

Contraction Semi-group の振動

東大理 吉田耕作

§1 作用素の分数冪の利用

(C.) 型の contraction semi-group in a B-space X (以下 (C.) 型の c. s.-g. と書く) $\{T_t; t \geq 0\}$ の infinitesimal generator (以下 i. g. と書く) を A とする. X に与える線型作用素 B を A に加へる $(A+B)$ がまた (C.) 型の c. s.-g. の i. g. になるための十分条件について詳しい研究が E. Hille-R.S. Phillips [1] に述べられてゐるが, 少々一般的に過ぎる面倒である.

こゝでは "作用素の分数冪" (例へば K. Yosida, [1]) を使っての一つの扱ひ方を述べる.

定理 1. A, B は B-space X に与える (C.) 型の c. s.-g. の i. g. とする. $\hat{A}_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) を " A の分数冪" とし,

$$(1) \quad D(B) \supset D(\hat{A}_\alpha)$$

と仮定する. $(A+B)$ がまた (C.) 型の c. s.-g. の i. g. になる.

証明の方針

 $D(\hat{A}_\alpha) \supseteq D(A)$ を

$$(2) \quad (-A)^\alpha x = -\hat{A}_\alpha x = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I - A)^{-1} (-Ax) d\lambda$$

($x \in D(A)$ のとき)

とすると用ゐ

$$(3) \quad \|\hat{A}_\alpha x\| \leq \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \|Ax\|^\alpha \cdot \|x\|^{1-\alpha}, \quad x \in D(A)$$

とわかる, 任意の $\alpha > 0$ に対して適当に $\delta > 0$ をとれば

$$(3)' \quad \|\hat{A}_\alpha x\| \leq a \|Ax\| + b \|x\|, \quad x \in D(A)$$

一方は α について仮定 $D(B) \supseteq D(\hat{A}_\alpha)$ と前ク"の定理により, 正数 c により

$$(4) \quad \|Bx\| \leq c(\|\hat{A}_\alpha x\| + \|x\|), \quad x \in D(\hat{A}_\alpha)$$

ゆえに

$$(5) \quad \|Bx\| \leq ac \|Ax\| + c(b+1) \|x\|, \quad x \in D(A)$$

したがって $\lambda > 0$ とし, $x \in X$ とする

$$(6) \quad \|B(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq ac \|A(\lambda I - A)^{-1}x\| + c(b+1) \|(\lambda I - A)^{-1}x\|$$

$$A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda(\lambda I - A)^{-1} - I \quad \text{と} \quad \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1 \quad (=$$

山田 T_f が contraction s.-gr. of class (C_0) のこととからわかる) により

$$(7) \quad \|B(\lambda I - A)^{-1}\| < 1 \quad \text{for } 2ac + \lambda^{-1}c(b+1) < 1$$

このよゝうに $\lambda > 0$ に対して, $(I - B(\lambda I - A)^{-1})^{-1}$ が有界な逆をもつことがよゝうに $R((I - B(\lambda I - A)^{-1})) = X$ となる

∴ $R(\lambda I - A) = X$ により

$$R(\lambda I - A - B) = R((I - B(\lambda I - A)^{-1})(\lambda I - A)) = X$$

一方において A, B とともに c.s.-gr. の i.g. であるから $(\lambda I - A - B)^{-1}$ の存在は $\|\lambda(\lambda I - A - B)^{-1}x\| \leq \|x\|$, $x \in R(\lambda I - A - B)$, とともに成り立つ。

よって 有界な逆 $(\lambda I - A - B)^{-1}$ が存在し $\|\lambda(\lambda I - A - B)^{-1}\| \leq 1$ となる。

系 A は holomorphic s.-gr. の i.g. であるから, $(A+B)$ は holomorphic s.-gr. の i.g. になる。

Proof $\overline{\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |\tau| \|((\sigma_0 + i\tau)I - A)^{-1}\|} < \infty$

