

フーリエ級数とヒルベルト空間

渡邊 明大

東大寺学園高等学校

要旨

量子力学の基礎としてフーリエ級数・変換が重きをなしていることは周知の事実である。量子力学を記述するうえで必須となるフーリエ級数が、とあるヒルベルト空間—ヒルベルト空間とは良い性質をみたますベクトル空間のこと—で元の関数に収束することを示すのがこの原稿の目標である。また、関数の二乗の積分と、フーリエ係数の二乗の和が一致することも示す。(パーセヴァルの等式)

重要語句：量子力学、フーリエ級数、フーリエ変換、ヒルベルト空間、パーセヴァルの等式

1. フーリエ級数とベクトル空間

定義 1.1 フーリエ級数の定義

閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の可積分関数 f に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$
$$\text{ただし } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx$$

で定められる級数をフーリエ級数という。 $\hat{f}(n)$ を f の第 n フーリエ係数という。また、 $\hat{f}(n)$ を a_n とかく。

また、フーリエ級数の無限和を途中で切ったものを考え、以下のように $N \in \mathbb{N}$ に対して $S_N(f)$ を定める。

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{inx}$$

定義 1.2 ベクトル空間

空集合ではない集合 V が次の性質を持つとき V を ($\mathbb{R}$ 上の) ベクトル空間という。

1. V の各要素 u, v に対して $u + v$ で表される V の要素があって次の法則が成り立つ。

(a) $u + v = v + u$

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$

- (c) 零ベクトル 0 があって、すべての u に対して

$$u + 0 = u$$

- (d) 任意のベクトル u に対してベクトル u' が存在して

$$u + u' = 0$$

2. V の各要素 u と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して αu で表される V の要素が対応して、次の法則が成り立つ。

(a) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

(b) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

(c) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

- (d) 数 1 に対して

$$1u = u$$

定義 1.3 内積

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の内積とは、任意の V の元の組 u, v に対して $\mathbb{R}$ の元を対応させる (それを $(u \cdot v)$ で表す) 写像で次の条件を満たしているものである。ただし $u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする。

1. $(u \cdot v) = (v \cdot u)$

2. $(\alpha u + \beta v \cdot w) = \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w)$

3. $(u \cdot u) \geq 0$

定義 1.4 ノルムと狭義正定値

内積が与えられているベクトル空間 V について、 u のノルム

$$\|u\| = \sqrt{(u \cdot u)}$$

を定義する。もしさらに $\|u\| = 0$ ならば $u = 0$ であるとき、内積は狭義正定値という。

定義 1.2 と定義 1.3 で $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ にかえ、さらに定義 1.3 の 1 の代わりに

1'. $(u \cdot v) = \overline{(v \cdot u)}$

が成り立ち、さらに 2 の代わりに、

2'. $(\alpha u + \beta v \cdot w) = \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w)$

$$(u \cdot \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha}(u \cdot v) + \bar{\beta}(u \cdot w)$$

が成り立つとき、これで複素数上のベクトル空間を定める。

定義 1.5 直交性

$$(X \cdot Y) = 0$$

が成り立つとき、 X と Y は直交しているといい、これを

$$X \perp Y$$

で表す。

定義 1.6 可積分関数

閉区間 $[0, L]$ 上の実数値関数 f が (リーマン) 可積分関数であるとは、次の 2 条件を満たすときである。

1. f は有界である

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、閉区間 $[0, L]$ 上の分点 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = L$ が存在し、分点に対する過剰和 M と不足和 m が $M - m < \varepsilon$ を満たすただし、

$$M = \sum_{j=1}^N \left\{ \sup_{x_{j-1} < x < x_j} f(x) \right\} (x_j - x_{j-1})$$

$$m = \sum_{j=1}^N \left\{ \inf_{x_{j-1} < x < x_j} f(x) \right\} (x_j - x_{j-1})$$

である。

複素数値関数が可積分であるとは、その実部と虚部の関数がと

内容に関する連絡先：

並河 良典 (京都大学大学院理学研究科)

namikawa@math.kyoto-u.ac.jp

もに可積分であることとする。

定義 1.7 級数の収束と絶対収束

級数 $\{a_n\}$ の和が収束するとは、有限和 S_N がある有限値に収束することである。ただし

$$S_N = \sum_{k=1}^n a_k$$

である。

級数 $\{a_n\}$ の和が絶対収束するとは、各項の絶対値の和が収束することである。つまり、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

