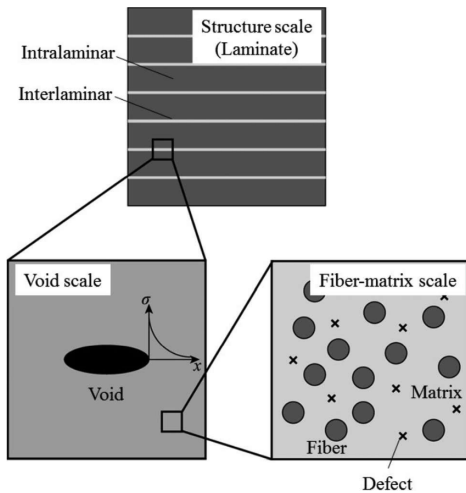


Fig. 8 Schematic of strength reduction model based on Weibull model.

マクロに均一とみなした材料の各点において受けている応力 $\sigma(\mathbf{x})$ に対して、ボイドの存在により、ミクロな応力集中が生じている状態を考える。簡単のため、本報の検討では、ボイド近傍の応力勾配を無視し、ボイド周りの限られた空間に一様な応力集中が生じるものとし、その応力集中率を α とする。このとき、材料全体の破壊に対する危険率は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} B &\approx \int_V \left\{ \frac{\alpha \sigma(\mathbf{x})}{\sigma_0} \right\}^m dV \\ &= \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV + \sum_i \int_{V_i} (\alpha_i^m - 1) \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m dV_i \quad (14) \\ &\equiv B_0 + B^* \end{aligned}$$

$$B_0 = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \quad (15)$$

$$B^* = \sum_i \int_{V_i} (\alpha_i^m - 1) \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m dV_i \quad (16)$$

ここで、 B_0 はボイドを含まない材料に対する破壊の危険率であり、 B^* はボイドの存在によって破壊の危険率が增加する分を表している。破壊の危険率の増分 B^* は個々のボイド i の効果 (ボイド位置でのマクロな応力 σ_i と応力集中率 α_i による破壊の危険率の増分) の総和として、式(16)で算出される。特に、マクロに一様応力が作用する場合、

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \left\{ V + \sum_i (\alpha_i^m - 1) \Delta V_i \right\} \\ &\equiv \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m V (1 + \Psi) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\Psi = \frac{1}{V} \sum_i (\alpha_i^m - 1) \Delta V_i \quad (18)$$

となる。 ΔV_i は試験片に含まれるボイドのうち i 番目のものの応力集中効果が及ぶ体積を示す。 Ψ はボイドの応力集中効果による B^* の B_0 に対する比を表し、元の材料特性に基づく破壊の危険率に対するボイドによる応力集中効果を表す関数となる。これを応力集中効果係数と呼ぶ。なお、これ以降の検討では、標定部においてほぼ一様な応力分布と考えられる繊維直交方向引張強度 (TTS) を検討対象とし、この一様応力に対する式(17)と式(18)を用いる。

式(18)における応力集中率 α_i は、一般形としては、ボイドのアスペクト比などの関数とすることが考えられる。繊維直交方向引張強度 (TTS) に関しては、Fig. 3 のようなボイド形状に対して X 軸方向の負荷となる。このとき、曲率半径が小さくなると想定される C 方向の両端

における応力集中率が高くなることが考えられる。しかしながら、著者らの実験結果²⁴⁾では、 B 方向の両端において樹脂破壊(トランスバースクラック)が生じやすく、 C 方向の端には樹脂リッチ領域やその領域を挟んで隣のボイドが存在することが多い傾向が見られた。樹脂リッチ領域と炭素繊維のある領域では剛性差が大きいことから、力学的には C 方向にボイドが連続しているに近い状態となり、 C 方向の端での応力集中はそれほど高くならないことが考えられる。以上より、Fig. 3の寸法 B 方向の両端が強度に影響しやすいと想定する。これに相当する位置における、3次元の球状あるいは楕円球形状の空洞周りの応力集中率の文献値が、ボイドのアスペクト比にかかわらず²⁾、概ね2となることから²⁵⁾、応力集中率 α_i を

$$\alpha_i \cong 2 \quad (19)$$

と近似した。この点については、後で検討を加える。

また式(18)において、 ΔV_i は応力集中効果の影響を受ける体積であるが、ボイド i の体積 $V_{\text{void},i}$ とともに相対的に大きくなると想定し、体積比の係数 b を仮定し、以下の式で与えた。

$$\Delta V_i \cong \beta V_{\text{void},i} \quad (20)$$

最後に、応力集中効果と強度の体積依存性の関係について述べる。同じワイブル母数をもつ材料において、標定部体積 V_1 、応力集中効果係数 Ψ_1 を有する材料の代表強度を σ_1 、別の標定部体積 V_2 、応力集中効果係数 Ψ_2 を有する材料の代表強度を σ_2 とすると、両者に対応する破壊の危険率がともに1となることから、以下の式が得られる。

