

Lee - Yang の定理の一般化と

これに対する数値実験

東北大. 工. 理⁺ 桂 重俊, 山本正実
阿部芳彦⁺, 大勝内勝司

(5月19日受理)

§ 1. 序 論

1952年に Lee 及び Yang¹⁾ は格子系における強磁性的相変化を複素磁場平面における有限な系の状態和の零点の分布を以て論じた。通例, この定理は最近接相互作用をもつ格子気体, 即ち最近接相互作用をもつ $S = \frac{1}{2}$ の Ising 強磁性体についての定理とみなされているが成立対称はもっと広い。Husimi - Temperley model は Lee - Yang の仮定を満たすので, 全ての零点が単位円上にある事は明らかだがこのときの零点の分布関数は Katsura²⁾ により求められ, Saito³⁾, Abe⁴⁾, Suzuki⁵⁾ によってもその性質が論ぜられた。この定理が $J < 0$ の場合 (以下 $J > 0$ を ferro, $J < 0$ を antiferro と略称することにする。) に対してどうなるかは興味ある問題で “ $J < 0$ の場合の状態和の零点は負の実軸上にある” という proposition が多くの人によってなされた。また, Abe⁴⁾, Suzuki⁵⁾ は零点の分布関数と critical index の関係を論じた。このような問題に対しては数値実験が役立ち, 有限な系の状態和を求めることが必要になってくる。有限な Ising model の状態和を求めることは 4×4 , $3 \times 3 \times 2$ については Katsura⁶⁾ により求められているが最近電子計算機の発達により 5×5 , 4×6 , $3 \times 3 \times 3$ 等が Ono, Karaki, Kawabata, Suzuki⁷⁾ 等により相ついで求められた。Antiferro の場合, Yang⁸⁾ 自身多くの場合零点は負の実軸上に分布するが例外のあることを述べている。Yang が示した例は2つの sublattice に分けられない系であったので “2つの sublattice に分けられる場合については負の実軸上にある”⁹⁾ という修正された proposition について数値実験が Kawabata, Ikeda 等によって行なわれ, 概ね負の実軸上にのるが例外があるということが分った。その結果によると 2×2 , 3×3 , 5×5 , $2 \times 2 \times 3$, $2 \times 3 \times 3$, $3 \times 3 \times 3$ に

対しては全ての根は負の実軸上にあるが、 4×4 、 4×6 、 $2 \times 2 \times 2$ に対しては大部分の負の実軸上の根の外に、複素根があらわれている。

また、 $S = 1, \frac{3}{2}$ 等の Ising model に対する数値実験も Kawabata 等⁷⁾により行なわれ、Ferro では全ての根は単位円上にあるが、Antiferro では負の実軸上の根の外に複素根が現われていることが見出された。

Heisenberg model についても Ferro, Antiferro の両者に対して¹⁰⁾ Lee-Yang の定理及び前述の予想が成り立つであろうことを Katsura は 1×6 の data より推論した。

一方、Fisher¹¹⁾、Abe¹²⁾、Suzuki¹³⁾ は状態和の複素温度平面の根の分布より Curie 点及びその近傍の critical index を議論した。Katsura¹⁴⁾ はこれに対して状態和の無限乗積表示から積分表示は導くことが出来ても積分表示から無限乗積表示は必ずしも導かれないことを注意した。

最近 Slater の誘電体 model の 2 次元的 Version である Lieb の KDP model, Rys の ADP model, Wu の KDP model の exact solution が得られ¹⁵⁾ その結果は Ising model の exact solution と類似する所が多い。このノートでは Lee-Yang の定理及びこの Antiferro に対する推論が second neighbor の interaction を考えた Ising model 及び KDP の Slater model, ADP の Rys model, Wu model 等でどうなるかについて数値実験を行ってみたのでこれを報告する。

§ 2. 第 2 近接格子点まで考えた場合の Ising model

4×4 の格子に periodic condition を課せ、next nearest neighbor までの相互作用を考慮した状態和を計算機で求めた。nearest neighbor の相互作用を J 、next nearest neighbor の相互作用を J' とし

$$x = e^{-J/kT}, \quad y = e^{-J'/kT}, \quad z = e^{2mH/kT}$$

とすれば、この系の状態和は

$$Z_{4 \times 4}(x, y, z) = \sum_{\ell_{mm}} a_{\ell_{mm}} x^{\ell_{mm}} y^{\ell_{mm}} z^{\ell_{mm}}$$

で表わされ、その結果は Table 1 に示す。これは $y=1$ としたとき Ono,¹⁶⁾ Karaki¹⁷⁾ 及び kawabata 等の結果と一致し、 $x=1$ としたとき別に行った second neighbor のみの結果と一致している。これを $J \geq 0, J' \geq 0$ の 4 つの場合について種々の相互作用比及び温度を変えて、複素磁場平面における状態和の根の分布を調べた。この結果は、全ての根が単位円上にある場合、概ね単位円上にあるが例外がある場合、全てが負の実軸上にある場合、概ね負の実軸上にあるが例外がある場合、全く不規則な場合の 5 つの場合に分けられ、概況を Fig. 1 (a) 及び Fig. 1 (b) に示す。

i) $J > 0, J' > 0$, この場合は Lee-Yang の仮定を満しているから当然だが、全ての根は単位円の上ののっている。

ii) $J > 0, J' < 0, |J'| < \frac{1}{2}J$ では Fig. 2 (a) が ground state である。 $|J'|$ が小さい間はほとんどの根は単位円にのっているが $\frac{1}{2}J$ に近づくにつれて外れた根の数が増加して来て $|J'| > \frac{1}{2}J$ では全ての根は単位円にも負の実軸上にもものっていない。

iii) $J < 0, J' > 0$, 全ての根は単位円上にも、負の実軸上にもものっていない。

iv) $J < 0, J' < 0, J - J'$ 平面は全ての根が負の実軸上にある部分と、大部分が負の実軸上にあり一部が複素根である領域とに分けられる。

J/kT を一定とし J'/kT を変えていったときの根の分布の変化の一例を Fig. 3, 4, 5 に示す。Fig. 5 では横軸は $-\ln(-\text{Im } z)$ を、縦軸は $\text{Re } z$ をとってある。

+

+

+

+

Fig. 2 (a)

+

+

+

+

Fig. 2 (b)

+

+

+

+

Fig. 2 (c)

second neighbor まで考えた Ising model の ground state は Fig. 2 (a), 2 (b) (及び+, -を交換したものを含めて) 2 (c) (及び+,

