

線織面で構成されるラチスシェルの形状最適化

SHAPE OPTIMIZATION OF LATTICED SHELLS CONSISTING OF RULED SURFACE

藤田 慎之輔^{*1}, 大崎 純^{*2}, 關 和也^{*3}

Shinnosuke FUJITA, Makoto OHSAKI and Kazuya SEKI

A shape optimization method is presented for latticed shells using ruled surface. Boundary shape is defined using two Bézier curves, and the points with the same parameter value are connected by a line to model a ruled surface. The locations of control points of the Bézier curves are considered as design variables of the optimization problem. This way, the number of variables for optimization can be drastically reduced without sacrificing smoothness and complexity of the surface. The total strain energy is minimized under constraint on material volume, and additional constraint is given for the total floor area of the shell to avoid an erroneous solution and divergence in the analysis and optimization processes. In this optimization problem, not only vertical loads but also horizontal loads are considered. While the optimal shape is expected to have a large stiffness, it does not necessarily have enough capacity for the stress limit. Therefore, we solve another optimization problem considering strain energy and stress constraint. The effectiveness of the proposed approach is confirmed through various examples, and the characteristics of the optimal shapes are discussed.

Keywords: shape optimization, Bézier curve, nonlinear programming, ruled surface

形状最適化, ベジエ曲線, 非線形計画法, 線織面

1 序

解析技術の進歩により, 最適化手法が建築分野にも取り入れられ, 近年では, 力学的性能を考慮した形状最適化により, シェルの曲面形状を決定する研究が多く行われている (例えば, 1-3)。しかし, 優れた建築の実現のためには意匠性, 経済性, 施工性などの非力学的性能も考慮することが不可欠である。施工性を考慮に入れた研究としては, ラチスシェルの部材の種類を少なくすることを目的とした小河らの研究⁴⁾, 可展面となる制約条件を導入した藤田・大崎の研究⁵⁾, データベースを用いて部材長を数種類に限定する手法を導入した Bassoらの研究⁶⁾, 部材長の一樣化を目的とした藤田・大崎の研究⁷⁾, 部材接合角の一樣化を目的とした西森らの研究⁸⁾などが挙げられる。

空間内で直線を曲線に沿って回転移動したときの軌跡として定義される曲面を線織面という⁹⁾。屋根構造の施工の際, 複雑な曲面の表現は困難を要するが, 母線が直線で形成される線織面は, 連続体シェルにおいては型枠作成が容易となり, ラチスシェルにおいては1方向の部材がすべて曲げ加工を必要としない直線材となるため, 施工性に優れた曲面と言える。また, 線織面はガウス曲率を曲面の至るところで0とする必要のある可展面よりも幾何学的な制約が小さく, 形状表現の自由度が高い。特に, 代表的な線織面である HP 曲面

は, これまで多くの構造物に取り入れられている¹⁰⁾。

本研究では線織面で曲面形状を定義し, 直線となる母線方向に部材を有するラチスシェルの対象に最適化を行うことで, 施工性を考慮する。シェルの構造最適化の手法としては, ひずみエネルギーや外力仕事を最小化する方法^{11,12)}, 座屈荷重を最大化する方法^{4,13)}, 応力分布を均一化する方法^{14,15)}などがあり, いずれの手法を採用するかは, 注目する力学的性能によって異なる。本論文では, 力学的な評価指標としては, 剛性を評価する際に良く用いられる指標であるひずみエネルギーを採用する。線織面で定義されるラチスシェルの対象に, 長期荷重を想定した鉛直荷重を作用させ, ひずみエネルギー最小化を目的とした最適化を行うと, 鉛直変位を大幅に低減し, 施工性に優れた, 剛性の高い形状が得られる。一方で, 得られた最適形状は水平力に対しては必ずしも高い剛性を有さない。そこで, 本論文では, 鉛直荷重に加え, 地震力を想定した荷重も考慮した最適化を行うことで, 水平荷重に対しても剛性が高く, かつ施工性にも優れたラチスシェルの形態を創出する。また, 得られた解に対して, 個材座屈を考慮した式である鋼構造設計規準の応力制約を考慮した最適化を行うことで, 剛性のみならず応力に対しても一定のクライテリアを満足するラチスシェルの形態を創出することを試みる。

^{*1} 東京工業大学科学技術創成研究院未来産業技術研究所
助教・博士(工学)

^{*2} 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士(工学)

^{*3} ㈱梓設計 修士(工学)(元広島大学 大学院生)

Assist. Prof., Laboratory for Future Interdisciplinary Research of Science and Technology, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.
Azusa Sekkei, M.Eng. (Former Grad. Stud., Hiroshima Univ.)

2 線織面の形状表現

2.1 線織面の定義

線織面は次のように表される¹⁶⁾。

$$S(u, v) = f(u) + v g(u) \quad (1)$$

ここで、 $f(u)$ は基底曲線、 $g(u)$ は母線の方を定めるベクトルである。また、 u, v はスカラーパラメータである。 $g(u) = h(u) - f(u)$ として式 (1) を変形すると、次式となる。

$$S(u, v) = (1 - v)f(u) + v h(u) \quad (2)$$

$h(u)$ は基底曲線と等しいパラメータを持つ曲線であり、 $f(u)$ と $h(u)$ の同一のパラメータの点を結んだ直線が母線 $vg(u)$ である。2つの曲線 $f(u), h(u)$ により曲面形状が表現可能なため、曲面を最適化の際の変数の数を大幅に低減でき、最適解への収束性を向上できる。

