

Wiener-Hermite 展開の応用

— Burgers 系のエネルギースペクトル —

関学大 理 矢 野 正文

今 村 勤

§ 1 ま え が き

時間的に変る *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開が導入され、非圧縮性非粘性流体の厳密にガウス分布を¹⁾もつ解 (Hopf の特解) が展開の第 1 項のみで表はされた。その考え方は、各時刻時刻で異った適当な *ideal random function* を用い、未知の確率関数を Wiener-Hermite 展開の始めの数項で長時間近似しようとするものである。この方法は 3-mode problem の近似的にガウス分布をしている解を取り扱うのに用いられ、展開の始めの 2 項を用いてよく近似されることが示された。²⁾

一方時間的に変るな³⁾い *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開の Burgers 系への応用は、今迄数人の人々によってなされて来た。特に展開の始めの 2 項を用いて初期値問題を数値的に解く試み⁴⁾がなされ、エネルギースペクトル $E(k) \sim k^{-2}$ が妥当と

思はれる結果が得られている^カ。しかしながらそこでは展開の第2項目がかなりの波数領域で第1項より大きくなるという不満足な点があり、展開の妥当性に疑問をなげかけている。このような場合にはこそ、適当な時間的变化を持った *ideal random function* を用いて収斂性をよくすることが望まれるのであろう。

ここでは時間的に変る *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開の始めの2項を、Burgers 系のエネルギースペクトルが $E(k) \sim k^{-2}$, $E(k) \sim k^{-\frac{3}{2}}$, $E(k) \sim k^{-\frac{5}{2}}$ であるような3つのガウス分布を初期値とした問題の数値積分に適用する。その結果、(1) *ideal random function* の時間変化を適当にとることにより、展開の収斂性をよくすることが出来ることを示す。即ち時間的に変る *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開の場合に較べて、かなり大きな波数領域にわたって展開の第1項を第2項に較べて大きくたもたれることを示す。(2) $E(k) \sim k^{-2}$ の初期条件のときはエネルギースペクトルの形は安定であり、 $E(k) \sim k^{-\frac{3}{2}}$, $E(k) \sim k^{-\frac{5}{2}}$ の場合はエネルギースペクトルの形が k^{-2} に近づく傾向を示す。即ち $E(k) \sim k^{-\alpha}$ ($\alpha \sim 2$) のような近似的に平衡なエネルギースペクトルがある公算が大きいことを示す。

§2で Burgers 系に対し時間的に変る *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開の概要をのべ、適当な *ideal random function* の時間変化についてのべる。§3で数値積分の結果をのべる。

§2 Burgers 系に対する時間的に変る ideal random function を用い

た Wiener-Hermite 展開

我々が取り扱う系は 1次元の Burgers 方程式

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}^2(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, t)$$

に従う速度場 $\tilde{u}(x, t)$ である。その Fourier 変換

$$u(k, t) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x, t) e^{-ikx} dx$$

に対する方程式は

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(k, t) + \frac{ik}{2} \int u(k-k', t) u(k', t) dk' = -\nu k^2 u(k, t)$$

である。 $u(k, t)$ に対する Wiener-Hermite 展開は次の様になる

$$(3) \quad u(k, t) = K^{(0)}(k, t) H^{(0)}(k, t) + \int K^{(2)}(k-k', k', t) H^{(2)}(k-k', k', t) dk' + \dots$$

ここで $K^{(n)}$ は普通の関数であり、 $H^{(n)}$ は時間的に変る ideal random functions を用いた Wiener-Hermite 関数の Fourier 変換

$$H^{(n)}(k_1, \dots, k_n, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{H}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - \dots - ik_n x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

である。¹⁾ $u(k, t)$ の統計的平均 (以下 $\langle \rangle$ で示す) は 0 とし、空間的な統計的一様性を仮定している。 $H^{(n)}$ の性質は参考文献 (1) と (5) にのべているが、ここで使う性質は

$$\langle H^{(n)}(k_1, \dots, k_n, t) \rangle = \langle H^{(n)}(k_1, t) H^{(2)}(k_1, k_2, t) \rangle = 0$$

$$\langle H^{(1)}(k_1, t) H^{(1)}(k_2, t) \rangle = \delta(k_1 + k_2)$$

$$\langle H^{(3)}(k, t) H^{(3)}(l, t) H^{(2)}(m, n, t) \rangle = \delta(k+m)\delta(l+n) + \delta(k+n)\delta(l+m)$$

$$\langle H^{(2)}(k, l, t) H^{(2)}(m, n, t) \rangle = \delta(k+m)\delta(l+n) + \delta(k+n)\delta(l+m)$$

$$\begin{aligned} \langle H^{(2)}(k, l, t) H^{(2)}(m, n, t) H^{(2)}(p, \delta, t) \rangle = & \delta(k+m)\delta(n+p)\delta(\delta+l) \\ & + \delta(k+n)\delta(m+p)\delta(\delta+l) + \delta(k+m)\delta(n+\delta)\delta(p+l) \\ & + \delta(k+n)\delta(m+\delta)\delta(p+l) + \delta(k+p)\delta(m+\delta)\delta(l+n) + \delta(k+p)\delta(m+l)\delta(\delta+n) \\ & + \delta(k+\delta)\delta(m+p)\delta(l+n) + \delta(k+\delta)\delta(m+l)\delta(p+n) \end{aligned}$$

δ は Dirac の δ -関数である。

である。展開の第1項はガウス分布を示し、第2項以下はその補正を表はす。

ideal random function の時間的変化は次の方程式に従うとしよう。

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} H^{(n)}(k, t) = \int L^{(2)}(k-k', k', t) H^{(2)}(k-k', k', t) dk' + \dots$$