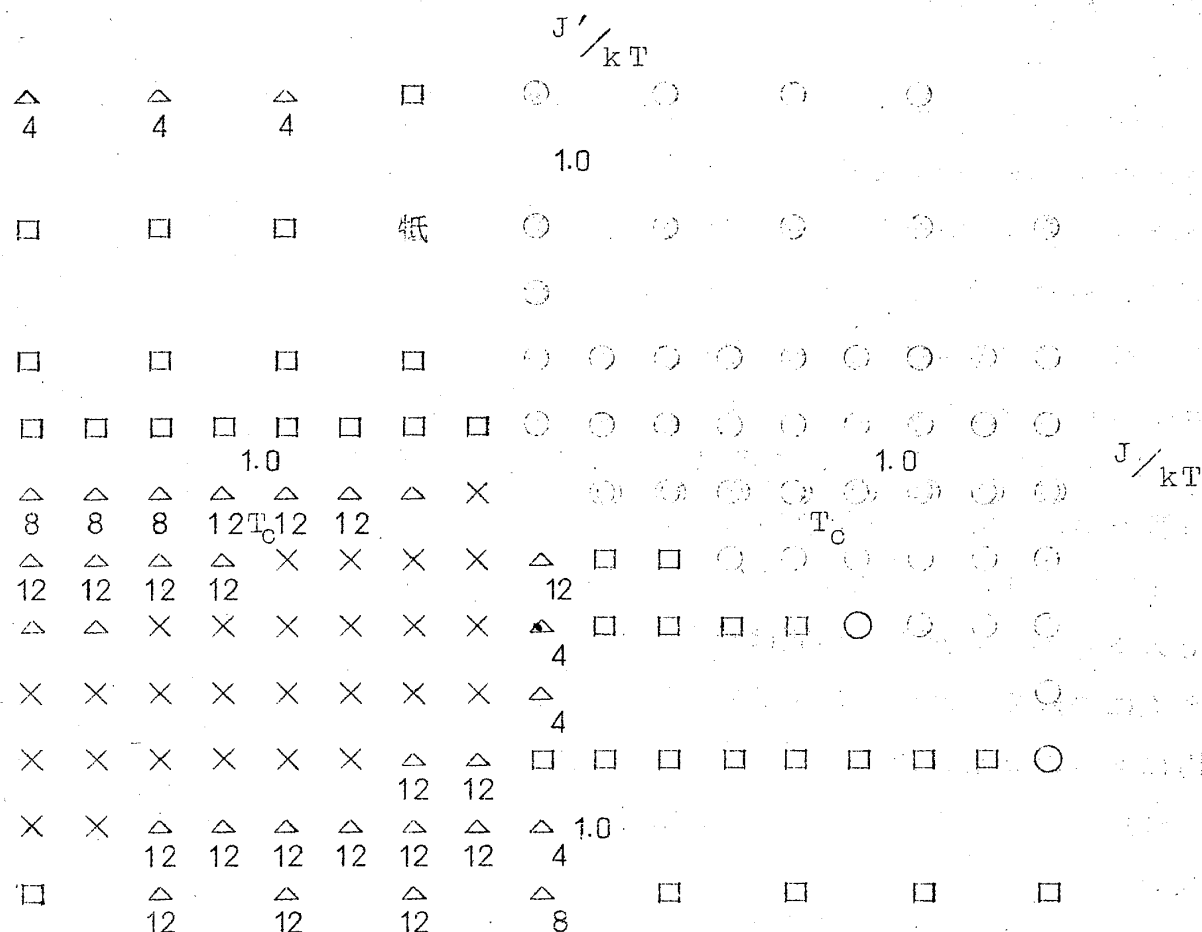


Fig. 1(a) 第2近接格点を考えた Ising model の
複素磁場平面の根分布の概況

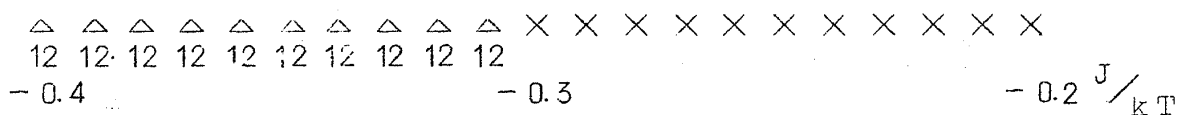


Fig. 1(b) $J'/kT = 0$ の軸上の根分布の概況

- 全部の根が単位円上にある場合
- 大部分の根は単位円上にあるが、外れているものもある場合
- × 全部負の実軸上にある場合
- △ 負の実軸上の根の外に複素根がある場合
- m 負の実軸上の根の数
- 単位円上にも負の実軸上にもない場合

Table I. Partition function of the Ising model of 4x4 with first and second neighbor interactions.

$$Z_{4 \times 4}(x, y, z) = \sum a_{\ell m n} x^{\ell} y^m z^n,$$

$$x = e^{-J/kT}, \quad y = e^{-J'/kT}, \quad z = e^{2mH/kT},$$

$$\ell = \frac{1}{2}(N_{++} + N_{--} - N_{+-}),$$

$$m = \frac{1}{2}(N'_{++} + N'_{--} - N'_{+-}),$$

where $N_{\alpha\beta}$ and $M'_{\alpha\beta}$ are the number of spin pairs in the first and second neighbors, respectively, and n is the number of + spins.

n	m/ℓ	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	Σ
8,-8	-16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7,-7	-12	0	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16
6,-6	-10	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32
	-8	0	0	0	32	56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	88
5,-5	-8	0	0	0	0	0	0	96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	96
	-6	0	0	0	0	64	128	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	256
	-4	0	0	0	0	32	128	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	208
4,-4	-7	0	0	0	0	0	0	0	0	72	0	0	0	0	0	0	0	0	72
	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	64	0	0	0	0	0	0	0	0	64
	-4	0	0	0	0	16	128	416	384	80	0	0	0	0	0	0	0	0	1024
	-2	0	0	0	0	0	128	128	128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	384
	0	0	0	0	0	8	0	192	64	12	0	0	0	0	0	0	0	0	276
3,-3	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	96	0	0	0	0	0	0	96
	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-4	0	0	0	0	0	0	16	128	288	128	32	0	0	0	0	0	0	592
	-2	0	0	0	0	0	128	384	640	640	256	0	0	0	0	0	0	0	2048
	0	0	0	0	0	0	64	192	640	192	64	0	0	0	0	0	0	0	1152
	2	0	0	0	0	0	0	64	128	64	0	0	0	0	0	0	0	0	256
	4	0	0	0	0	0	0	32	128	64	0	0	0	0	0	0	0	0	224
2,-2	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	32
	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	24
	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	64	0	320	64	0	0	0	0	0	768
	-2	0	0	0	0	0	0	128	256	384	326	128	9	0	0	0	0	0	1152
	0	0	0	0	0	0	96	512	960	1760	252	320	0	0	0	0	0	0	4320
	2	0	0	0	0	0	0	0	256	256	676	0	0	0	0	0	0	0	768
	4	0	0	0	0	0	0	64	320	320	254	0	0	0	0	0	0	0	768
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	64	60	0	0	0	0	0	0	0	64
	8	0	0	0	0	0	0	0	32	80	0	0	0	0	0	0	0	0	112
1,-1	-12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	16
	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64	128	64	0	0	0	0	256
	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	32	128	32	0	0	0	0	192
	-2	0	0	0	0	0	0	0	128	384	512	384	128	0	0	0	0	0	1536
	0	0	0	0	0	0	64	352	768	1408	1344	544	128	0	0	0	0	0	4608
	2	0	0	0	0	0	0	256	768	1088	896	320	0	0	0	0	0	0	3328
	4	0	0	0	0	0	0	16	128	320	256	48	0	0	0	0	0	0	768
	6	0	0	0	0	0	0	0	128	256	128	0	0	0	0	0	0	0	512
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	192	0	0	0	0	0	0	0	0	192
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0	0	0	32
0	-16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
	-14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64	64	0	0	0	128
	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	32	128	192	128	32	0	0	0	0	512
	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	256	256	256	0	0	0	0	0	0	768
	0	0	0	0	0	0	0	448	704	2192	1408	1216	192	24	0	0	0	0	6192
	2	0	0	0	0	0	0	256	512	768	512	256	0	0	0	0	0	0	2304
	4	0	0	0	0	0	0	64	384	1024	896	192	0	0	0	0	0	0	2560
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	208	64	0	0	0	0	0	0	0	272
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	128	0	0	0	0	0	0	0	0	128
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	4
Σ/2		1	0	16	32	212	864	3344	6784	10262	6784	3344	864	212	32	16	0	1	