2.2 ベジエ曲線を用いた線織面

本研究では、線織面の定義式における曲線 $f(u)$ と $h(u)$ をベジエ曲線で定義し、それらを連結する直線 $vg(u)$ で定められる線織面を表現する。

k 次のベジエ曲線 $P_k(u)$ を次式で定義する。

$$P_k(u) = \sum_{i=0}^k q_i B_{k,i}(u) \quad (3a)$$

$$q_i = [q_{xi} \quad q_{yi} \quad q_{zi}]^T \quad (3b)$$

ここで、 q_i は制御点座標ベクトルである。 $B_{k,i}(u)$ は k 次のバーンスタイン基底関数であり、次式で定義される。

$$B_{k,i}(u) = \frac{k!}{i!(k-i)!} u^i (1-u)^{k-i} \quad (0 \leq u \leq 1 \quad i = 0, \dots, k) \quad (4)$$

式 (3) で定義したベジエ曲線を曲線 $f(u)$ と $h(u)$ に代入すると、線織面の定義式 $S(u, v)$ は次式で表される。

$$S(u, v) = (1 - v) \sum_{i=0}^I q_i B_{I,i}(u) + v \sum_{i=0}^J q_{I+i+1} B_{J,i}(u) \quad (0 \leq u, v \leq 1) \quad (5)$$

I, J はそれぞれ $f(u)$ と $h(u)$ のベジエ曲線の次数であり、これらは必ずしも同一である必要はない。このように、曲線 $f(u)$ と $h(u)$ にベジエ曲線を選ぶことで、ごく少数の制御点で様々な曲面形状を効果的に記述できる。本手法による線織面の概念図を図1に示す。図の例では、 $I = J = 5$ であり、可視化のために $u = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ のパラメータに対応した母線を記述してある。

2.3 ベジエ曲線の制御点とラチスシェルの節点との関係

式 (5) の曲面を、 u, v 方向にそれぞれ I' 個、 J' 個に分割し、全体として $n = (I' + 1) \times (J' + 1)$ 個の節点を配置する。

節点の x 座標を並べたベクトルを次のように定める。

$$\mathbf{r}_x = [x_{0,0} \quad \dots \quad x_{0,I'} \quad \dots \quad x_{I',0} \quad \dots \quad x_{I',J'}]^T \quad (6)$$

y, z 座標をそれぞれ並べたベクトル $\mathbf{r}_y, \mathbf{r}_z$ も同様である。パラメータ k, l に対応する節点座標ベクトルを次式で定義する。

$$\mathbf{r}_{k,l} = [x_{k,l} \quad y_{k,l} \quad z_{k,l}]^T \quad (7)$$

このとき、3次元空間内の節点と制御点の座標の関係式は次のように書ける。

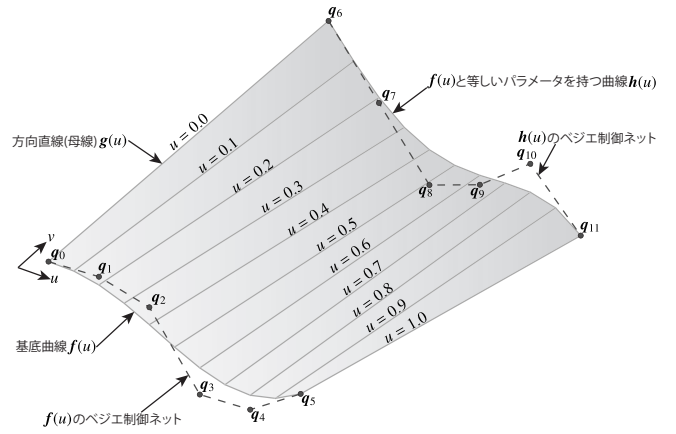


図1 ベジエ曲線で定義された線織面の概念図

$$\mathbf{r}_{k,l} = (1 - v_l) \sum_{i=0}^I q_i B_{I,i}(u_k) + v_l \sum_{i=0}^J q_{I+i+1} B_{J,i}(u_k) \quad (k = 0, \dots, I', \quad (8)$$

$$(l = 0, \dots, J')$$

3 剛性に対する最適化問題

m 個の部材からなる N 自由度のラチスシェルを考える。シェル形状を決定づける設計変数ベクトルを $\mathbf{x}$ とする。部材は節点で剛接合あるいはピン接合されるものとし、静的荷重に対する応答を、梁要素を用いて解析する。梁要素は2節点梁要素(1次要素)とする。 N 個の成分をもつ変位ベクトルを $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ 、 $N \times N$ の剛性行列を $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ とする。

剛性の向上を目的とした古典的な構造最適化問題では、ひずみエネルギー、あるいはコンプライアンスを最小化する。本研究でも既往の研究と同様に、剛性の評価指標としてひずみエネルギーを採用した次のような最適化問題を考える。

$$\text{minimize} \quad f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{d}(\mathbf{x}) \quad (9a)$$

$$\text{subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - \bar{V} \leq 0 \quad (9b)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \bar{A} - A(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (9c)$$

ここで、制約 (9b) は材料の体積制約であり、 $V(\mathbf{x})$ はラチスシェルの部材の総体積、 $\bar{V}$ は $V(\mathbf{x})$ の上限値である。体積に上限を設けることで、経済性を考慮できる。

また、制約 (9c) は水平投影面積に関する制約であり、 $A(\mathbf{x})$ はラチスシェルの水平投影面積、 $\bar{A}$ は $A(\mathbf{x})$ の下限値でスカラーである。節点の鉛直方向座標を定める変数のみを設計変数 $\mathbf{x}$ とする場合には、平面形状は変化しないので、制約 (9c) は不要である。しかし、水平方向にも形状修正を行う場合には、平面が消失した非現実的な形状が得られる場合があるため、制約 (9c) により内部空間を確保する必要がある。

弾性解析における全体剛性方程式の求解には Python 言語のライブラリである SciPy¹⁷⁾ を利用する。最適化計算には pyOpt¹⁸⁾ を用い、逐次2次計画法¹⁹⁾ により解く。以下に形状最適化のアルゴリズムの流れを示す。