以下 $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $L^{(2)}$ の変数に t をのりなすことにする。 $H^{(2)}(k, l, t)$ は k と l について対称であるから、 $K^{(2)}(k, l)$ $L^{(2)}(k, l)$ も対称としてよい。 $H^{(n)}(x, t)$ が ideal random function であるために $L^{(2)}(k, l)$ の充すべき性質は、

$$\frac{d}{dt} \langle H^{(3)}(k) H^{(3)}(l) H^{(1)}(l-k-l, t) \rangle = 0$$

の容易に導かれ,

$$(5) \quad L^{(2)}(k, l) + L^{(2)}(l, -k-l) + L^{(2)}(-k-l, k) = 0$$

である。展開(3)(4)を $H^{(2)}$ の項でまとめると $K'''(k)$, $K^{(2)}(k, l)$ に対する

方程式は

$$(6) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) K'''(k) = -2ik \int K'''(k') K^{(2)}(-k', k) dk' \\ + 2 \int K^{(2)}(k-k', k') L^{(2)}(k'-k, -k') dk'$$

$$(7) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu(k+l)^2\right) K^{(2)}(k, l) = -K'''(k+l) L^{(2)}(k, l) \\ - i(k+l) \left[\frac{1}{2} K'''(k) K'''(l) + 2 \int K^{(2)}(k, k') K^{(2)}(l, -k') dk' \right]$$

となる。簡単のため、初期値として $K^{(4)}(k)$ が実数, $K^{(2)}(k, l)$ が純虚数をとるとすると, $L^{(2)}(k, l)$ を純虚数にとれば, 方程式(6)(7)からこの性質は後の時刻迄保たれることが判る。そこで以下 $K^{(2)}(k, l)$, $L^{(2)}(k, l)$ の虚数部分を改めて $K^{(2)}(k, l)$, $L^{(2)}(k, l)$ とおくことにすると(6)(7)は

$$(8) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) K'''(k) = 2k \int K'''(k') K^{(2)}(-k', k) dk' - 2 \int K^{(2)}(k-k', k') L^{(2)}(k'-k, -k') dk'$$

$$(9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu(k+l)^2\right) K^{(2)}(k, l) = -K'''(k+l) L^{(2)}(k, l) \\ - (k+l) \left[\frac{1}{2} K'''(k) K'''(l) - 2 \int K^{(2)}(k, k') K^{(2)}(l, -k') dk' \right]$$

となり，実変数の実関数の微積分方程式となる。

さて展開の収斂性を最もよくするには $L^{(2)}(k, l)$ をどう選べばよいのか？ それに対して一意的なきめかたはなかりように思われる。しかしその選びかたにはいくつかのヒントがある。まずどうしても条件 (5) を満たさねばならぬ。条件 (5) は $L^{(2)}(k, l)$ が

$$(10) \quad L^{(2)}(k, l) = (k+l) F(k, l, -k-l)$$

の形をしていれば， $F(k, l, -k-l)$ を任意の対称関数として，自衛的に充てられている。次に方程式 (8) (9) で $\nu=0$ とすると， $L^{(2)}(k, l)$ を

$$L^{(2)}(k, l) = -\frac{(k+l)}{2} \alpha e \quad (\alpha e \text{ const.})$$

ととって，

$$K^{(0)}(k) = \alpha e, \quad K^{(2)}(k, l) = 0$$

が解となつてゐることが判る。これが Hopf の特解に対応するものである。従つて $\nu \rightarrow 0$ の極限でこの解につながるような解があるとするとき， $L^{(2)}(k, l)$ は

$$(11) \quad \lim_{\substack{\nu \rightarrow 0 \\ K^{(0)}(k) \rightarrow \alpha e \\ K^{(2)}(k, l) \rightarrow 0}} L^{(2)}(k, l) = -\frac{(k+l)}{2} \alpha e$$

を充ててゐることが望ましい。最後に $L^{(2)}(k, l)$ の導入が展開の収斂をよくするためには，どうであらばよいのか？ 今 $u(k+l)$ の展

開で $K^{(1)}(k, l)$ の項が $K^{(2)}(k+l)$ に較べて小さければ、展開の収斂がよいといえるであろう。 $K^{(2)}(k, l)$ を小さくするには、それを大きくする原因である (9) の右辺の $K^{(1)}(k)K^{(1)}(l)$ の項の導与と $K^{(2)}(k+l)$ の項の導与で出来るだけ打ち消すように $L^{(2)}(k, l)$ をとることが必要であろう。即ち非線形項 $K^{(1)}(k)K^{(1)}(l)$ の影響の大きな部分を 'くりにみ' 項 $K^{(2)}(k+l)L^{(2)}(k, l)$ であらうし、それを *ideal random function* の時間的变化によるガウス項のくみかえにあしこめることである。これを完全に消すには一見 $L^{(2)}(k, l) = -\frac{1}{2}(k+l) K^{(1)}(k)K^{(1)}(l) / K^{(2)}(k+l)$ とすればよい様にみえるが、条件 (5) のためにそうはいかない。条件 (5) を考えるためには、 $K^{(2)}(k, l)$, $K^{(2)}(l, k+l)$, $K^{(2)}(-k-l, k)$ に対する打ち消しの効果を同時に考えねばならない。今この打ち消しの度合を表はすものとして次の量

$$(12) \quad \sum_{\substack{a, b, c \text{ cyclic } 1, 2, 3 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0}} \left| \frac{(k_a + k_b)}{2} K^{(1)}(k_a) K^{(1)}(k_b) - K^{(1)}(k_c) L^{(2)}(k_a, k_b) \right| \frac{K^{(2)}(k_c)}{K^{(2)}(k_c)} \Bigg|^2$$

を考えることが出来るであろう。今 $L^{(2)}(k, l)$ として次の形

$$(13) \quad L^{(2)}(k_1, k_2) = \frac{-(k_1 + k_2)}{2} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + (k_1 + k_2)^2} \sum_{\substack{a, b, c \text{ cyclic } 1, 2, 3 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0}} \frac{k_a^2 K^{(1)}(k_b) K^{(1)}(k_c)}{\max\{|K^{(1)}(k_a)|, \beta\} \text{sign } K^{(1)}(k_a)}$$