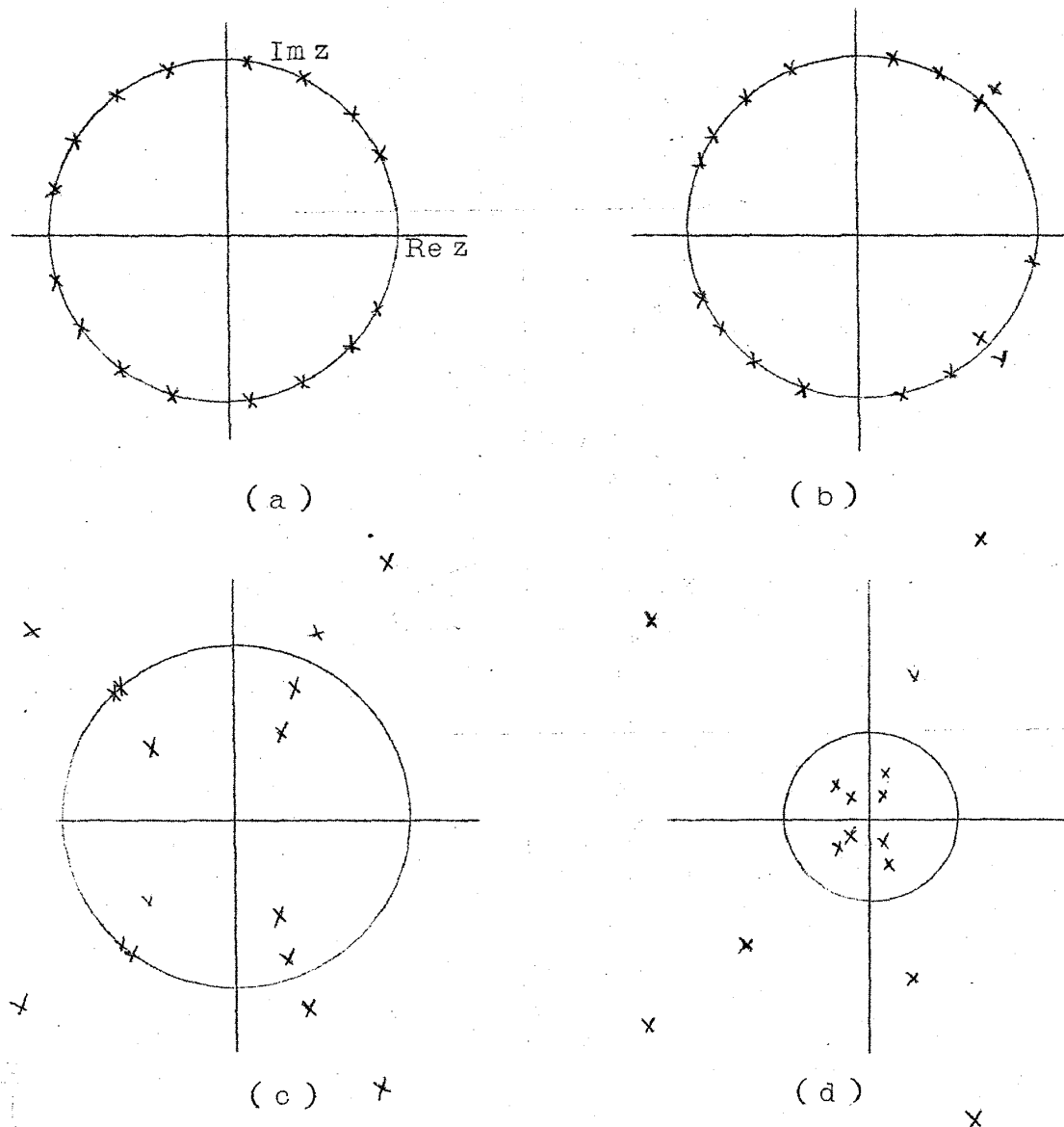


Fig. 3 第2近接格子点を考えた Ising model の複素磁場平面での根分布

$J/kT = 1.0 (> J/kT_c)$ の場合

- (a) $J'/J = -\frac{1}{3}$, (b) $J'/J = -\frac{2}{5}$,
 (c) $J'/J = -\frac{1}{2}$, (d) $J'/J = -\frac{2}{3}$,