Step 1 所与の設計条件に応じて、境界条件、材料定数を定める。設計変数の初期値 $\mathbf{x}^0$ を選び、 $k=0$ とおく。

Step 2 曲面形状をベジエ曲線を用いた線織面により生成し、弾性解

析を行い、目的関数および制約条件関数の値を計算する。

Step 3 感度解析を行い、2次計画問題を解き、探索方向を求める。

Step 4 現在の点 $\mathbf{x}^k$ において最適性条件を満たせば終了。そうでなければラインサーチをおこない、設計変数の値を更新する。

Step 5 $k \leftarrow k+1$ とし、Step 2へ戻る。

4 鋼構造設計規準の応力制約を考慮した最適化問題

シェルの剛性を最大化した形状は、一般に圧縮抵抗型の構造物となるが、個々の部材に鋼材を使用することが多いラチスシェルは、圧縮力に弱い材料のため、必ずしも応力に対して有利な形状とはならない。実務においては、鋼構造設計規準に従った応力のクライテリアの範囲内で、適切な部材断面を選択することとなる。本研究では、問題(9)を解いて得られた最適形状に対して、部材断面形状を決定付ける変数 $\mathbf{a}$ を設計変数とし、部材検定比に対する制約を付加した次のような最適化問題を考える。

$$\text{minimize } f_2(\mathbf{a}) = V(\mathbf{a}) \quad (10a)$$

$$\text{subject to } f_1(\mathbf{a}) \leq \bar{S} \quad (10b)$$

$$g_3(\mathbf{a}) = F_{ij}(\mathbf{a}) - 0.90 \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (10c)$$

$$(j = 1, 2)$$

問題(10)は、許容応力度設計を満足し、一定の剛性を確保しつつ、体積を最小化する最適化問題である。ここで、 $\bar{S}$ はひずみエネルギーの上限値である。 $F_{i1}(\mathbf{a}), F_{i2}(\mathbf{a})$ は部材 i の両端の検定比であり、余裕の無い設計を避けるため、クライテリアを0.90に設定している。検定比の算定は鋼構造設計規準に従い、長期荷重時における曲げと圧縮/引張の組み合わせ応力に対して検定比 $F_{ij}(\mathbf{a})$ を以下の各式を用いて定める。せん断力は支配的ではないため考慮しない。また、部材断面はすべて鋼管とする。

$$F_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma_{c,ij}}{f_c} + \frac{\sigma_{b,ij}}{f_b} & \dots \text{if } N_{ij} > 0 \\ \frac{\sigma_{t,ij}}{f_t} + \frac{\sigma_{b,ij}}{f_b} & \dots \text{if } N_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (j = 1, 2)$$

$$\sigma_{c,ij}, \sigma_{t,ij} = \frac{|N_{ij}|}{A_{ij}}, \quad \sigma_{b,ij} = \frac{\sqrt{M_{z,ij}^2 + M_{y,ij}^2}}{Z_i} \quad (11b)$$

$$f_t = f_b = F/1.5, \quad f_c = \begin{cases} \frac{1 - 0.4(\lambda/\Lambda)^2}{\nu} & \dots \text{if } \lambda \leq \Lambda \\ \frac{0.277F}{(\lambda/\Lambda)^2} & \dots \text{if } \lambda > \Lambda \end{cases} \quad (11c)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{0.6F}}, \quad \nu = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}(\lambda/\Lambda)^2 \quad (11d)$$

ここで、 A_i, Z_i はそれぞれ部材 i の断面積および断面係数、 $N_{ij}, M_{z,ij}, M_{y,ij}$ は部材 i の j 端における軸力および曲げモーメントである。なお、 N_{ij} は圧縮を正とする。

f_c, f_t, f_b はそれぞれ許容圧縮/引張/曲げ応力度であり、 λ は圧縮材の細長比、 Λ は限界細長比、 E はヤング係数、 F は鋼材の基準強度である。座屈長さは部材長をとる。短期荷重に対しては、 f_c, f_t, f_b は1.5倍する。

5 設計外力

まず、常時荷重として、部材自重に加え、仕上げ重量として 290 N/m^2 の面荷重を鉛直下向きに作用させる。これを荷重ケース L と定義する。



図2 梁要素の断面力

節点数を n とし、常時荷重による等価節点外力の鉛直下向き成分を $w_i (i = 1, \dots, n)$ とする。地震時水平力として、1次設計レベルの検討を想定して、水平震度を $K = 0.30$ とし、 Kw_i の集中荷重を X, Y 方向にそれぞれ作用させる。これらをそれぞれ荷重ケース X 、荷重ケース Y と定義する。各荷重ケースにおける力学量は、両括弧付きの上添え字で区別する。例えば、荷重ケース L におけるひずみエネルギーは $f_1^{(L)}(\mathbf{x})$ のように表現する。

6 線織面ラチスシェルモデル

最適化のための初期形状として、図3に示すように、2つの放物線状のベジエ曲線をそれぞれ式(2)の $f(u), h(u)$ にとった線織面で形状記述される円筒状のラチスシェルを考える。