をとる。これは条件 (5) を充す。また $|\alpha| > \beta$ にとれば条件 (11) を充す。更に $\beta = 0$ にとると、(13) は関数形 (10) を持つ $L^{(2)}(k, l)$ のなかで量 (12) を極小にする。 $\beta = \infty$ にとれば、時間的に変化する *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開に戻る。大きな k に対して

$K''(k)$ は、いくつでも小さくなる。従ってその関数形によつては、 β が0ではな、 β を導入しておかねば、(13)の本来なる性質の特異性が出る場合もあるであらう。

§ 3 数値積分の結果

以下微積分方程式(8)(9)を mesh に基り、連立階差方程式として数値積分をおこなう。mesh は $|k| \leq 6$ の範囲中 $\Delta k = 0.2$ にとる。時刻の中は $\Delta t = 0.01$ にとる。 ν は $1/100$ にとる。

最初 初期値として

$$(14) \quad K''(k) = \frac{1}{(4\pi)^{1/4}} \frac{0.2}{\sqrt{0.04 + k^2}}, \quad K^{(2)}(k, l) = 0$$

をとり、 $L^{(2)}(k, l)$ を(13)にとる。そこで β として $0, 0.05, \infty$ の3つの場合に計算を行った。この初期値に対しては代表的な速度 U_0 ($t=0$ の速度の2乗平均) は大体 0.4 、代表的な波数は大体 $K_0 \sim 0.2$ と考えられるから、乱流のレイノルズ数は大体 $U_0/\nu K_0 \sim 10^2$ と考えられる。エネルギースペクトル $E(k)$ は $K^{(1)}(k), K^{(2)}(k, l)$ を用いて

$$E(k) = (K^{(1)}(k))^2 + 2 \int (K^{(2)}(k-k', k'))^2 dk'$$

と表はせる。 $t=0$ の領域 $|k| \leq 6$ の中に含まれてゐるエネルギーは大体全体の 97.8% である。

計算結果として、上述の3つの β の値に対してのエネルギー

スペクトルの時間的变化を $E(k)$ と共に夫々図 1, 2, 3 に示した。また $K^{(1)}(k)$, $K^{(2)}(k, k)$, $K^{(2)}(k, 0)$ の時間的变化を $\beta=0$ と $\beta=\infty$ の場合に対して図 4, 5 に示した。3つの β の値に対して $E(k)$, $E(k)/E(k)$, $\int_0^k E(k)dk / \int_0^{\infty} E(k)dk$ の値を表 1 に書いた。 $\beta=\infty$ の場合は時間的に変化する *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開によるものであり、図 3 と図 4, 5 の $\beta=\infty$ に対する曲線は Muskhelishvili の得た図 3, 4, 5 と同じである。

次に初期値として

$$(15) \quad K^{(1)}(k) = \frac{1}{(4\pi)^{1/4}} \frac{0.2}{\sqrt{0.04 + k^{3/2}}}, \quad K^{(2)}(k, 2) = 0$$

$$(16) \quad K^{(1)}(k) = \frac{1}{(4\pi)^{1/4}} \frac{0.2}{\sqrt{0.04 + k^{5/2}}}, \quad K^{(2)}(k, l) = 0$$

をとり、 $L^{(2)}(k, l)$ を (13) にとり $\beta=0$ として計算を行った。これらの場合も代表的な速度、波数は初期値 (14) のときと大体同じ程度の大まかと考えられる。従って乱流のレイノルズ数は大体 10^2 である。エネルギー・スペクトルの時間的变化を (15) (16) に対して夫々図 6, 7 に示した。(16) の場合は $E(k)$ の傾斜の変化が非常に小さいため、一部の波数領域に限ってこれを示した。この領域ではエネルギーが小さまっているが、これは低い波数領域からエネルギーが解って来ていることによるものである。

以上の諸結果から我々は次の結論を得る。(1) $L^{(1)}(k, l)$ を適当にとることによって、収斂性を非常によくすることが出来る。即ち(13)のように $L^{(1)}(k, l)$ をとることにより、補正項 $K^{(2)}(k, l)$ を主項 $K^{(1)}(k, l)$ に較べて小さくすることが出来る。例へば $|k| \leq 6$ の領域のエネルギーの97.7%を含む領域で、 $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ の極小は $\beta=0$, $\beta=0.05$ に対して夫々0.869, 0.957に保たれるが $\beta=\infty$ に対しては約0.108である。図1, 2または表1から判るように, $\beta=0.05$ に対しては $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ が k の小さい領域では $\beta=0$ のときと較べて大きく保たれるが, k の大きい領域では逆に小さくなる。

$\beta=0$ に対しては $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ が殆どすべての波数領域で大きく保たれる。例へば, $|k| \leq 6$ の領域の99.9%のエネルギーを含む領域で $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ の極小はなお0.819である。従つて大きな波数領域が本質的な役割を果たすような現象に対しては, $\beta=0$ を用いることが望ましく, 小さな波数領域がそれほど本質的な役割を果たさないような現象に対しては, $\beta=0.05$ 等を用いるとよいであろう。(2) 近似的に安定なエネルギースペリトルとして $E(k) \sim k^{-\alpha}$ ($\alpha \sim 2$) がありとうであることが示された。即ち図1, 2から k^{-2} のエネルギースペリトルの形は非常に安定であり, 図5, 6から初期スペリトルの形が $k^{-\frac{1}{2}}, k^{-\frac{1}{2}}$ の場合は共に k^{-2} の形に近づく傾向を示す。例へば初期に $k^{-\frac{1}{2}}$ のとき $t=0.5$ で大体 $k^{-1.66}$ のとき $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ の極小は大体0.989) $t=1$ で大体 $k^{-1.72}$ (この