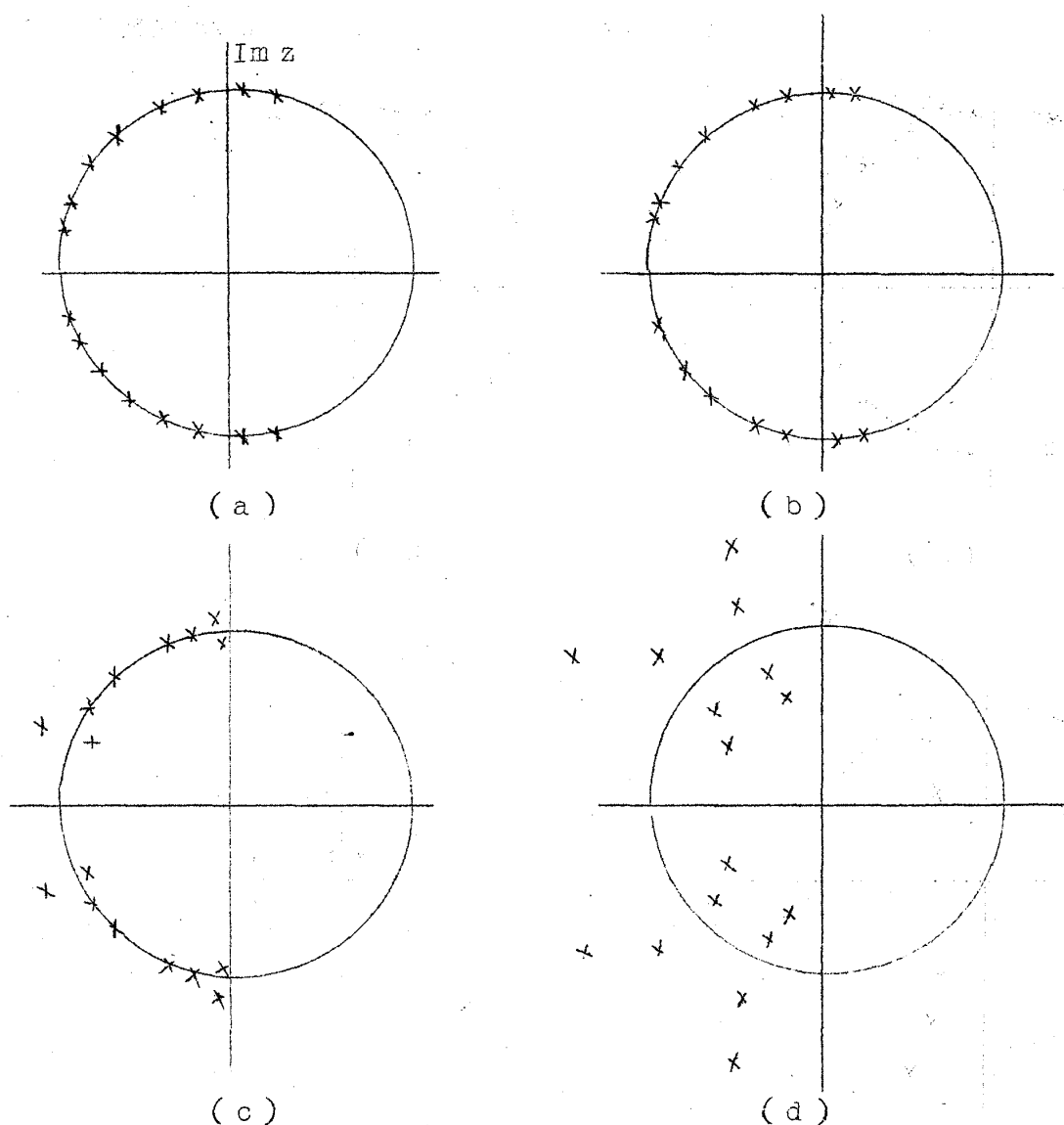


Fig. 4 第2近接格子点を考えた Ising model の複素磁場平面での根分布

$J/kT = 0.25$ ($< J/kT_c$) の場合

$$(a) \quad J'/J = -\frac{1}{5}, \quad (b) \quad J'/J = -\frac{1}{4},$$

$$(c) \quad J'/J = -\frac{1}{3}, \quad (d) \quad J'/J = -\frac{1}{2},$$

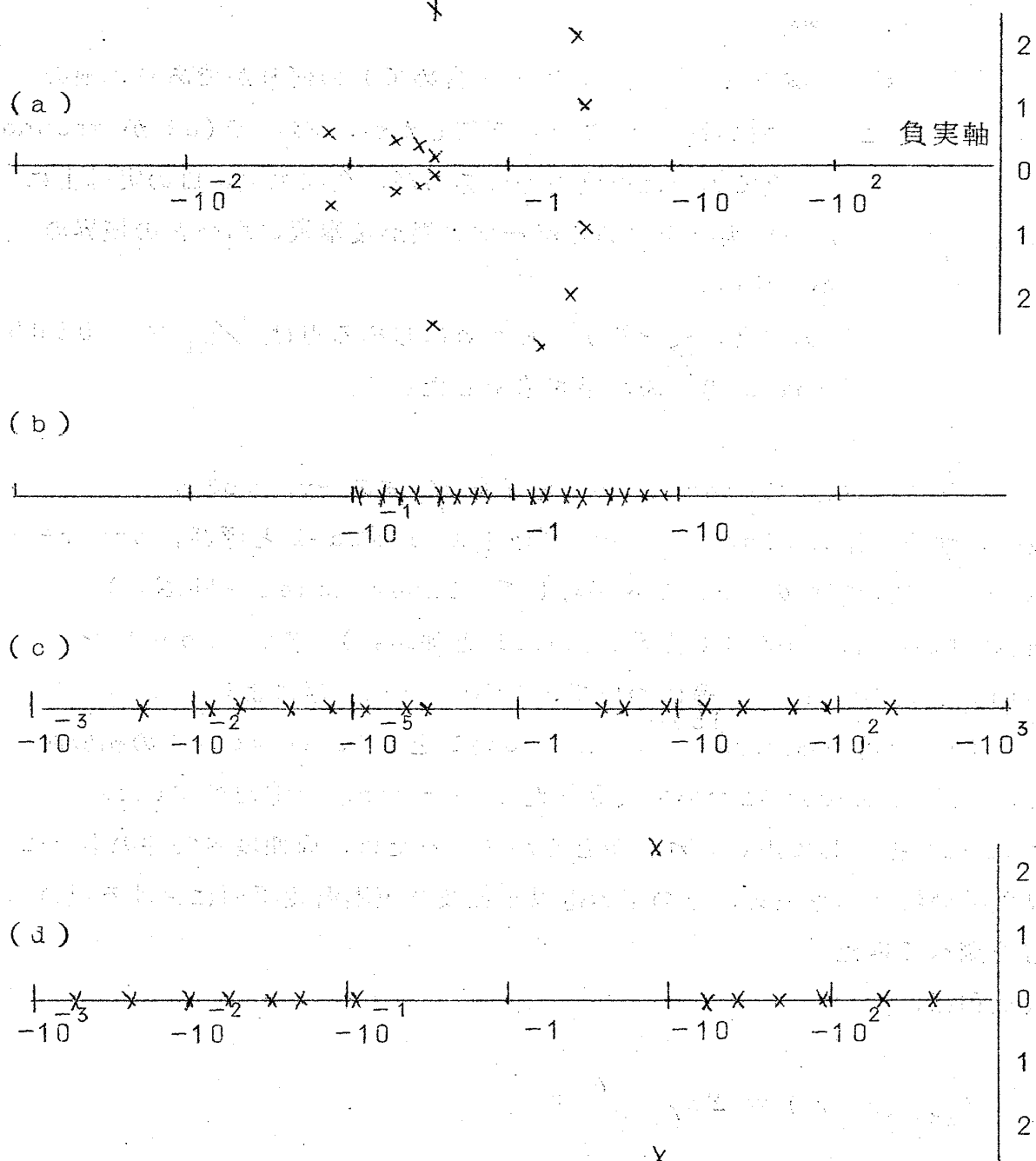


Fig.5 第2近接格子点を考えた Ising model の複素
磁場平面での根分布

$$J/kT = -0.2$$

(a) $J'/J = -1.0$, (b) $J'/J = 0$, (c) $J'/J = 3.0$,

(d) $J'/J = 4.0$

—を交換したもの、縦と横を交換したものを含めて)の何れかであり、根の分布の map もこの3つに対応することを期待したが、Fig. 2(a) が ground state であるときは全ての根は単位円上にあるが、全部の根が負の実軸上にあるときと大部分が負の実軸上にあるが一部の根が複素根の場合との境界の物理的意味は明らかでない。

$J < 0$, $J' = 0$ の場合、複素根があらわれはじめる点は $J/kT = -0.305$ で、Ikeda, Kawabata 等⁹⁾の結果を追認した。

§ 3. 強誘電体の Slater model と反強誘電体の Rys model

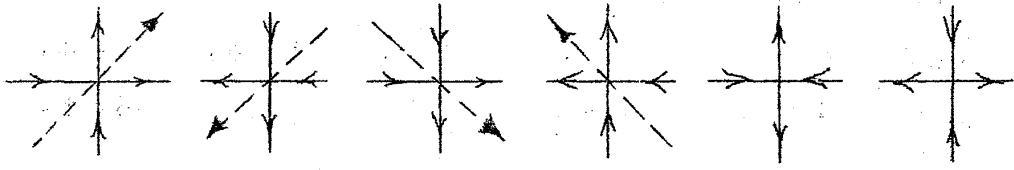
最近、強誘電体の Slater model (以下 KDP model と呼び、order-disorder 型諸電体の model を総称して Slater model と呼ぶ。) 反強誘電体の Rys model (以下 F model と呼ぶ。) KDP model を modify した Wu model 等¹⁵⁾について、Lieb, Yang 等により exact solution が求められた。Ising model と Slater model の相似性から、Ising model について成立った Lee-Yang の定理が Slater model にも拡張して用いられるかどうか調べるため、周期境界条件のもとに有限な系の状態和を求め、その複素電場平面及び複素温度平面における根の分布を調べてみた。

状態和は、

$$Z_{M \times N}(x, z) = \sum a_{\ell_m} x^{\ell_m} z^m$$

$$x = e^{-\epsilon/kT}, \quad z = e^{V/kT}$$

で与えられる。ただし $\epsilon (> 0)$ は格子点の単位 site energy, V は電場による energy で、KDP, F, Wu の各 model について ice condition を満たす6個の格子点の configuration energy は夫々 Fig. 6 のように与えられる。



KDP	0	0	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
F	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	0	0
W_{11}	0	∞	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
電場による energy	-V	+V	+V	-V	0	0

Fig. 6 Ice condition を満たす configuration の
各 model に対する energy.