と仮定すれば、上の証明、やり方。

$$\|\tau((\sigma_0 + i\tau)I - A - B)^{-1}\| \leq \|(I - B((\sigma_0 + i\tau)I - A)^{-1})^{-1}\| \times \|\tau((\sigma_0 + i\tau)I - A)^{-1}\|$$

を得る $\overline{\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |\tau| \|((\sigma_0 + i\tau)I - A - B)^{-1}\|} < \infty$

註 上の結果は K. Yosida: A perturbation theorem for semi-groups of linear operators, Proc. Jap. Acad. 41 (1965), 645-647 に発表されている。

I. Miyadera: A perturbation theorem for contraction semi-groups, *ibid.*, 755-758 2"

定理2. $D(B) \supseteq D(A)$ かつ, $B \leq A + dI$ (C_0) 型の
 C . A -gr. の i . g. なるは $A + B_d$ ($0 < d < 1$)
 も C . A -gr. の i . g. ((C_0) 型) である.

を証明した, 証明の idea は定理1 とほぼ
 同様である. また定理1系に相当すること
 はほぼ同様にして証明される.

§2. Holomorphic Markov Process の
 応用.

定理1 の応用として例として次の結果が得られ
 る (K. Yosida: On holomorphic Markov processes,
Proc. Jap. Acad. 42 (1966), 313-317):

$$(8) \quad A = a^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx} + q(x)$$

において a, a', b, q は $(-\infty, \infty)$ において有界な
 一様連続な実数値関数で, 且つ

$$(9) \quad q(x) \leq 0, \quad 0 < \delta \leq a(x) \quad (\delta \text{ は正数})$$

とすると A は infinitesimal generator とな
 る $C[-\infty, \infty]$ における (C_0) 型の semi-group は
 holomorphic semi-group である.

§3. Trotter の Product 公式

Theorem 4. A, B が contr. s-g. of class (C.)

の i.g. 2, かつ $A+B$ も i.g. となる i.g. とする.
 このとき $\underbrace{D(A) \cap D(B) \subseteq \text{domain of } A+B}_{\text{domain of } A+B}$

$$(10) \quad P_t = e^{tA}, \quad Q_t = e^{tB}, \quad R_t = e^{t(A+B)}$$

とおく, t の有限区間で 1 次元

$$(11) \quad \begin{cases} u \in D(A) \cap D(B) \text{ に対して} \\ R_t u = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{t/n} Q_{t/n})^n u \end{cases}$$

が成立する.

証明. $h = \frac{t}{n}$ とおく.

$$(P_h Q_h)^n - R_h^n = \sum_{j=0}^{n-1} (P_h Q_h)^{n-1-j} (P_h Q_h - R_h) \times R_h^j$$

よって, P_t, Q_t が contraction であるから

$$\|(P_h Q_h)^n - R_h^n\| u \leq n \sup_{0 \leq \lambda \leq t} \|(P_h Q_h - R_h) R_\lambda u\|$$

$$= t \sup_{0 \leq \lambda \leq t} \left\| \frac{P_h Q_h - R_h}{h} R_\lambda u \right\|$$

よって $u \in D(A+B)$ ならば $u \rightarrow R_\lambda u$ は $D(A+B)$ に収束し, かつ $s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P_h Q_h - R_h}{h} R_\lambda u$ があるから結局

$u \in \mathcal{D}(A+B)$ なること

$$\frac{P_h Q_h - R_h}{h} u = P_h \frac{Q_h - I}{h} u + \frac{P_h - I}{h} u - \frac{R_h - I}{h} u$$

が 0 に Δ -converge することから $u \in \mathcal{D}(A+B)$ なることはよい。と

3 から右辺の各項, 第3項は u であり $Au, (A+B)u$ に Δ -converge する。また右辺の第1項も P_h の $h=0$ に与える Δ -continuity と $\|P_h\| \leq 1$ により, Bu に Δ -converge して証明を終わる。

註 Trotter の論文は H.F. Trotter: On the product of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 545-551 である。これは E. Nelson-G. Faires: La formule de Trotter dans les semi-groupes et son application à l'interprétation de l'intégrale de Feynman (Séminaire Lions-Schwartz, 1967(?)) によって知られる。