がなりたつことである。絶対収束級数は収束する。

2. 補助定理

定理 2.1 ピタゴラスの定理

X と Y が直交すれば、

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$$

が成り立つ。

証明

$(X + Y \cdot X + Y)$ を展開して、 $(X \cdot Y) = 0$ を適用すればよい。(証明終)

定理 2.2 コーシーシュワルツの不等式

任意の $X, Y \in V$ に対し、

$$|(X \cdot Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

が成り立つ。

証明

$\|Y\| = 0$ のとき。

任意の実数 t に対して

$$0 \leq \|X + tY\|^2 = \|X\|^2 + 2t \operatorname{Re}(X \cdot Y)$$

が成り立つ。複素数の範囲で考えているので $(X \cdot Y) = \overline{(Y \cdot X)}$ に注意。

任意の実数 t について成り立つので $\operatorname{Re}(X \cdot Y) = 0$

同様に $\|X + itY\|^2$ を考えて、 $\operatorname{Im}(X \cdot Y) = 0$ もわかる。

よって定理は成り立つ。

$\|Y\| \neq 0$ のとき。

$$c = \frac{(X \cdot Y)}{(Y \cdot Y)}$$

とおく。このとき、

$$(X - cY \cdot Y) = (X \cdot Y) - c(Y \cdot Y) = 0$$

より、 $X - cY$ は Y と直交し、 cY と直交する。

ピタゴラスの定理から

$$\|X\|^2 = \|X - cY\|^2 + \|cY\|^2$$

$$\geq |c|^2 \|Y\|^2 = \left(\frac{(X \cdot Y)}{\|Y\|^2} \right)^2 \cdot \|Y\|^2 = \frac{|(X \cdot Y)|^2}{\|Y\|^2}$$

よって

$$\|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 \geq |(X \cdot Y)|^2$$

平方根をとって

$$\|X\| \cdot \|Y\| \geq |(X \cdot Y)|$$

定理の式が示された。(証明終)

定理 2.3 三角不等式

任意の $X, Y \in V$ に対し、

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

が成り立つ。

証明

$$\|X + Y\|^2 = (X \cdot X) + (X \cdot Y) + (Y \cdot X) + (Y \cdot Y)$$

について、 $(X \cdot X) = \|X\|^2, (Y \cdot Y) = \|Y\|^2$ は明らか。また、実数の場合の三角不等式と先のコーシーシュワルツの不等式から

$$|(X \cdot Y) + (Y \cdot X)| \leq |(X \cdot Y)| + |(Y \cdot X)| \leq 2\|X\| \cdot \|Y\|$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &\leq \|X\|^2 + 2\|X\| \cdot \|Y\| + \|Y\|^2 \\ &= (\|X\| + \|Y\|)^2 \end{aligned}$$

よって

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

が示された。(証明終)

3. ヒルベルト空間とその例

定義 3.1 ヒルベルト空間

次の2つの性質をみたす内積及びノルムを持ったベクトル空間をヒルベルト空間という。

1. 内積が狭義正定値
2. ベクトル空間は完備

定義 3.2 $l^2(\mathbb{Z})$ の導入

$l^2(\mathbb{Z})$ を (両側) 無限複素数列

$$(\cdots, a_{-n}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$$

で

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$$

をみたすものの全体の集合とする。

$l^2(\mathbb{Z})$ に成分ごとの和として加法を、成分ごとのスカラー倍としてスカラー倍を定義する。また、 A, B の内積は

$$(A \cdot B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}$$

で定義する。 A のノルムは

$$\|A\| = \sqrt{(A \cdot A)} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2}$$

で与えられる。

命題 3.3 内積は絶対収束

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{b_n}| < \infty$$

が成り立つ。

証明

任意の自然数 N に対して、

$$\sum_{-N < n < N} |a_n \overline{b_n}| = \sum_{-N < n < N} |a_n| |b_n|$$

であり、有限次元版のコーシーシュワルツの不等式から、

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{-N < n < N} |a_n| |b_n| \right\}^2 &\leq \left\{ \sum_{-N < n < N} |a_n|^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{-N < n < N} |b_n|^2 \right\} \\ &\leq \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。 N は任意であるから、

$$\left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{b_n}| \right\}^2 \leq \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 \right\}$$

よって両辺正なので

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n \bar{b}_n| \leq \sqrt{\left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 \right\}} < \infty$$

が成り立つ。よって示された。(証明終)