また $M \times N$ とは電場の方向に N 個, 電場と垂直の方向に M 個ならんだ系を意味している。(Fig. 7)

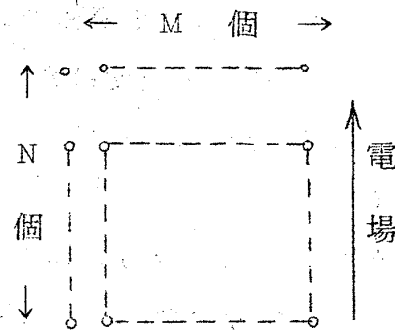


Fig. 7 $M \times N$ の格子

全ての configuration を作って ice condition を満たさないものをす
てるという方法をとるとすると 4×4 では 10^{12} , 6×6 では 10^{27} の case
を調べる事になるが transfer matrix を作ると, これは diagonal
block matrix になる。したがって, この transfer matrix を作る事によ
り, 4×4 では 10^3 , 6×6 では 10^6 の case に減すことが出来る。状
態和を求めたものは

KDP	4×4,	4×6,	5×5,	5×6,	6×4,	6×5
F	4×4,	4×6,			6×4,	
Wu	4×4,	4×6,				

である。Table II - Ⅷ にその係数を示す。根の分布について今までに求められた範囲では（複素温度平面の根分布は一部分未完）次の事が成り立っている。

i) KDP の複素電場平面の根は低温では単位円にのるが，ある温度以上で2次元分布をする。この2次元分布に移る温度は $\infty \times \infty$ の臨界点^{15), 16)}

$$e^{-\epsilon/kT} = x_c = \frac{1}{2}$$
よりやや高いが，系が大きくなれば $\infty \times \infty$ の臨界点に近づくであろう。すなわち臨界点より低温側では Lee - Yang の定理が示すような状況で相転移が起こるが，高温側では ferro の Ising model とは異なった様子を示す。（Fig. 8）

ii) F model の複素電場平面での根分布は全ての温度領域で2次元分布である。（Fig. 9）

iii) $M \times N$ の KDP では z^{2N} 平面を考えると低温で単位円，高温で負の実軸にのっている。この途中で僅かながらある温度範囲で複素根の現われるものもある。（ 4×4 , 4×6 ） $M \rightarrow \infty$ でこの温度はなくなるであろう。

iv) Wu model の複素温度平面の根分布については Suzuki の proposition は成り立っているようである。

v) KDP と F model の複素温度平面の根分布については現在までに得られたデータについては系の大きさが不十分なので，より大きい系についての計算を実施中である。

〔 検 討 〕

i) Slater model では Ising model と異なり，ice conditionにより1個の矢印の向きを変える事は出来ないので，境界条件が複素電場平面，複素温度平面の根の分布にどのように影響するか問題になる。複素電場平面の根分布は，たとえば KDP model の高温，F model の全温度領域で $2N$ 本の放射線上に各々 M 個の根が分布するという規則性は periodic condition によるものであるが，periodic condition 以外の境界条件に変わ

Table II. Partition function of KDP, F, and Wu model of 4×4 .

$$Z(x, z) = \sum a_{\ell m} x^{\ell} z^m$$

$$x = e^{-\epsilon/kT}, \quad z = e^{V/kT}$$

4x4 KDP				
$\ell \backslash m$	-16	-8	0	total
	16	8		
0	1	0	0	2
2	0	0	0	0
4	4	4	0	16
6	0	16	0	32
8	6	148	100	408
10	0	208	800	1216
12	4	200	680	1088
14	0	48	96	192
16	1	4	6	16
total	16	628	1682	2970

4 F				
$\ell \backslash m$	-16	-8	0	total
	16	8		
0	0	0	2	2
2	0	0	0	0
4	0	0	32	32
6	0	0	64	64
8	0	84	528	696
10	0	192	384	768
12	0	288	570	1152
14	0	0	0	0
16	16	64	96	256
total	16	628	1682	2970

4x4 Wu						
$\ell \backslash m$	-16	-8	0	8	16	total
0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	4	4	8
6	0	0	0	0	0	0
8	0	0	6	124	6	136
10	0	0	0	0	0	0
12	0	4	124	124	4	256
14	0	0	0	0	0	0
16	1	4	6	4	1	16
total	1	8	136	256	16	418

Table III. Partition function of KDP, F and Wu models of 4×6 .

4×6 KDP $e \backslash m$	-24	-12	0	total
0	1	0	0	2
2	0	0	0	0
4	6	0	0	12
6	0	4	0	8
8	15	24	0	78
10	0	540	0	1080
12	20	1640	624	3944
14	0	4104	12072	20280
16	15	4704	29616	39054
18	0	3388	19824	26600
20	6	1080	4680	6852
22	0	144	264	552
24	1	0	2	4
total	64	15628	67082	98466

4×6 F $e \backslash m$	-24	-12	0	total
0	0	0	2	2
2	0	0	0	0
4	0	0	48	48
6	0	0	96	96
8	0	0	1368	1368
10	0	0	2880	2880
12	0	732	11904	13368
14	0	2880	15360	21120
16	0	5040	21600	31680
18	0	3840	7680	15360
20	0	2880	5760	11520
22	0	0	0	0
24	64	256	384	1024
total	64	15628	67082	98466

4×6 Wu $e \backslash m$	-24	-12	0	12	24	total
0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	6	6
6	0	0	0	4	0	4
8	0	0	0	0	15	15
10	0	0	0	480	0	480
12	0	0	6	0	20	26
14	0	0	0	2184	0	2184
16	0	0	750	0	15	765
18	0	4	0	1344	0	1348
20	0	0	810	0	6	816
22	0	60	0	84	0	144
24	1	0	2	0	1	4
total	1	64	1568	4096	64	5793

Lee-Yang の定理の一般化とこれに対する数値実験

Table IV. Partition function of KDP model of 5×5 .

5x5 KDP				
$e \backslash m$	-25	-15	-5	total
	25	15	5	
0	1	0	0	2
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	5	5	0	20
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	25	0	50
9	0	0	0	0
10	10	605	20	1270
11	0	50	50	200
12	0	0	330	660
13	0	1300	1550	5700
14	0	50	4900	9900
15	10	1905	5220	14270
16	0	900	10950	23700
17	0	25	9380	18810
18	0	1700	6950	17300
19	0	200	6300	13000
20	5	610	11260	3750
21	0	300	1700	4000
22	0	0	0	0
23	0	100	200	600
24	0	0	0	0
25	1	5	10	32
total	32	7780	48820	113264

Table V. Partition function of KDP model of 5×6 .

5×6 KDP					
$\ell \backslash m$	-30	-18	-6	total	
	30	18	6		
0	1	0	0	2	
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	
5	6	0	0	12	
6	0	5	0	10	
7	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	
9	0	30	0	60	
10	15	0	0	30	
11	0	1230	0	2460	
12	0	75	40	230	
13	0	0	90	180	
14	0	3630	780	8820	
15	20	100	3560	7360	
16	0	7530	14130	43320	
17	0	3900	25590	58980	
18	0	75	59740	119630	
19	0	11430	88530	199920	
20	15	1800	89910	183450	
21	0	6260	122280	257080	
22	0	5100	64335	138870	
23	0	300	66210	133020	
24	0	3635	23850	54970	
25	6	600	13650	28512	
26	0	630	4500	10260	
27	0	300	910	2420	
28	0	0	285	570	
29	0	30	0	60	
30	1	0	0	2	
total	64	46660	578390	1250228	

Table VI. Partition function of KDP and F models of 6×4 .