とも $(K''(k))^2/E(k)$ の値は大体 0.883) である。

*)

Navier-Stokes 系のような複雑な系に適用するためには、簡単のために $K^{(2)}K^{(2)}$ 項を無視することが望ましい。従ってこの事情を Burgers 系で調べておくことは意味がある。方程式 (8) と (9) の右辺で $K^{(2)}K^{(2)}$ の項をおとした方程式とを、 $\beta=0$ にとり初期値 (14) に対して数値積分し、これを (8) と (9) を積分した結果と比較した。 $E(k), K''(k)$ については図 7 に表はれている。^{差は} 僅かであった。 $K^{(2)}(k, k)$ については図 8 に示した。その差は僅かである。

Δk を 0.15, 0.25 としても、 Δt を 0.005 としてもエネルギースペクトルにはあまり変化が認められなかった。

最後に研究会で全エネルギーの減衰の時間的依存度について質問があったが、この場合 $t=1.0$ で $1/100$ 程度にすぎず、はっきりした依存度は判らなかった。

参考文献

- (1) M. Doi and T. Imamura; Progr. Theoret. Phys. 41 (1969) 358
- (2) S. Tanaka and T. Imamura;
- (3) J. M. Burgers; Verhandl. Kon. Ned. Akad. Wetenschap. Afdel. Natuurk. Sect. I 17 (1939) 2
- (4) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meesham; Phys. Fluids 6 (1963) 1519
- (5) W. C. Meesham and A. Siegel; Phys. Fluids 7 (1964) 1178
- (6) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meesham; J. Math. Phys. 6 (1965) 707

(7) W.C. Meehan and M.Y. Su; *Phys. Fluids* 12 (1969) 1582

(8) T. Inamura, W.C. Meehan and A. Siegel; *J. Math. Phys.* 6 (1965) 695

*) Navier-Stokes 系にこの方法を適用して, Kolmogoroff や Heisenberg のエネルギースペクトル等について調べることを, 関学の 田辺憲一君 と共にやっている。

表 1

k	ENERGY			$(K^{(1)2}/E) \times 100$ $\beta=\infty \quad \beta=0.05 \quad \beta=0$	$(\sum_{k=0}^{\infty} E(k) / \sum_{k=0}^{\infty} E(k)) \times 100$ $\beta=\infty \quad \beta=0.05 \quad \beta=0$
	$\beta=\infty$	$\beta=0.05$	$\beta=0$		
0.6	2.76×10^{-2}	2.72×10^{-2}	2.72×10^{-2}	88.3 94.9 88.5	88.8 88.8 89.2
1.2	7.58×10^{-3}	7.19×10^{-3}	7.16×10^{-3}	53.4 95.5 87.5	94.9 94.7 95.0
1.8	3.43×10^{-3}	3.16×10^{-3}	3.13×10^{-3}	19.1 96.8 87.1	97.2 96.9 97.2
2.4	1.84×10^{-3}	1.72×10^{-3}	1.70×10^{-3}	1.1 91.6 86.7	98.4 98.0 98.3
3.0	1.05×10^{-3}	1.08×10^{-3}	1.03×10^{-3}	5.7 57.3 86.3	99.1 98.7 99.0
4.0	4.26×10^{-4}	6.33×10^{-4}	5.15×10^{-4}	57.4 0.0 85.5	99.7 99.4 99.6
5.0	1.98×10^{-4}	3.79×10^{-4}	2.56×10^{-4}	99.9 33.9 81.9	99.9 99.8 99.9
6.0	1.05×10^{-4}	1.71×10^{-4}	4.55×10^{-5}	65.5 66.9 68.1	100.0 100.0 100.0