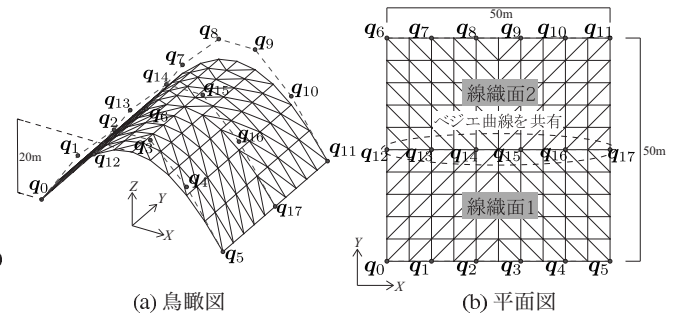


図3 解析モデル

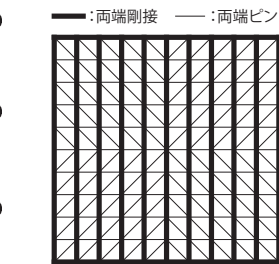


図4 解析モデルの材端条件

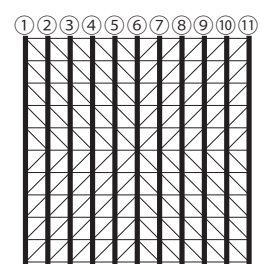


図5 部材のグルーピング

形状表現の自由度を高めるために、曲面を中央で2つの領域に分け、それぞれの領域において、境界の放物線状のベジエ曲線をそれぞれ式(2)の $f(u), h(u)$ にとった線織面で形状記述し、それらを繋ぎ合わせた形状とする。すなわち、2つの線織面は1つのベジエ曲線を共有する。それぞれのベジエ曲線の次数は5であり、制御点数は合計で18である。形状は1辺50mの正方形平面を有し、ライズは20mである。変位の境界条件は4隅を固定支持とする。

材端条件については、図4に示すように、外周を除く母線間の繋ぎ材と斜材についてはピン接合とする。これにより、母線方向の部材

表1 初期形状の弾性解析結果

荷重 ケース	A [m ²]	f_1 [kNm]	V [m ³]	$d_x^{\max}$ [mm]	$d_y^{\max}$ [mm]	$d_z^{\max}$ [mm]	$N_c^{\max}$ [kN]	$N_t^{\max}$ [kN]	$M^{\max}$ [kNm]	$Q^{\max}$ [kN]	荷重 ケース	$F_{ij}^{\max}$
L	2500	192.8	16.70	1574	10.76	1187	1225	583.7	347.8	39.74	L	5.01
X		547.3		2247	4.799	1840	515.4	515.4	740.4	90.39	$L+X$	8.47
Y		1.964		49.35	13.84	49.98	131.2	131.2	38.71	8.422	$L+Y$	3.43

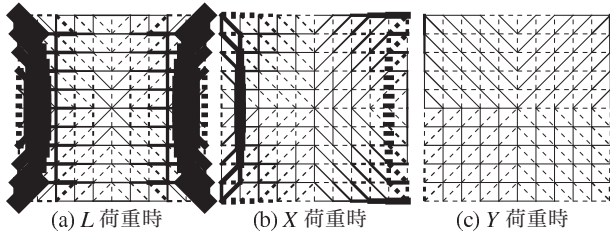


図6 初期形状の軸力分布図

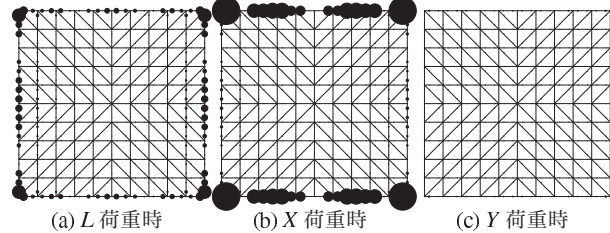


図7 初期形状の曲げモーメント分布図

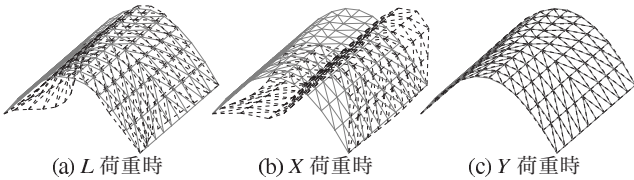


図8 初期形状の変位分布図

は、断面形状が同じ場合には通し材として搬入することができ、現場溶接を削減できる。

式(8)における節点位置を定めるパラメータ値 u_i, v_i はそれぞれ区間 $[0,1]$ を等分割とし、 $u_i, v_i = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ とする。各制御点座標の x, y, z 成分を並べたベクトルをそれぞれ q_x, q_y, q_z と表す。節点数は121、自由度数は702、部材数は320である。初期形状における断面は全部材とも外径267.4mm、厚さ9mmの円形鋼管とし、ヤング係数210GPa、ポアソン比0.30、単位体積重量77kN/m³、 F 値235N/mm²とする。

L, X, Y の各荷重ケースに対して弾性解析を行った結果を表1に示す。 A はシェルの水平投影面積、 f_1 は問題(9)における目的関数であるひずみエネルギー、 V は総体積、 $d_x^{\max}, d_y^{\max}, d_z^{\max}$ はそれぞれ各荷重ケースにおける x, y, z 各方向の節点変位の絶対値の最大値、 $N_t^{\max}, N_c^{\max}, Q^{\max}, M^{\max}$ はそれぞれ各荷重ケースにおける引張軸力、圧縮軸力、せん断力、曲げモーメントの絶対値の最大値を表す。なお、 $Q^{\max}$ は部材座標 y, z 軸方向それぞれで計算される値の2乗と平方根、 $M^{\max}$ は y, z 軸回りそれぞれで計算される値の2乗と平方根である。部材の検定に際し、弾性解析で得られた応力から、 L の他に、 $L+X, L-X, L+Y, L-Y$ の組み合わせ応力を計算し、 L を長期荷重、 $L+X, L-X, L+Y, L-Y$ を短期荷重として各部材の検定比を算出している。 $F_{ij}^{\max}$ は各荷重ケースにおける全部材の検定比の最大値であり、 L は荷重ケース L の検定比の最大値、 $L+X$ は荷重ケース $L+X, L-X$ それぞれの検定比の最大値のうち大なる値、 $L+Y$ は荷重ケース $L+Y, L-Y$ それぞれの検定比の最大値のうち大なる値を

示している。図6~8には、軸力、曲げモーメント、変位の分布図をそれぞれ示す。軸力図は圧縮力を実線、引張力を点線で示し、線の太さが絶対値の大きさを表している。曲げモーメントは黒円で示し、その直径で2軸曲げの2乗と平方根の大きさを表している。変位分布図における実線は変形前の形状、点線は変形後の形状を表し、可視化のために変位を5倍にスケーリングしている。本論文では、7,8節でも同じルールで結果を表記するものとする。