6×4 KDP

$e \backslash m$	-24 24	-16 16	-8 8	0	total
0	1	0	0	0	2
2	0	0	0	0	0
4	0	6	0	0	12
6	4	0	0	0	8
8	0	24	15	0	78
10	0	480	60	0	1080
12	6	36	1710	440	3944
14	0	600	5244	8592	20280
16	0	774	8247	21012	39054
18	4	180	6372	13488	26600
20	0	246	1650	3060	6852
22	0	60	84	264	552
24	1	0	0	2	4
total	16	2406	23382	46858	98466

6×4 F

$e \backslash m$	-24 24	-16 16	-8 8	0	total
0	0	0	0	2	2
2	0	0	0	0	0
4	0	0	0	48	48
6	0	0	0	96	96
8	0	0	222	924	1368
10	0	0	432	2016	2880
12	0	0	2568	8232	13368
14	0	0	5280	10560	21120
16	0	630	7920	14580	31680
18	0	960	3840	5760	15360
20	0	720	2880	4320	11520
22	0	0	0	0	0
24	16	96	240	320	1024
total	16	2406	23382	46858	98466

Table VII. Partition function of KDP model of 6×5 .

6×5 KDP					
$e \backslash m$	-30	-20	-10	0	total
	30	20	10		
0	1	0	0	0	2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	6	0	0	12
6	5	0	0	0	10
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	30	0	0	60
10	0	0	15	0	30
11	0	1230	0	0	2460
12	10	0	105	0	230
13	0	60	0	60	180
14	0	0	4410	0	8820
15	0	2400	0	2560	7360
16	0	0	21660	0	43320
17	0	4740	0	49500	58980
18	10	0	59805	0	119630
19	0	1500	0	196920	199920
20	0	0	91725	0	183450
21	0	3780	0	249520	257080
22	0	0	69435	0	138870
23	0	2130	0	128760	133020
24	5	0	27480	0	54970
25	0	606	0	27300	28511
26	0	0	5130	0	10260
27	0	300	0	1820	2420
28	0	0	285	0	570
29	0	30	0	0	60
30	1	0	0	0	2
total	32	16812	280050	656440	1250228

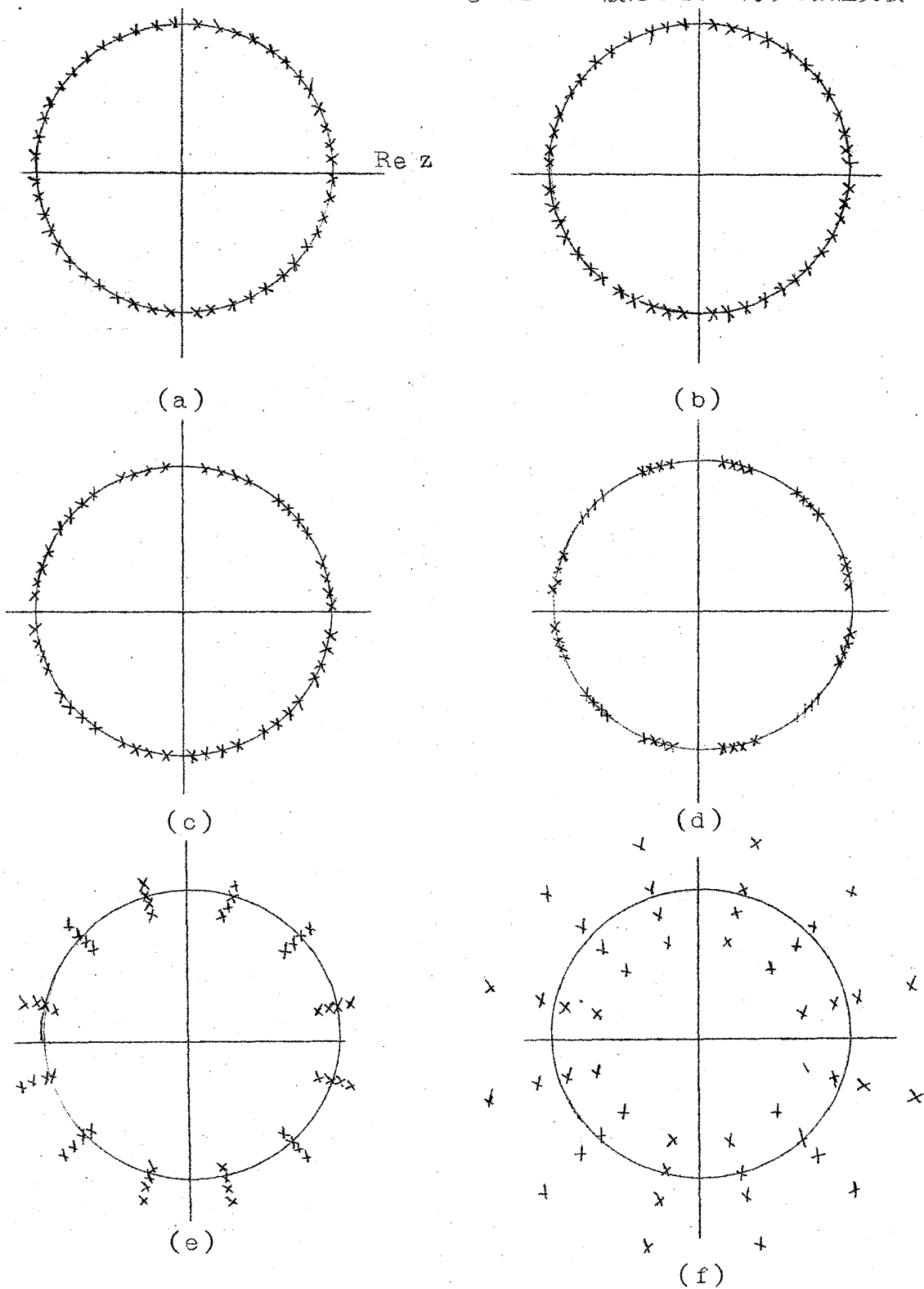


Fig. 8 4×6 KDP の複素電場平面の根分布

(a) $x = 0.1$ (b) $x = 0.45$ (c) $x = 0.5$
 (d) $x = 0.55$ (e) $x = 0.6$ (f) $x = 0.8$