图 1 初值 (14), $\beta = 0$

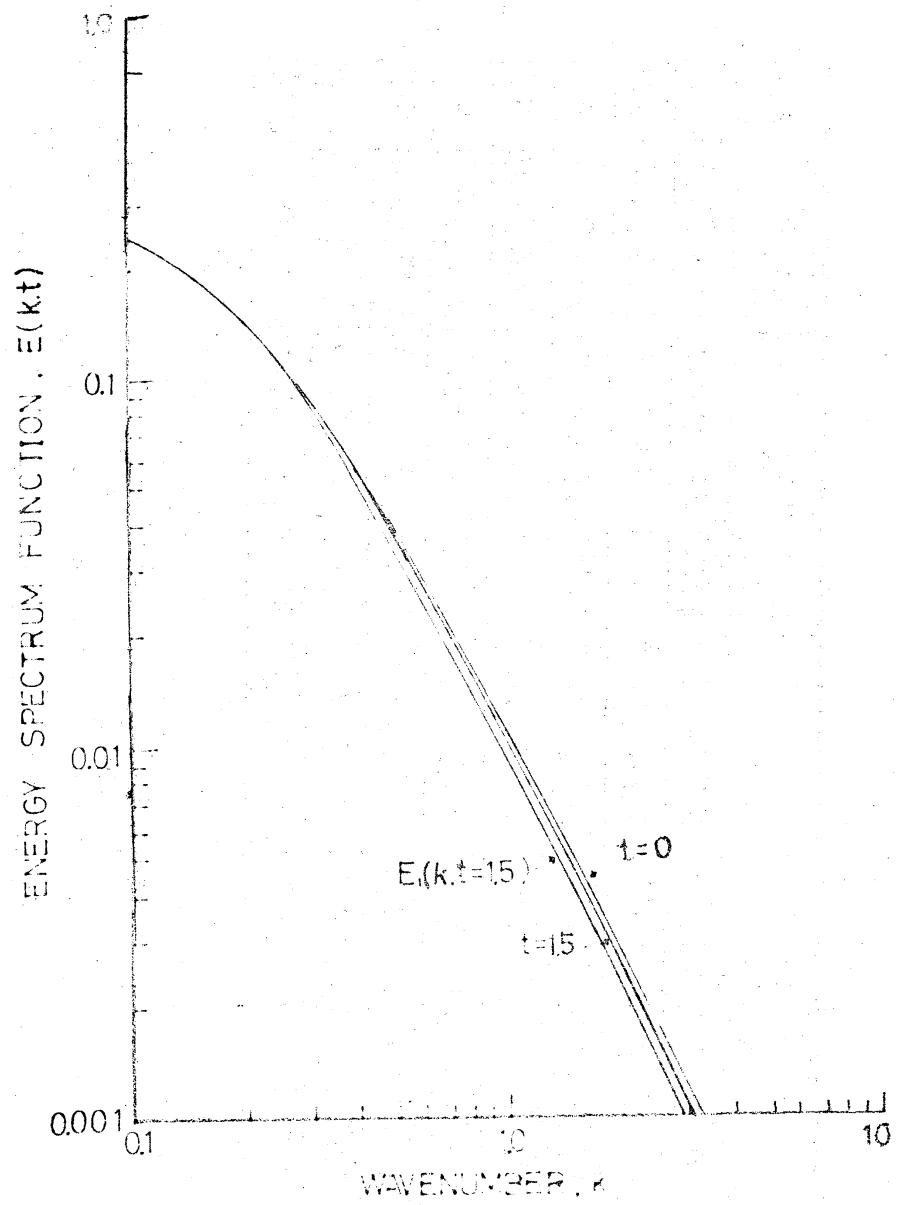


图 2 初期值 (14), $\beta = 0.05$

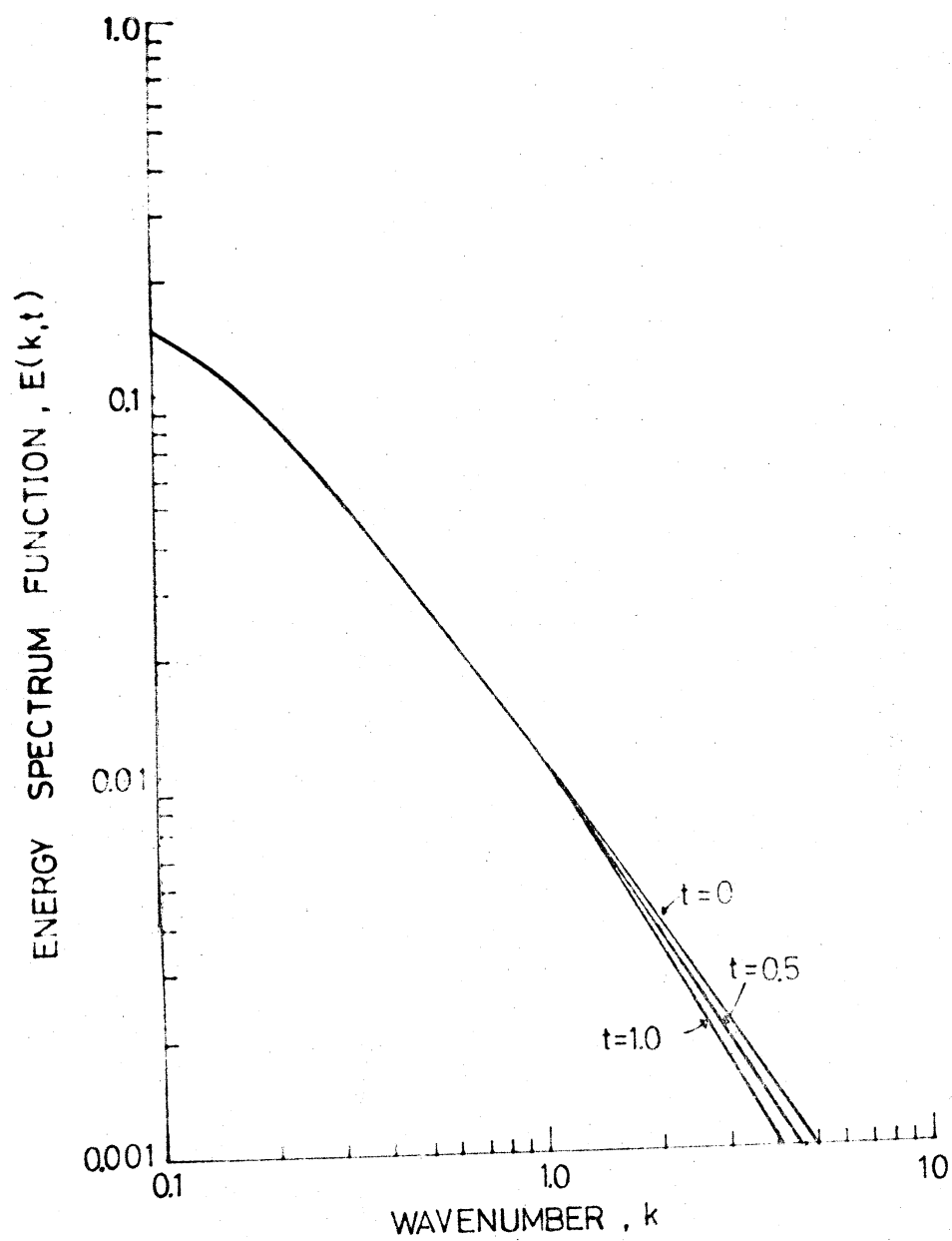