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{-m} = \frac{(1+\Psi_1)V_1}{(1+\Psi_2)V_2} \quad (21)$$

これが応力集中効果と強度の体積依存性を等価的に関係づける基礎式となる。 $\Psi_1=\Psi_2=0$ のとき、ボイドのない材料の強度に対する体積依存性を表す式(13)に対応する。式(21)において、ワイブル係数 m は応力集中効果に対する強度低下の割合を表す係数となっている。

ボイドの存在による強度低下の項、すなわち、 Ψ を定義する式(18)については、ボイドの総体積 V_{void} を用いると、 V_{void}/V はボイド率 V_v であり、次のように変形できる。

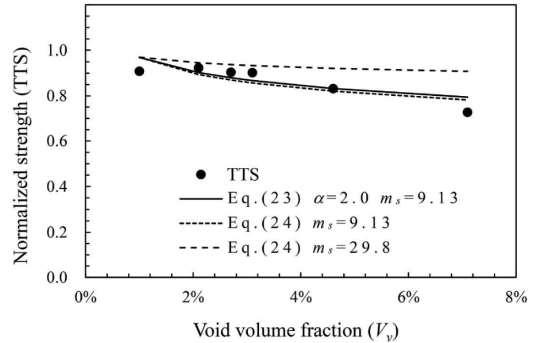


Fig. 9 Relationship between mean strength and void volume fraction for transverse tensile strength (TTS) of CFRP.

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{V_{\text{void}}}{V} \sum_i (\alpha_i^m - 1) \frac{\Delta V_i}{V_{\text{void}}} \\ &= \beta V_v \sum_i (\alpha_i^m - 1) \frac{V_{\text{void},i}}{V_{\text{void}}} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{where } a = \sum_i (\alpha_i^m - 1) \frac{V_{\text{void},i}}{V_{\text{void}}}$$

$\sum$ 内はボイドの応力集中効果 $(\alpha_i^m - 1)$ についてのボイド体積による加重平均となる。この値を a で表し、式(22)を式(21)に代入すると次式となる。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{1 + \beta V_{v1} a_1}{1 + \beta V_{v2} a_2} \right)^{-\frac{1}{m}} \quad (23)$$

ここで、3.3節に後述する考え方から、ボイド体積含有率が異なる場合でも、個々のボイドによる応力集中効果がほとんど変化しないと仮定する($a_1=a_2=a$)。さらに、式(22)で α が m 乗となっていることから分かるように、ワイブル係数 m として1より十分大きな値を想定すると、 a は1よりも非常に大きな値となる。このとき、分母と分子のそれぞれにある最初の項の1は無視することができ、以下の式が得られる。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{V_{v1}}{V_{v2}} \right)^{-\frac{1}{m}} \quad (24)$$

つまり、ボイド体積含有率 V_v の相対比が応力集中の及ぶ体積比の役割を果たし、その体積比に依存して強度低下が起きるモデルとなる。次節では、このワイブル係数 m の代わりに、応力集中の及ぶ体積比に対する強度低下への感度係数として m_s と表し、実験に対するフィッティングパラメータとして扱って整理した。