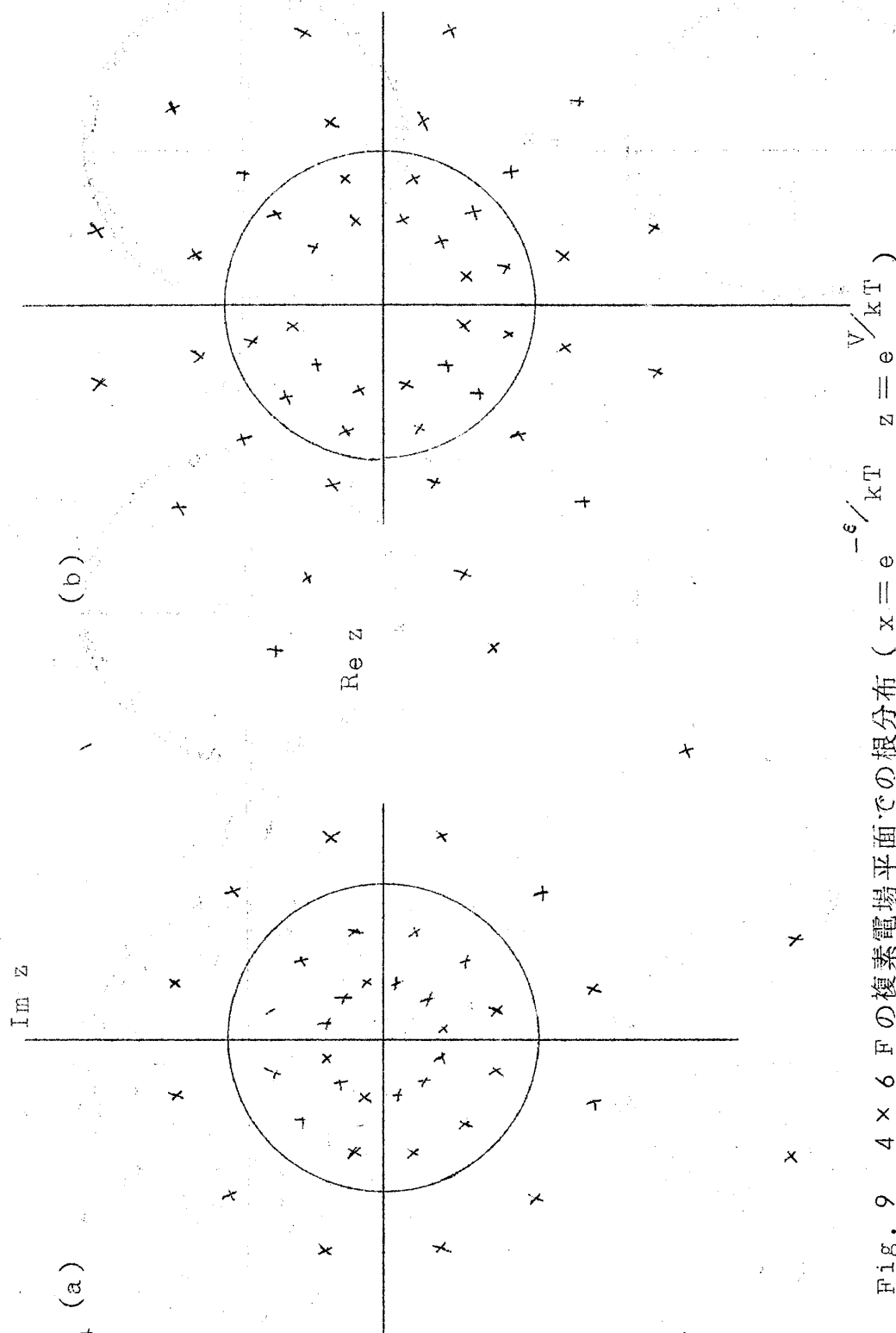


Fig. 9 4×6 F の複素電場平面での根分布 ($x = e^{-\epsilon/kT}, z = e^{V/kT}$)