圖 3 計算值 (14), $\beta = \infty$

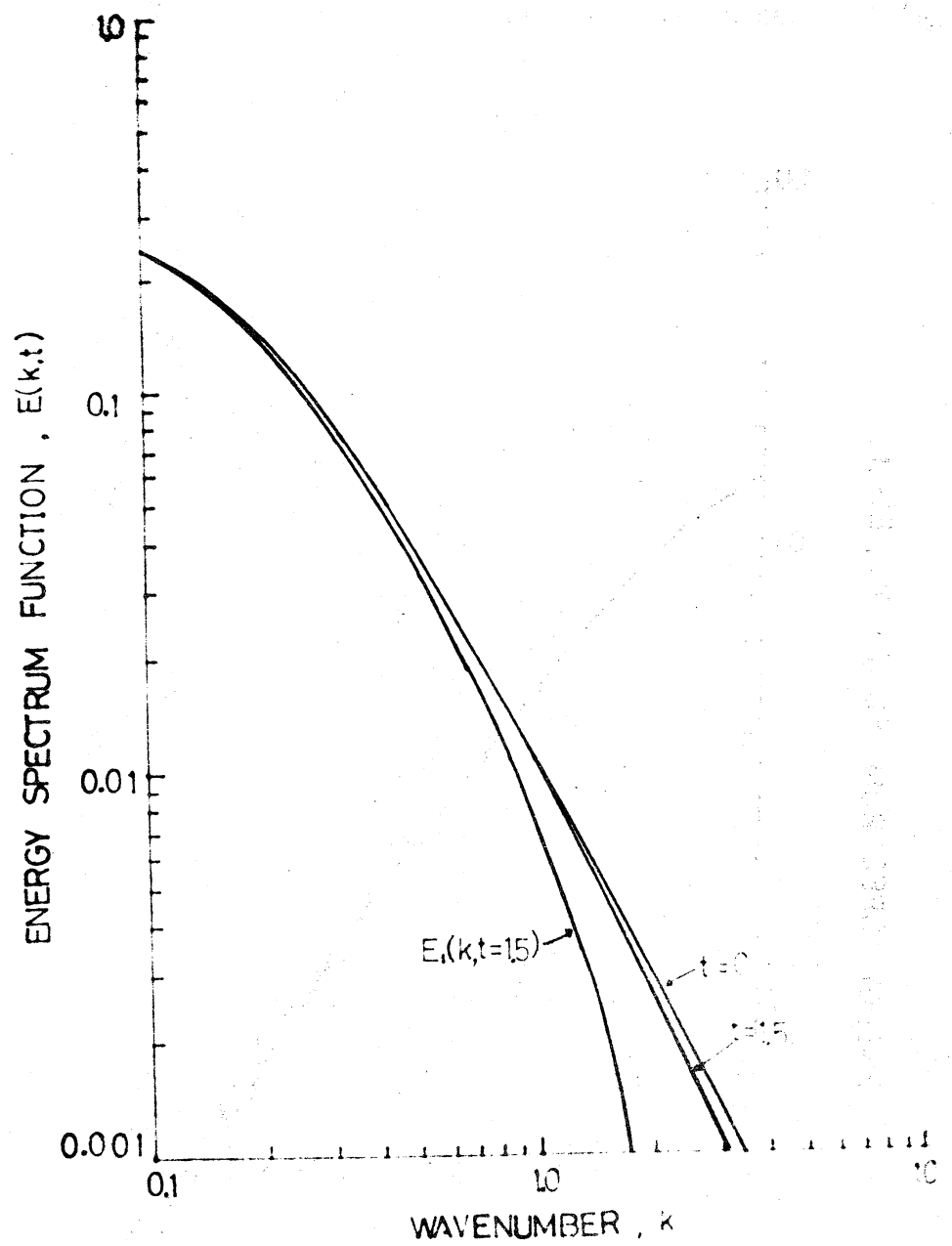


图 4 初期值 (14), $\beta=0$, $\beta=\infty$

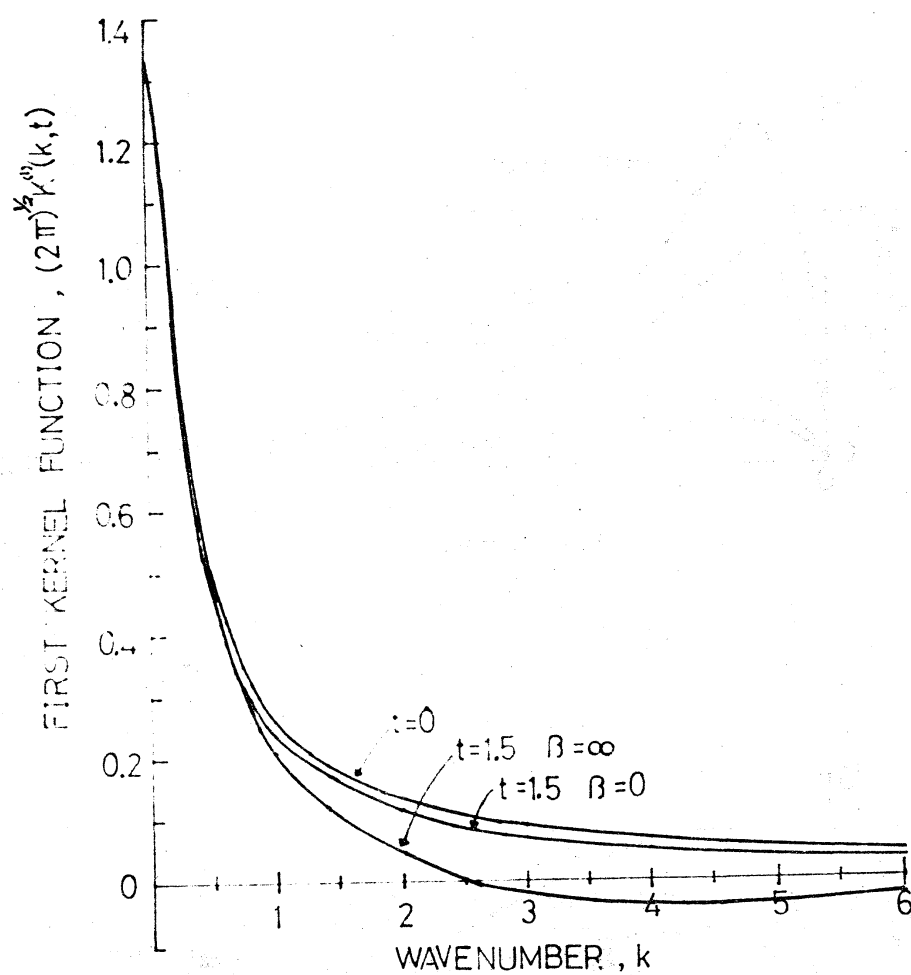