本解析モデルは、鉛直荷重に対しては $d_z^{\max}$ が1.2mであるのに加えて、 $d_x^{\max}$ が1.5mを超えており、変位分布図を見ると、アーチの根元の部分が支持点から離れた位置において内側にたわみを生じていることが分かる。総じて鉛直剛性は低く、加えて検定比も5を超えており、曲げモーメントは端部に局所的に発生し、存在応力が弾性範囲に収まっていないことが分かる。水平荷重に対しては、 Y 方向加力時(母線の方向)においては高い剛性を有し、斜材がブレースとして効いて力学的合理性の高い軸抵抗型の力学性状を示している。しかしながら、 X 方向加力時(基底曲線の方向)においては水平剛性が極めて小さく、2mを超える大変形を生じており、著しい曲げモーメントの発生が主因となって検定比の最大値が8を超える結果となっている。

7 剛性に対する最適化結果

式(9)の最適化問題を考える。体積の上限値、シェルの水平投影面積の下限値は初期形状での値とし、それぞれ $\bar{V} = 16.70\text{m}^3$ 、 $\bar{A} = 2500\text{m}^2$ とする。下添え字の0は初期形状での値を表す。

7.1 鉛直荷重に対する最適化結果

7.1.1 制御点 z 座標を設計変数とした場合

次の最適化問題を考える。

$$\text{minimize } f_1^{(L)}(q_z) \quad (12a)$$

$$\text{subject to } g_1(q_z) \leq 0 \quad (12b)$$

$$q_{zi} = q_{0zi} \quad (i = 0, 5, 6, 11) \quad (12c)$$

この最適化問題は、設計変数 x を制御点 z 座標 q_z とした、荷重ケース L に対する式(9)の最適化問題である。ただし、制約(12c)によって4隅の位置は変更しない。また、設計変数には形状の x, y 方向成分を修正する変数を含んでおらず、平面形状は変化しないので、制約(9c)は不要である。

最適形状ならびにその力学性状を表2、図9~12に示す。最適化によって荷重ケース L における弾性変位が減少し、鉛直剛性が大きく向上していることが分かる。鉛直変位 $d_z^{\max}$ をスパン $L(=50\text{m})$ で除した $d_z^{\max}/L$ はおよそ $1/1680$ となっており、鉄骨造の一般的なたわみ制限値 $1/300$ と比べて、十分な剛性を有していると判断できる。また、剛性の上昇に伴い応力も減少しており、特に曲げモーメントが消失し、主として軸力によって抵抗する力学形態に移行した結果、検定比は1.0を下回り、長期荷重に対しては許容応力度設計を満足する結果となった。

しかしながら、最適化の対象としなかった水平方向の荷重に対しては依然として過大な応力が発生しており、特に X 方向加力時には著しい変形を生じる結果となった。

表2 問題(12)の最適形状の弾性解析結果

荷重 ケース	A [m ²]	f_1 [kNm]	V [m ³]	$d_v^{\max}$ [mm]	$d_v^{\max}$ [mm]	$d_v^{\max}$ [mm]	$N^{\max}$ [kN]	$N^{\max}$ [kN]	$M^{\max}$ [kNm]	$O^{\max}$ [kN]	荷重 ケース	$F_{ij}^{\max}$
L	2500	6.871	16.70	18.95	22.53	29.68	282.7	89.72	29.69	11.12	L	0.60
X		535.9		2251	123.5	1674	855.4	855.3	485.1	94.09	L±X	4.38
Y		35.16		117.7	138.8	158.9	503.8	503.8	113.0	24.54	L±Y	1.18