絶対収束級数は収束するので、この定義による内積は収束し、値が定まることがわかる。また、この証明でコーシーシュワルツの不等式が示されている。

命題 3.4 ベクトル空間であること

このとき $l^2(\mathbb{Z})$ はベクトル空間である。

証明

定義 1.2 の諸条件のうち、非自明なものは 1(b) だけである。

A, B を $l^2(\mathbb{Z})$ の元とする。 $A + B$ も $l^2(\mathbb{Z})$ の元であることを示す。

以下 A_N で、 $|n| > N$ に対しては $a_n = 0$ とした元

$$A_N = (\cdots, 0, a_{-N}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_N, 0, \cdots)$$

を表す。

有限次元ユークリッド空間での三角不等式から

$$\|A_N + B_N\| \leq \|A_N\| + \|B_N\|$$

がなりたち、 A_N とノルムの定義から明らかに

$$\|A_N\| \leq \|A\|$$

がなりたつので、

$$\|A_N + B_N\| \leq \|A\| + \|B\|$$

を得る。したがって

$$\sum_{|n| \leq N} |a_n + b_n|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$$

となる。任意の N で成り立つので、無限大に飛ばして

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n + b_n|^2 < \infty$$

を得る。よって $A + B$ も $l^2(\mathbb{Z})$ の元である。(証明終)

命題 3.5 ヒルベルト空間であること

$l^2(\mathbb{Z})$ はヒルベルト空間である。

証明

$l^2(\mathbb{Z})$ が完備であることを示す。

$A_k = \{a_{k,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}, k = 1, 2, \cdots$ をコーシー列とする。

すなわち、

$$\lim_{m, l \rightarrow \infty} \|A_m - A_l\| \rightarrow 0$$

と仮定する。各 n に対して $\{a_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ を考える。このとき、

$$|a_{m,n} - a_{l,n}|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n} - a_{l,n}|^2 = \|A_m - A_l\|^2$$

が成り立つので、

$$0 \leq |a_{m,n} - a_{l,n}| \leq \|A_m - A_l\|$$

したがって

$$\lim_{m, l \rightarrow \infty} |a_{m,n} - a_{l,n}| \rightarrow 0$$

つまり、 $\{a_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ はコーシー列である。 $\mathbb{C}$ は完備なので、

各 n について $\{a_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ は極限を持ち、それを b_n とおく。

$B = (\cdots, b_{-1}, b_0, b_1, \cdots)$ で B を定める。

仮定より、

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall k, k' > N. \|A_k - A_{k'}\| < \varepsilon$$

このとき、

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_{k,i} - a_{k',i}|^2 = \|A_k - A_{k'}\|^2$$

よって、任意の $M \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\sum_{-M \leq i \leq M} |a_{k,i} - a_{k',i}|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_{k,i} - a_{k',i}|^2 < \varepsilon^2$$

が成り立つ。 $k' \rightarrow \infty$ として、

$$\sum_{-M \leq i \leq M} |a_{k,i} - b_i|^2 \leq \varepsilon^2$$

が成り立つ。(極限をとることで不等号に等号が加わることに注意) これは任意の M でなりたつから、

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_{k,i} - b_i|^2 \leq \varepsilon^2$$

よって

$$\|A_k - B\| \leq \varepsilon$$

したがって、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - B\| \rightarrow 0$$

最後に、 $B \in l^2(\mathbb{Z})$ を示す。

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_{k,i} - b_i|^2 < \varepsilon^2$$

より、 $A_k - B \in l^2(\mathbb{Z})$ 。また、 $A_k \in l^2(\mathbb{Z})$ であるから、 $l^2(\mathbb{Z})$ はベクトル空間なので

$$B \in l^2(\mathbb{Z})$$

以上より $l^2(\mathbb{Z})$ が完備であることが示された。(証明終)

4. $\mathcal{R}$ の導入

内積 $(f \cdot g)$ が

$$(f \cdot g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

で与えられる、円周上の可積分関数全体の集合 $\mathcal{R}$ を考える。可積分関数の和は可積分関数であり、定数倍も可積分関数であることより、 $\mathcal{R}$ は ($\mathbb{C}$ 上の) ベクトル空間である。また、各整数 n に対して $e_n(\theta) = e^{in\theta}$ とおく。このとき、