3.3 ワイブルモデルによる計算結果

式(23)に基づいて、繊維直交引張強度(TTS)を整理した結果をFig. 9に示す。ここで、実験結果は既報⁹⁾に

て報告した、各ボイド体積含有率のCFRP一方向板から切り出した90°引張試験片による引張強度の結果であり、Fig.1で示した結果と同一である。なお、図における強度の実験値は、各ボイド体積含有率の試験片に対して得られた強度の平均値を、ボイドの無い健全材から切り出した試験片での強度の平均値で正規化した値を示している。体積比の係数 $\beta=1$ と仮定し、応力集中係数 $\alpha=2$ 、感度係数 $m_s=9.13$ としたとき、概ね実験に見られる強度低下を説明することができた。なお、このとき、同図の計算において、 $a=559$ であった。ここでフィッティングによって得られた m_s の値はTable2に示したTTSに対する既存の文献^{17,18)}で報告されたワイブル係数と比較してもそれほど大きな差はない。ただし、ここで得られた m_s は、あくまで、ボイドによる応力集中効果と強度の体積依存性を関係づける感度係数の役割を果たしていることに注意が必要である。同図には、式(24)において、 $m_s=9.13$ 、29.8とした2つの場合を併せて示した。式(19)での $\alpha=2$ は、式(24)での $m_s=9.13$ との比較から、応力集中効果が強い場合に近い状態と理解できる。 $m_s=29.8$ は、健全材($V_v=0$)とボイド含有材の全ての試験片(試験片総数28)に対して仮に求めたワイブル係数の値である。この m_s の値は、 V_v ごとにその V_v での平均強度で無次元化してワイブルプロットを取ることににより定めた。

2章で述べたように、ボイドの寸法やアスペクト比がボイド体積含有率によらず同じ分布を示す場合、同じ荷重形態に対する a の値は理想的にはボイド体積含有率によらず同じ値になると考えられるが、アスペクト比等により変化する応力集中係数の変化が式(23)を通じて強度には影響を及ぼす。したがって、ボイド体積含有率 V_v の強度低下への感度係数として求めたワイブル係数が材料のばらつきを表すワイブル係数と比べて低い値が出た理由は、主にこのような応力集中効果の影響によるものと考えられる。

ただし、今回は $\alpha=2$ の仮定が有効であったが、応力集中効果やそれが及ぶ範囲については、さまざまな影響が考えられるため、その設定に当たっては注意を要する。例えば、 V_v が大きくなると、ボイド形状の確率分布が低い領域に相当する形状のボイドなども実際に発生するようになり、ボイドによる応力集中率やボイドの影響が及ぶ領域に変化が生じる可能性がある。あるいは、ボイドの影響としては、アスペクト比に応じた応力集中とボイドの個数変化に伴う応力集中領域の体積変化として取り込むのみとなっているが、ボイド周囲において局在化し

た樹脂の塑性変形や複数のボイドによる応力分布の連成などによっても破壊が早まることが考えられる。

一方、これらのような要因も含めて、感度係数 m_s や応力集中係数 α を適切に決定することで、本モデルによる整理により、ボイド体積含有率 V_v と強度低下量は比較的良好な相関を示していた。このことから、ボイド体積含有率の上昇に伴う強度低下について、複数のボイドによる応力集中領域の体積変化としてモデル化することが可能となった。

4. 結 言

本研究では、ボイドを含むCFRP一方向板の樹脂支配型強度として繊維直交方向引張強度に着目し、強度低下へのボイドに伴う応力集中効果の影響を評価するため、X線CTによるボイド寸法の測定と統計的分析を実施するとともに、ボイドによる応力集中効果と強度低下に関してワイブルモデルによりモデル化した。

まず、CFRP内部に分布するボイドの位置、寸法、形状を統計的に分析した結果、CFRP内部においてボイドは層間領域に均一に分布し、寸法およびアスペクト比が対数正規分布に従うことを明らかにした。また、寸法やアスペクト比は互いに相関関係にあるが、これは、寸法の自然対数を成分に持つ3次元確率ベクトルが3次元正規分布に従うことによる帰結であることが示された。ボイドによる応力集中が強度に与える影響を考慮した上で評価を行うためには、このようにボイドの寸法やアスペクト比の状況を把握する必要があるが、その観点ではX線CTによる詳細なボイド寸法の計測が一つの有用かつ重要なツールとなると考えられる。

次に、ボイドによる応力集中効果の総和が強度低下に影響を与える、という前提のもとで、測定したボイドの寸法等の状況と強度低下の関係について、複数のボイドによる応力集中効果が及ぶ領域の体積の観点からモデル化した。これにより、ボイド体積含有率の比と強度の体積依存性(有効体積の比)との等価的な影響により強度低下が起きる、というモデルを提案した。ボイド体積含有率変化に伴う応力集中領域の体積変化とそれに対する強度低下の感度係数を適切に選ぶことによって提案モデルでの説明が可能であったことから、ボイドによる強度低下の要因として、主に、ボイド体積含有率が支配的であると示された。