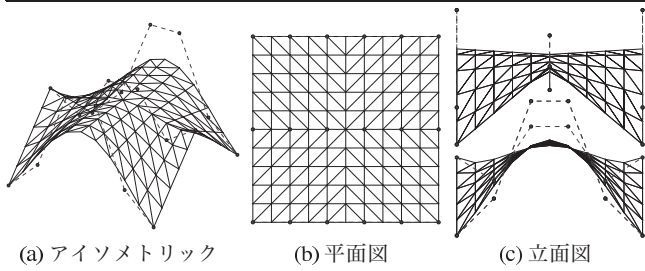


図9 問題(12)の最適形状

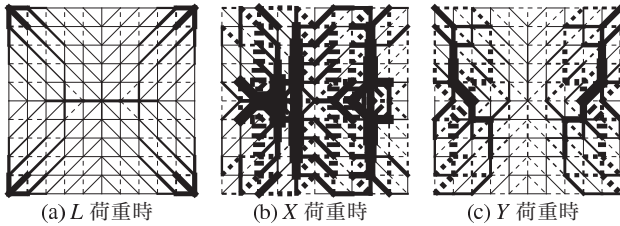


図10 問題(12)の最適形状の軸力分布図

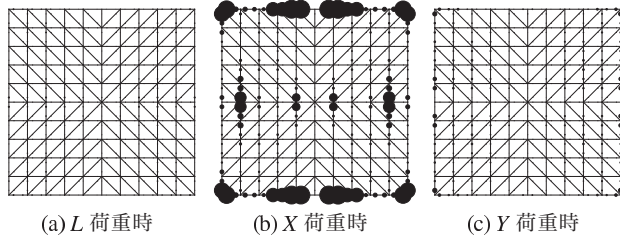


図11 問題(12)の最適形状の曲げモーメント分布図

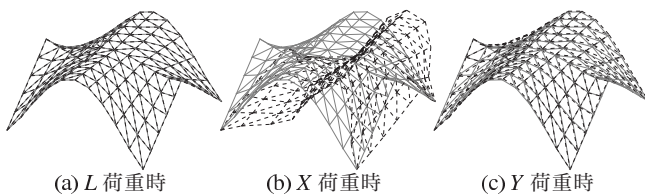


図12 問題(12)の最適形状の変位分布図

表3 問題(13)の最適形状の弾性解析結果

荷重 ケース	A [m ²]	f_1 [kNm]	V [m ³]	$d_v^{\max}$ [mm]	$d_v^{\max}$ [mm]	$d_v^{\max}$ [mm]	$N^{\max}$ [kN]	$N^{\max}$ [kN]	$M^{\max}$ [kNm]	$O^{\max}$ [kN]	荷重 ケース	$F_{ij}^{\max}$
L	2500	6.631	16.70	17.14	18.04	24.11	298.6	107.7	31.34	11.34	L	0.56
X		387.7		1662	141.0	1289	1219	447.1	87.25		L±X	4.07
Y		40.79		128.6	163.9	188.7	503.3	503.3	121.3	25.85	L±Y	1.29

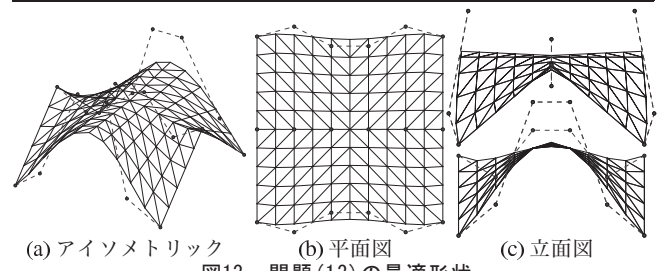


図13 問題(13)の最適形状

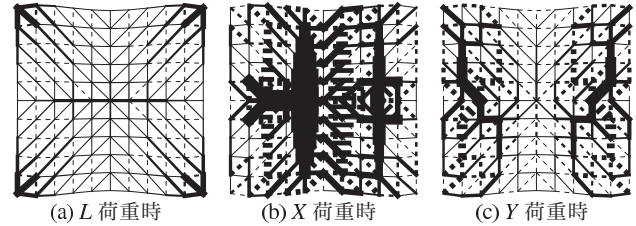


図14 問題(13)の最適形状の軸力分布図

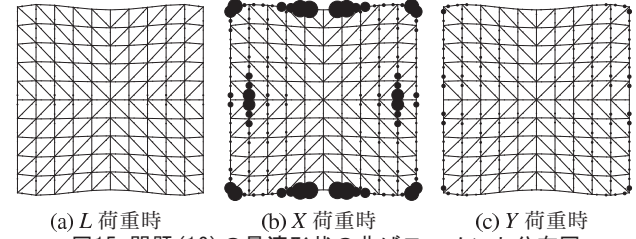


図15 問題(13)の最適形状の曲げモーメント分布図

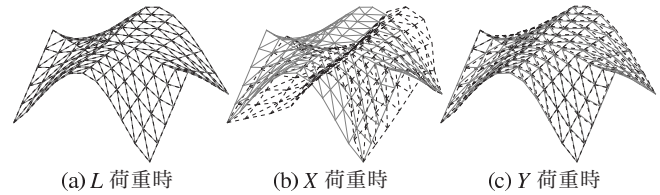


図16 問題(13)の最適形状の変位分布図

7.1.2 制御点 y, z 座標を設計変数とした場合

次の最適化問題を考える。

$$\text{minimize } f_1^{(L)}(q_y, q_z) \quad (13a)$$

$$\text{subject to } g_1(q_y, q_z) \leq 0 \quad (13b)$$

$$g_2(q_y) \leq 0 \quad (13c)$$

$$q_{y,i} = q_{0y,i} \quad (i = 0, 5, 6, 11) \quad (13d)$$

$$q_{z,i} = q_{0z,i} \quad (i = 0, 5, 6, 11) \quad (13e)$$

この最適化問題は、問題(12)における設計変数に、制御点 y 座標 q_y を加えたものである。

最適形状ならびにその力学性状を表3、図13～16にそれぞれ示す。最適化結果から、目的関数の値は、問題(12)の最適解と比べてわずかに改善されているものの、ほとんど同じ値であることがわかる。平面方向への形状の修正はわずかであり、最適形状は問題(12)の最適形状とほぼ同様な形状となった。力学的な性状についても、問題(12)の最適解と同様の傾向を示している。鉛直荷重に対しては、元の平面形状が概ね最適であったことがわかる。

7.2 鉛直荷重+水平荷重に対する最適化

7.2.1 制御点 z 座標を設計変数とした場合

次の最適化問題を考える。

$$\text{minimize } f_1^{(L)}(q_z) + f_1^{(X)}(q_z) + f_1^{(Y)}(q_z) \quad (14a)$$

$$\text{subject to } g_1(q_z) \leq 0 \quad (14b)$$

$$q_{z,i} = q_{0z,i} \quad (i = 0, 5, 6, 11) \quad (14c)$$

この最適化問題は、問題(12)における目的関数に、荷重ケース X, Y , それぞれにおけるひずみエネルギー値を加えたものである。本最適化問題により、鉛直剛性、水平剛性の両方の向上が期待できる。

最適形状ならびにその力学性状を表4、図17～20にそれぞれ示す。最適化によって荷重ケース L, X, Y それぞれにおける弾性変位を大幅に減少させることができた。荷重ケース L におけるひずみエネルギー値は式(12)の最適解よりは大きいものの、荷重ケース X, Y におけるひずみエネルギー値は大幅に小さくなっており、鉛直剛性と水平剛性がバランス良く向上していることが確認できる。最適解は、 $f_1^{(L)}$ のみを目的関数とした場合と比べ、ライズが低く抑えられてい