$$(e_n \cdot e_m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

が成り立っている。この性質を正規直交性という。さらに、フーリエ係数は次のように書ける。

$$(f \cdot e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = a_n$$

特に、

$$S_N(f) = \sum_{-N \leq n \leq N} a_n e_n$$

とかける。このとき、任意の $-N \leq n \leq N$ なる n に対して、 $f - S_N(f)$ は e_n 直交する。

5. 種々の補助定理

定理 5.1 最良近似

f を円周上の可積分関数とし、そのフーリエ係数を a_n とする。このとき、任意の複素数 c_n に対して

$$\|f - S_N(f)\| \leq \left\| f - \sum_{-N \leq n \leq N} c_n e_n \right\|$$

が成立する。さらに等号は、任意の $-N \leq n \leq N$ に対して、 $c_n = a_n$ である場合のみにおいて成立する。

証明

$b_n = a_n - c_n$ とする。前述のことから、

$$f - S_N(f) \perp \sum_{-N \leq n \leq N} b_n e_n$$

が成り立つので、ピタゴラスの定理から

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{-N \leq n \leq N} c_n e_n \right\|^2 \\ = \|f - S_N(f)\|^2 + \left\| \sum_{-N \leq n \leq N} b_n e_n \right\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。明らかに

$$\left\| \sum_{-N \leq n \leq N} b_n e_n \right\|^2 \geq 0$$

で等号成立は任意の $-N \leq n \leq N$ に対して、 $b_n = 0$ が成り立つとき、すなわち、 $c_n = a_n$ である場合のみ。

よって示された。(証明終)

$S_N(f)$ は、 $\{e_{-N}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_N\}$ で張られた空間への f の射影であるという幾何学的解釈をするとわかりやすいかもしれない。

以下の二つの補題を仮定する。

補題 5.2 三角多項式による近似

単位円周上の任意の連続関数は三角多項式によって一様に近似できる。すなわち、 f を単位円周上の連続関数としたとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

をみたす三角多項式 P が存在する。

補題 5.3 連続関数近似

f を単位円周上の可積分関数とし、 $|f(x)| \leq B (x \in [0, 2\pi])$ とする。このとき、次の 2 条件を満たす単位円周上の連続関数の列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する。

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |f_k(x)| \leq B, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

補題 5.3 によって議論を連続関数の場合に帰着することが出来る。

6. 級数の収束と $l^2(\mathbb{Z})$ との関係

定理 6.1 フーリエ級数の収束

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\| = 0$$

証明

まず f が連続関数の場合について証明する。

補題 5.2 より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$|f(\theta) - P(\theta)| < \varepsilon, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

をみたす三角多項式 P が存在する。2 乗して積分することで

$$\begin{aligned} \|f - P\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P(\theta)|^2 d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\theta = \varepsilon^2 \\ \|f - P\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

この P の次数を M とすると、最良近似定理 5.1 より $N \geq M$ について

$$\|f - S_N(f)\| \leq \|f - P\| < \varepsilon$$

が分かる。 $\varepsilon > 0$ は任意であったので、 f が連続関数の場合について証明された。

f が単に可積分なだけである場合、単純に三角多項式で一様に近似することはできないが、補題 5.3 を適用することで、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、円周上での連続関数 g で

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |g(\theta)| \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| = B$$

かつ

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| d\theta < \varepsilon^2$$

をみたすものをとれる。これにより

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| \cdot |f(\theta) - g(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| \cdot (|f(\theta)| + |g(\theta)|) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| \cdot (B + B) d\theta \\ &\leq \frac{B}{\pi} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\|f - g\| \leq \sqrt{\frac{B}{\pi}} \varepsilon$$

ここで、 g は連続関数なので補題 5.2 が適用でき、三角多項式 P によって

$$\|g - P\| < \varepsilon$$

をみたすようにできる。三角不等式から、

$$\|f - P\| \leq \|f - g\| + \|g - P\| < \left(\sqrt{\frac{B}{\pi}} + 1 \right) \varepsilon$$

この P の次数を M とすると、最良近似定理 5.1 より $N \geq M$ について

$$\|f - S_N(f)\| \leq \|f - P\| < \left(\sqrt{\frac{B}{\pi}} + 1 \right) \varepsilon$$

いま、 B は定数で、 $\varepsilon > 0$ は任意なので、 f が単に可積分なだけである場合も定理が証明できた。(証明終)

定理 6.2 パーセヴァルの等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|^2$$

証明

$$f - \sum_{-N \leq n \leq N} a_n e_n \perp \sum_{-N \leq n \leq N} a_n e_n$$

よりピタゴラスの定理から

$$\|f\|^2 = \left\| f - \sum_{-N \leq n \leq N} a_n e_n \right\|^2 + \left\| \sum_{-N \leq n \leq N} a_n e_n \right\|^2$$