圖 5 初期值 (14), $\beta=0, \beta=\infty$

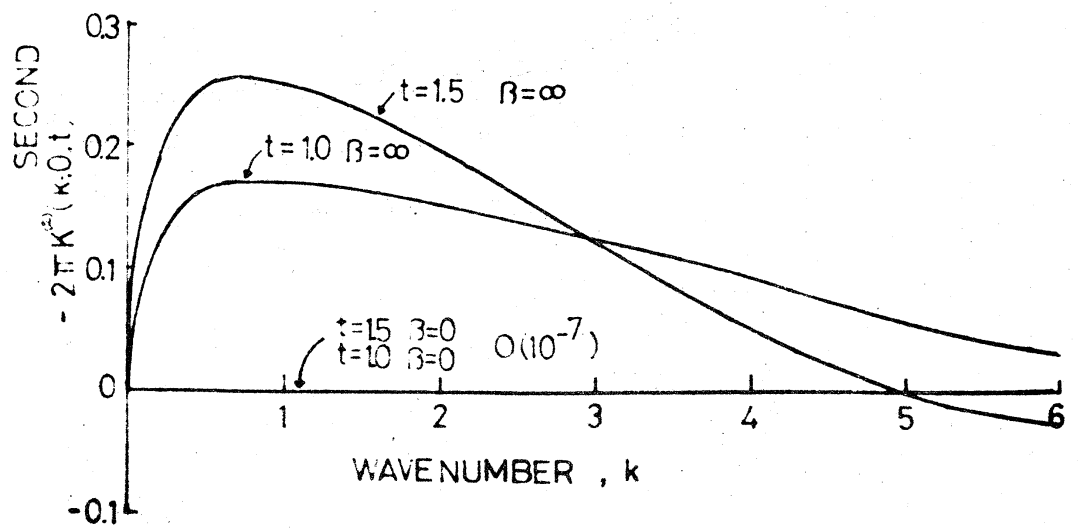
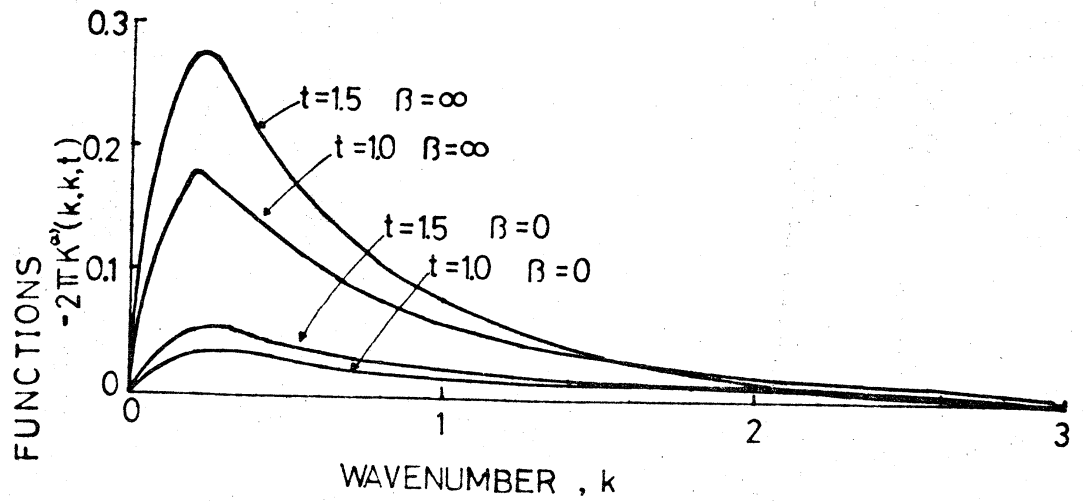