表4 問題(14)の最適形状の弾性解析結果

荷重 ケース	A [m ²]	f_1 [kNm]	V [m ³]	$d_{10}^{\max}$ [mm]	$d_{11}^{\max}$ [mm]	$d_{12}^{\max}$ [mm]	$N^{\max}$ [kN]	$M^{\max}$ [kNm]	$O^{\max}$ [kN]	荷重 ケース	$F_{ij}^{\max}$
L	2500	28.57	15.89	45.69	37.6	95.14	825.6	423.3	93.18	L	1.24
X		5.134		36.41	56.19	107.5	159.2	185.8	98.84	$L \pm X$	1.30
Y		1.568		11.54	26.43	40.49	180.0	180.0	30.12	$L \pm Y$	1.03

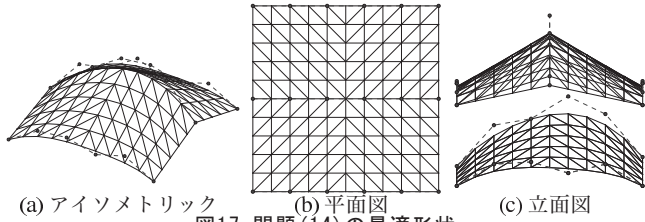


図17 問題(14)の最適形状

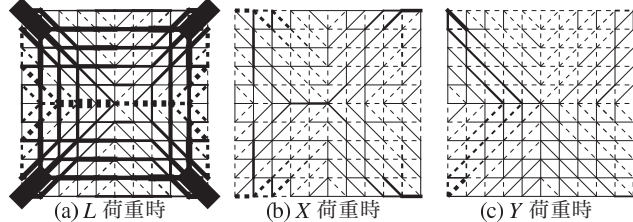


図18 問題(14)最適形状の軸力分布図

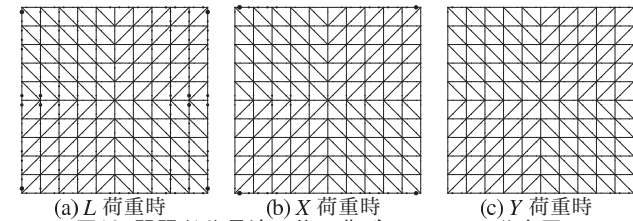


図19 問題(14)最適形状の曲げモーメント分布図

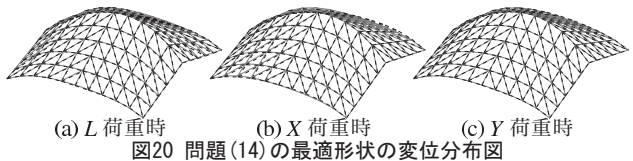


図20 問題(14)の最適形状の変位分布図

る。これは、ライズを抑えることで水平加力時に生じる転倒モーメントを減少させるためと考えられる。その結果総体積は減少し、制約条件(14b)は不活性となった。鉛直荷重時におけるひずみエネルギー値を目的関数とした場合と異なり、形状の対称性が崩れていることが確認できる。これは、荷重ケース L と異なり、荷重ケース X, Y は1方向の線形であり、荷重に方向性を持つためと考えられる。許容応力度設計は満足できていないものの、検定比は問題(12)の最適解と比べ大幅に減少している。応力分布を見ると、特に曲げモーメントの減少が顕著であり、鉛直、水平いずれの外力に対しても軸力抵抗型の力学形態となっている。

7.2.2 制御点 y, z 座標を設計変数とした場合

次の最適化問題を考える。

$$\text{minimize } f_1^{(L)}(q_y, q_z) + f_1^{(X)}(q_y, q_z) + f_1^{(Y)}(q_y, q_z) \quad (15a)$$

$$\text{subject to } g_1(q_y, q_z) \leq 0 \quad (15b)$$

$$g_2(q_y) \leq 0 \quad (15c)$$

$$q_{y,i} = q_{0y,i} \quad (i = 0, 5, 6, 11) \quad (15d)$$

$$q_{z,i} = q_{0z,i} \quad (i = 0, 5, 6, 11) \quad (15e)$$

この最適化問題は、問題(14)における設計変数に、制御点 y 座標を加えたものである。

最適形状ならびにその力学性状を表5、図21~24にそれぞれ示

表5 問題(15)の最適形状の弾性解析結果

荷重 ケース	A [m ²]	f_1 [kNm]	V [m ³]	$d_{10}^{\max}$ [mm]	$d_{11}^{\max}$ [mm]	$d_{12}^{\max}$ [mm]	$N^{\max}$ [kN]	$M^{\max}$ [kNm]	$O^{\max}$ [kN]	荷重 ケース	$F_{ij}^{\max}$
L	2500	15.76	15.72	26.92	13.33	52.05	525.9	252.4	56.08	L	0.96
X		4.010		37.78	14.35	38.47	389.8	390.0	44.22	$L \pm X$	1.06
Y		3.665		46.26	49.36	76.32	146.0	142.2	41.79	$L \pm Y$	0.76