が成り立つ。 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の正規直交性より

$$\left\| \sum_{-N \leq n \leq N} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{-N \leq n \leq N} |a_n|^2$$

が成り立つので

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{-N \leq n \leq N} |a_n|^2$$

定理 6.1 より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\| = 0$$

だから、

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

が示された。(証明終)

定理 6.3 リーマン - ルベーグの補題

f を円周上の可積分関数とする。このとき、 $|n| \rightarrow \infty$ ならば $\hat{f}(n)(= a_n) \rightarrow 0$ である。

証明

収束級数の項は 0 に収束することと、パーセヴァルの等式より明らか。(証明終)

系 6.4 内積の別表示

円周上の可積分関数 F, G について

$$a_n = (F \cdot e_n)$$

$$b_n = (G \cdot e_n)$$

とする。このとき、

$$(F \cdot G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \overline{G(\theta)} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

が成立する。

証明

$$\|F + G\|^2 = (F \cdot F) + (F \cdot G) + (G \cdot F) + (G \cdot G)$$

$$\|F - G\|^2 = (F \cdot F) - (F \cdot G) - (G \cdot F) + (G \cdot G)$$

$$\|F + iG\|^2 = (F \cdot F) - i(F \cdot G) + i(G \cdot F) + (G \cdot G)$$

$$\|F - iG\|^2 = (F \cdot F) + i(F \cdot G) - i(G \cdot F) + (G \cdot G)$$

より

$$\begin{aligned} \|F + G\|^2 - \|F - G\|^2 + i(\|F + iG\|^2 - \|F - iG\|^2) \\ = 4(F \cdot G) \end{aligned}$$

また、パーセヴァルの等式より

$$\|F + G\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 + a_n \overline{b_n} + \overline{a_n} b_n + |b_n|^2$$

$$\|F - G\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 - a_n \overline{b_n} - \overline{a_n} b_n + |b_n|^2$$

$$\|F + iG\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 - i a_n \overline{b_n} + i \overline{a_n} b_n + |b_n|^2$$

$$\|F - iG\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 + i a_n \overline{b_n} - i \overline{a_n} b_n + |b_n|^2$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \|F + G\|^2 - \|F - G\|^2 + i(\|F + iG\|^2 - \|F - iG\|^2) \\ = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} \end{aligned}$$

以上より、

$$(F \cdot G) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

が示された。(証明終)

最後に、フーリエ級数と $l^2(\mathbb{Z})$ の関係性を述べる。

定理 6.1 はフーリエ級数がヒルベルト空間 $l^2(\mathbb{Z})$ 上で元の関数に収束するということを示している。

また、任意の円周上の可積分関数に対して、そのフーリエ係数の作る数列 $\{a_n\}$ を考えたとき、パーセヴァルの等式は、 $\{a_n\} \in l^2(\mathbb{Z})$ を保証している。なぜなら、可積分ならば有界なので $\|f\|$ は有限の値をとるからである。

証明したように $l^2(\mathbb{Z})$ はヒルベルト空間である。実は、ここでは証明しなかったが、円周上可積分関数からなる空間 $\mathcal{R}$ は完備ではない。つまり、 $l^2(\mathbb{Z})$ の元ならばその元をフーリエ級数とする関数が存在するというわけではない。

ルベーグ積分を導入することで、 $\mathcal{R}$ は完備化されるが、まだ十分に勉強していないので、本稿はここまでとする。

謝辞

本論文を作成するにあたり、京都大学大学院理学研究科数学教室の並河良典教授から、丁寧かつ熱心なご指導を賜りました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

エリ阿斯・M・スタイン, ラミ・シャカルチ. プリンストン解析学講義 I, フーリエ解析入門. 日本評論社, 東京. (2006).

Fourier Series and Hilbert Space

AKIHIRO WATANABE

Todaiji Gakuen Senior High School

Abstract

Fourier series and Fourier transforms play a crucial role in describing quantum mechanics. It is our goal to prove that Fourier series converges to the original function in a certain Hilbert space, a kind of vector space that satisfies several good conditions. We will also prove Parseval's identity, which asserts that the sum of the squares of the Fourier series of a function is equal to the integral of the square of the function.

Key words: Quantum mechanics, Fourier series, Fourier transforms, Hilbert space, Parseval's identity

Correspondence Researcher:

Namikawa, Y. (namikawa@math.kyoto-u.ac.jp)

Graduate School of Science, Kyoto University