(a) $x = 0.5$ (b) $x = 0.8$

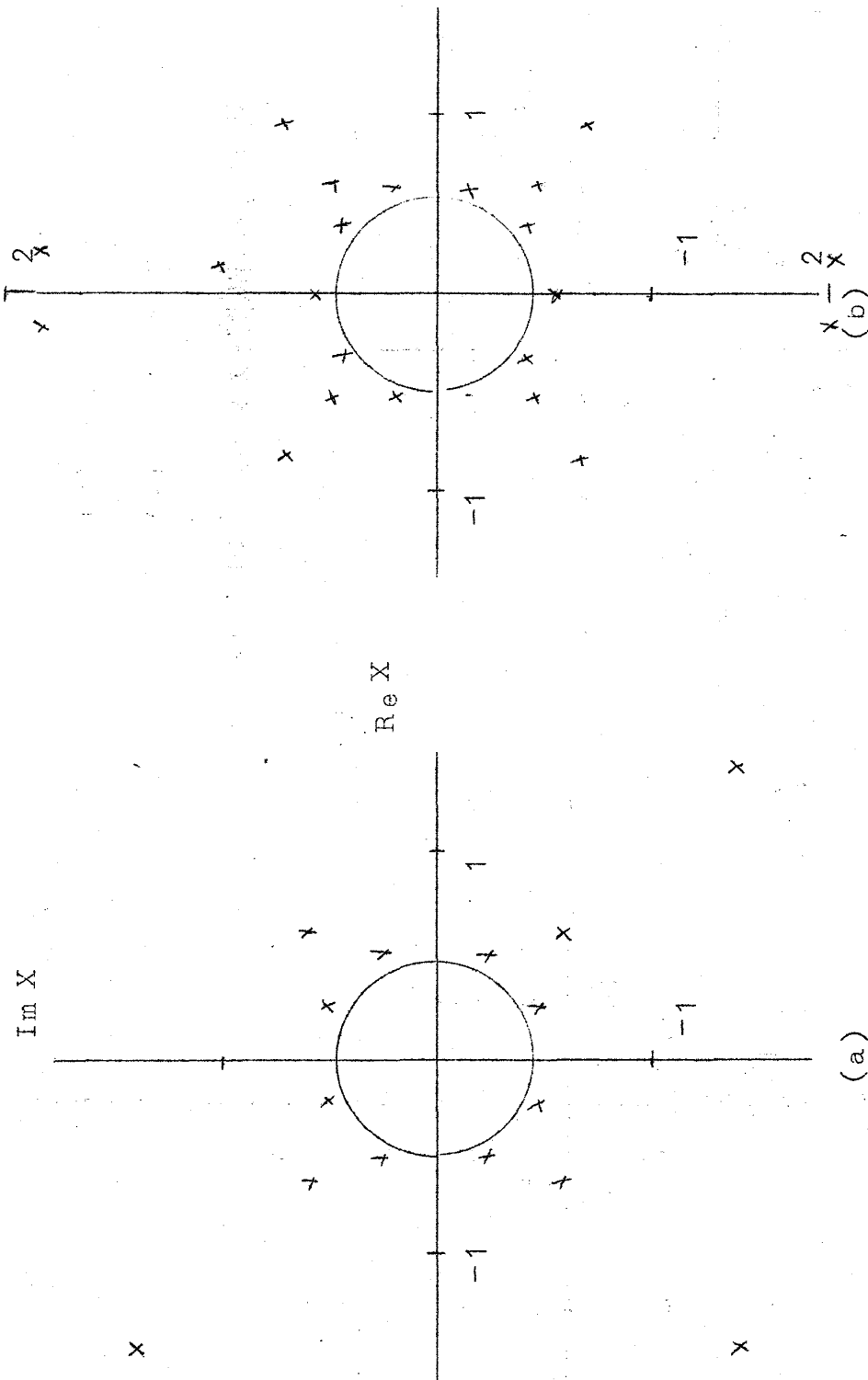


Fig. 10 Wu model の複素温度平面の根分布

(a) 4×4 , (b) 4×6 または 6×4

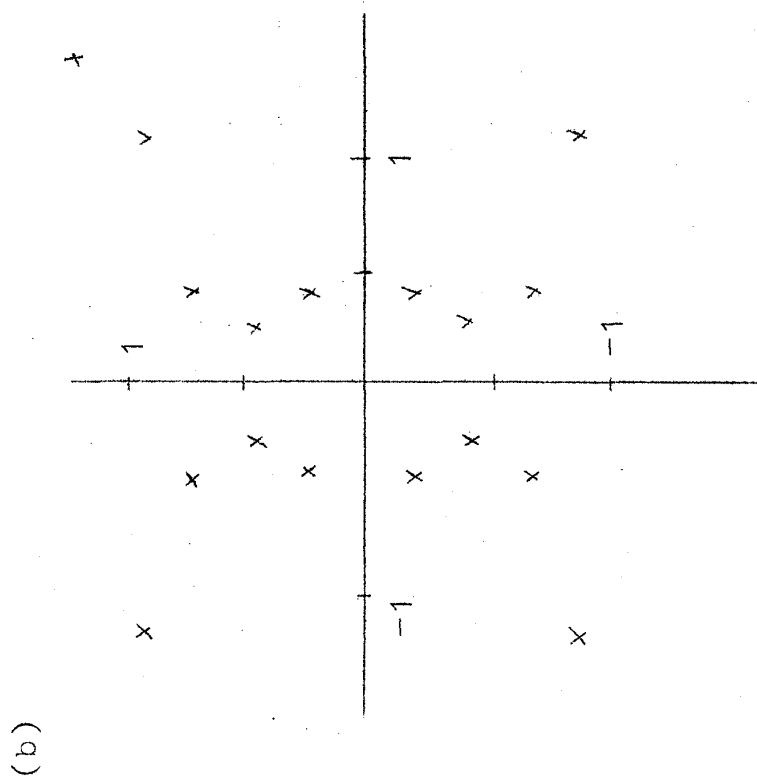
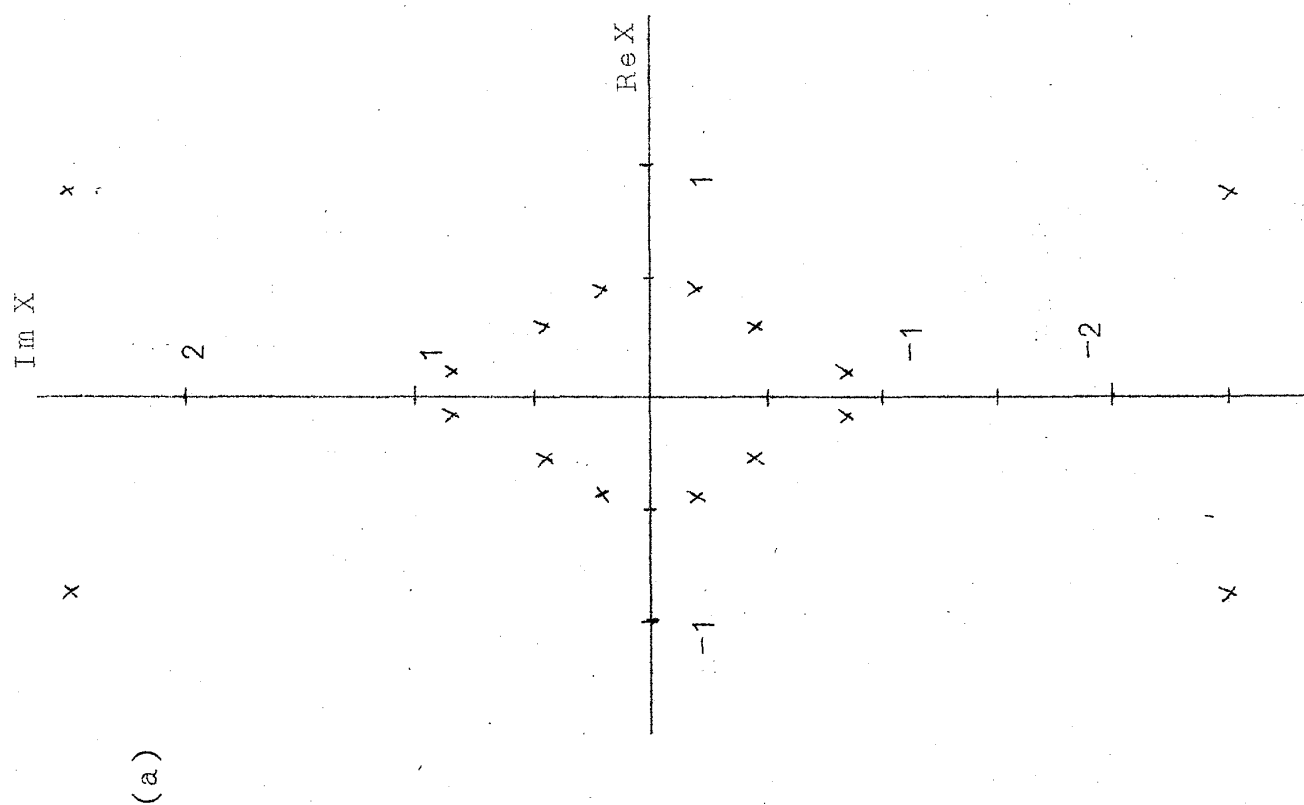


Fig. 11 4×4 の複素温度平面の根分布

(a) K, D, P

(b) F

ても KDP model の低温では単位円上に分布し, KDP model の高温及び F model の全温度領域で 2 次元分布する事は変わらないであろう。

ii) 別に行った比熱の計算からそのピークは $\infty \times \infty$ の臨界点 $x_c = \frac{1}{2}$ よりわずかに低温に出ている。したがって有限系の臨界点に相当する温度は KDP model の複素電場平面の根の分布で 2 次元分布に移行する温度より少し下の温度である事も考えられる。しかしながら, 比熱のピークの温度と 2 次元分布に移行する温度の間隙は系が大きくなるにしたがって減少し, $\infty \times \infty$ の臨界点に近づくはずである。

iii) F model では antiferro の Ising model と同様に複素 fugacity 平面 (複素磁場, 電場平面) の根の分布によって相転移を議論できるか否かは今後の問題である。

参 考 文 献

- 1) C.N. Yang and T.D. Lee, Phys. Rev. 87, 404, 410 (1952)
(1952)
- 2) S. Katsura, Prog. Theor. Phys. 13, 571 (1955)
- 3) N. Saito, J. Chem. Phys. 35, 232 (1961)
- 4) R. Abe, Prog. Theor. Phys. 38, 1182 (1967)
- 5) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 38, 1225 (1967)
- 6) S. Katsura, Proceedings of International Conference
of Theoretical Physics (1953) p. 534;
Prog. Theor. Phys. 19, 476 (1954); 23, 390 (1960);
物性論研究 No. 70 (1954)
- 7) S. Ono, Y. Karaki, M. Suzuki and C. Kawabata, Phys.
Lett, 24a 703 (1967); J. Phys. Soc. Japan, in press.
- 8) C.N. Yang, Special Problems of Statistical Mechanics,
Lecture Note, University of Washington, (1952)
- 9) M. Ikeda, K. Shiono, S. Imai, T. Fukagawa, C. Kawabata,
M. Suzuki, and S. Katsura, NEAC SP 研究会資料, (1967.10)

桂重俊・山本正実・阿部芳彦・大河内勝司

- 10) S.Katsura, Phys. Rev. 127, 1508 (1962)
- 11) M.E.Fisher, Lectures in Theoretical Physics, University of Colorado Press, Boulder, 70, 1 (1964)
- 12) R.Abe, Prog. Theor. Phys. 37, 1070 (1967)
- 13) M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. 38, 1243 (1967)
- 14) S.Katsura, Prog. Theor. Phys. 38, 1415 (1967)
- 15) F.Y.Wu, Phys. Rev. Letters 18, 608 (1967)
E.H.Lieb, Phys. Rev. Letters 18, 692, 1046 (1967);
19, 108 (1967)
B.Sutherland, Phys. Rev. Letters 19, 103 (1967)
C.P.Yang, Phys. Rev. Letters 19, 586 (1967)
B.Sutherland, C.N.Yang and C.P.Yang, Phys. Rev.
Letters 19, 588 (1967)
- 16) S.Ono and Y.Karaki, private communication, Ref.6)
の訂正は12)に出ている。
- 17) C.Kawabata, private communication.
- 18) H.Takahashi, Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 23, 1069
(1941)