图 6 初期值 (15), $\beta = 0$

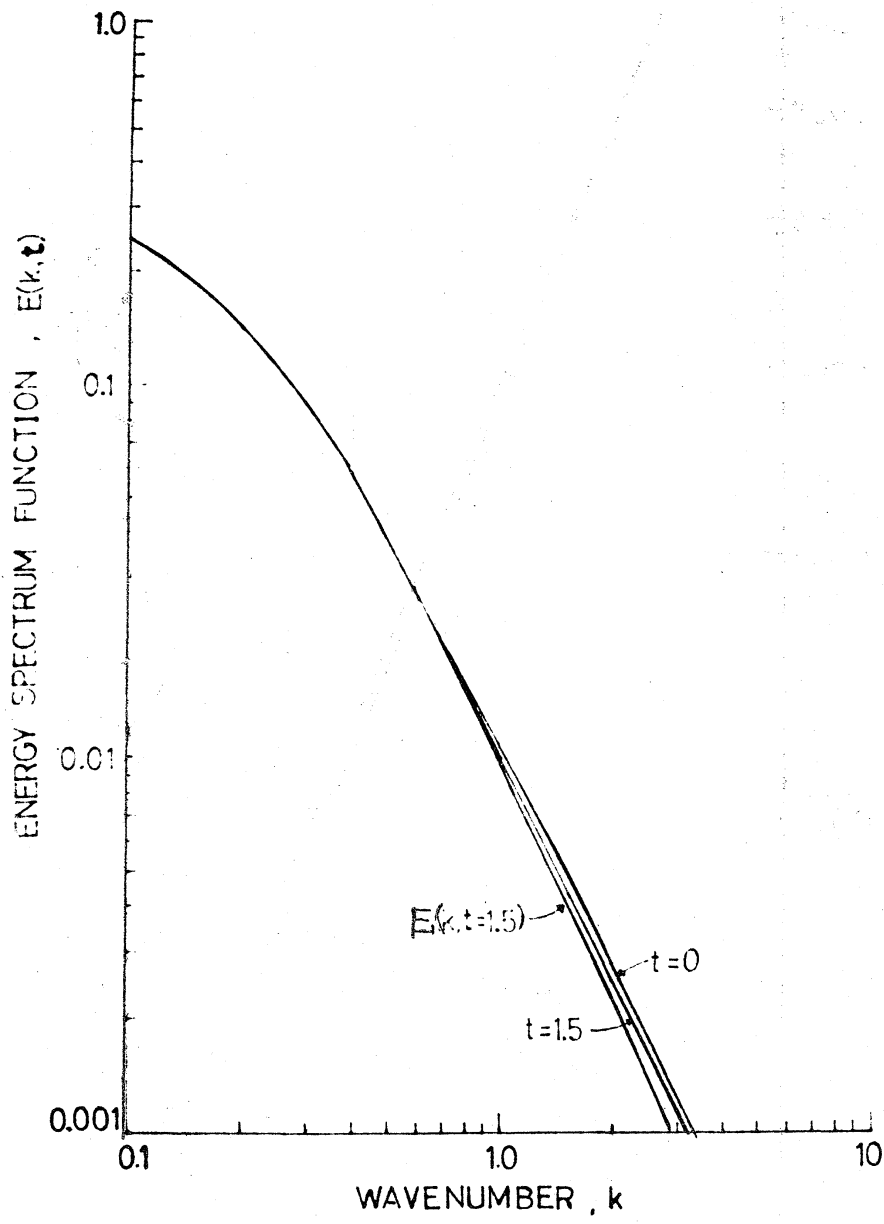


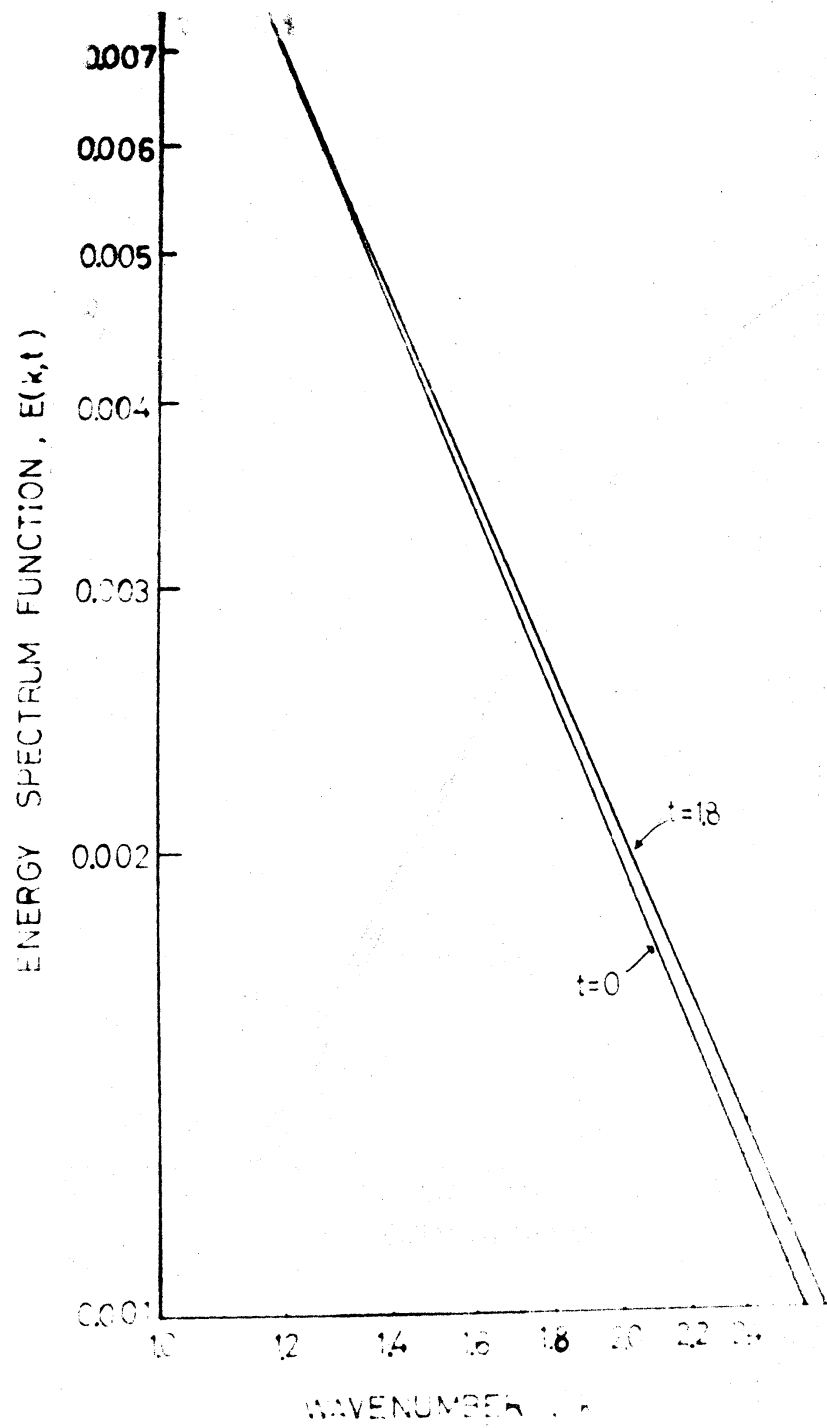
圖 7 初期值 (16), $\beta = 0$ 

图 8 初期值 (14), $\beta = 0$