一方、本研究の検討で得た、ボイド体積含有率に対する強度低下の感度係数 m_s については、実験結果を整理して得た値に過ぎない。ボイド周りの応力集中係数やそ

の影響が及ぶ範囲については、複数のポイドによる応力干渉効果やポイド周囲で局在化した樹脂の塑性変形などの影響も考えられる。したがって、これらの影響を含めて、実際のポイド形状などの観察に基づいて、ポイドによる影響を適切に見積もる必要がある。

本研究における X 線 CT 観察においては、岐阜大学工学部の三宅卓志教授ならびに竹中一也氏、高田雄太氏のご協力を頂き、岐阜大学機器分析センターの装置を利用させて頂きました。ここに深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) W.R. Broughton, M.J. Lodeiro, G.D. Sims, B. Zeqiri, M. Hodnett, R.A. Smith & L. D. Jones : Proc. 12th International Conference on Composite Materials (ICCM12), Paper No. 1030.
- 2) D.E.W. Stone & B. Clarke : *Non-Destructive Testing*, **8** (1975), 137-145.
- 3) B.G. Martin : *NDT International*, **9** (1976), 242-246.
- 4) B.D. Harper, G.H. Staab & R.S. Chen : *J. Compos. Mater.*, **21** (1987), 280-289.
- 5) P. Olivier, J.P. Cottu & B. Ferret : *Composites*, **26** (1995), 509-515.
- 6) S. Hernández, F. Sket, J.M. Molina-Aldareguía, C. González & J. Llorca : *Compos. Sci. Technol.*, **71** (2011), 1331-1341.
- 7) Y. Nikishkov, G. Seon & A. Makeev : *J. Compos. Mater.*, **48** (2014), 2131-2144.
- 8) A. Makeev, G. Seon, Y. Nikishkov & E. Lee : *J. Compos. Mater.*, **49** (2015), 783-794.
- 9) 新玉重貴, 橋爪良輔, 古賀貢史, 西川雅章, 北條正樹 : 日本複合材料学会誌, **43** (2017), 181-192.
- 10) J. Lambert, A.R. Chambers, I. Sinclair & S.M. Spearing : *Compos. Sci. Technol.*, **72** (2012), 337-343.
- 11) G. Seon, A. Makeev, Y. Nikishkov & E. Lee : *Compos. Sci. Technol.*, **89** (2013), 194-201.
- 12) W. Weibull : *J. Appl. Mech.*, **18** (1951), 293-297.
- 13) W.A. Curtin : *Adv. Appl. Mech.*, **36** (1998), 163-253.
- 14) T.K. O'Brien & S.A. Salpekar : ASTM STP 1206 (1993), pp. 23-52.
- 15) W. Cui, M.R. Wisnom & M.I. Jones : *Compos. Engng.*, **4** (1994), 299-307.
- 16) M.R. Wisnom & M.I. Jones : *J. Reinf. Plast. Compos.*, **15** (1996), 2-15.
- 17) M.R. Wisnom : *Compos. Sci. Technol.*, **59** (1999), 1937-1957.
- 18) 小笠原俊夫, 原 栄一 : 宇宙航空研究開発機構研究開発資料, JAXA-RM-08-007 (2009).
- 19) E. Hara, T. Yokozeki, H. Hatta, Y. Iwahori, T. Ogasawara & T. Ishikawa : *Composites Part A*, **43** (2012), 1828-1836.
- 20) 末益博志, 滝澤慎太郎, 森本哲也, 北條正弘 : 日本複合材料学会誌, **41** (2015), 94-101.
- 21) 稲垣宣生 : 数理統計学, 裳華房 (1990).
- 22) D.K. Hsu & K.M. Uhl : Review of Progress in Quantitative NDE, Chapter 6 (1987), pp. 1175-1184.
- 23) H. Zhu, B. Wu, D. Li, D. Zhang & Y. Chen : *J. Mater. Sci. Technol.*, **27** (2011), 69-73.
- 24) S. Aratama, R. Hashizume, K. Takenaka, K. Koga, Y. Tsumura, T. Miyake, M. Nishikawa & M. Hojo : *Adv. Compos. Mater.*, **25**, Suppl. (2016), 115-130.
- 25) 西田正孝 : 応力集中 (初版), 森北出版 (1967), pp. 530-532.