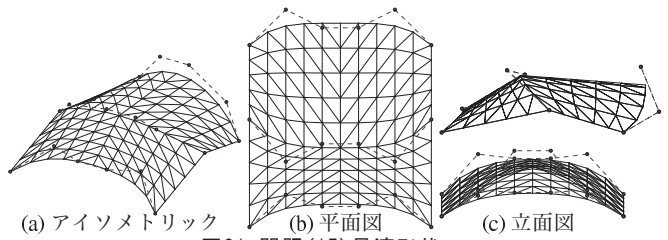


図21 問題(15)最適形状

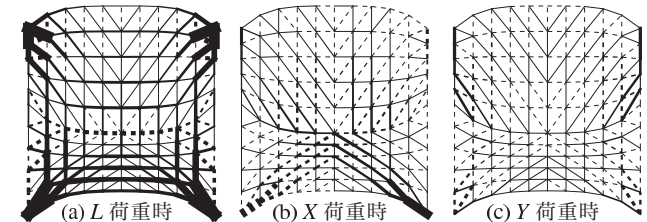


図22 問題(15)最適形状の軸力分布図

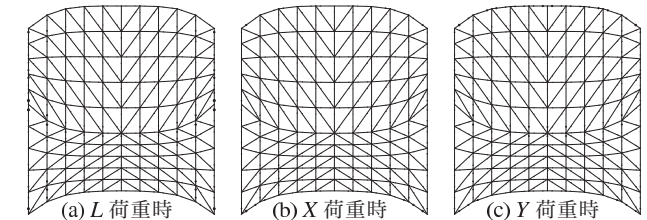


図23 問題(15)最適形状の曲げモーメント分布図

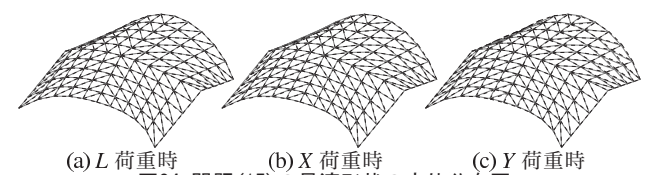


図24 問題(15)の最適形状の変位分布図

す。最適化結果から、 z 方向のみならず、 y 方向にも形状を大きく修正することで目的関数の値を大幅に低減できていることが分かる。これは、鉛直荷重のみに対して最適化をおこなった場合には見られなかった現象である。外力として水平力を考慮した最適化を行う際には、節点の鉛直方向座標のみならず、水平方向座標を修正するパラメータも設計変数として扱うことで、目的関数の更なる低減が可能であると言える。剛性の増加とともに、応力集中も回避されており、検定比の最大値はこれまでの最適解の中で最も小さくなっているが、 X 方向荷重時には、わずかながら存在応力が許容応力度を上回っている。水平荷重を考慮したことで、最適解は対称性の崩れた形状となっている。

8 鋼構造設計規準の応力制約を考慮した最適化結果

7節で得られた最適解は、いずれもシェルの形状を修正して剛性のみを最大化したものであるため、個々の部材に発生する応力は必ずしも小さくならない。結果として、検定比が1以上となり弾性範囲を超える応力が発生する部材も存在している。長期荷重のみを考慮した問題(12),(13)の最適解は、結果として長期許容応力度設計は満足している。一方で、水平力も考慮した問題(14),(15)の最適解は、

表6 問題(16)最適形状の弾性解析結果と最適断面分布(問題(14)の最適解を初期解とした場合)

荷重 ケース	A [m ²]	f_1 [kNm]	V [m ³]	$d_1^{\max}$ [mm]	$d_2^{\max}$ [mm]	$d_3^{\max}$ [mm]	$N^{\max}$ [kN]	$N^{\min}$ [kN]	$M^{\max}$ [kNm]	$O^{\max}$ [kN]	荷重 ケース	$F_{ij}^{\max}$
L	2500	17.49	7.012	38.28	33.40	86.33	500.1	230.6	91.36	23.06	L	0.90
X		1.419		13.00	33.00	56.52	78.65	98.20	136.8	26.70	$L \pm X$	0.90
Y		1.086		12.36	23.22	31.96	81.85	82.03	60.61	15.15	$L \pm Y$	0.90
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	その他	
R [mm]	309.4	272.8	189.6	175.7	141.6	112.8	112.8	171.6	197.6	277.1	298.8	100.0~507.5

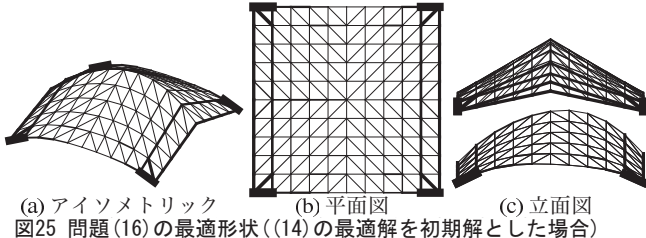


図25 問題(16)の最適形状((14)の最適解を初期解とした場合)

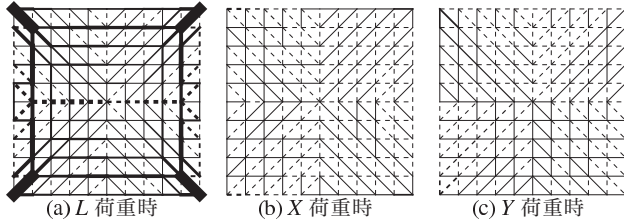


図26 問題(16)の最適形状の軸力分布図((14)の最適解を初期解とした場合)

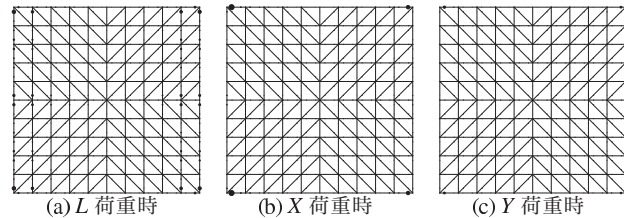


図27 問題(16)の最適形状の曲げモーメント分布図((14)の最適解を初期解とした場合)

水平力に対して高い剛性を獲得しているものの、水平力に対して短期許容応力度設計は満足できていない。

ここでは、問題(14),(15)の最適解に対して、断面形状を修正することで、すべての荷重ケースにおいて検定比を0.9以下に抑えつつも、一定の剛性を有する形態の創生を試みる。部材の鋼管径を並べたベクトルを R とする。本研究では、鋼管の径 R と板厚 t との比を、一般的な流通材の平均的な値として $R/t = 27.5$ で固定する。これにより、断面性能をすべて R の関数として記述できる。部材の消失や、非現実的に巨大な部材の出現を防ぐため、 R のとりうる値の範囲を $100\text{mm} \leq R_i \leq 1000\text{mm}$ に設定する。

以上を踏まえ、次の最適化問題を考える。

$$\text{minimize } f_2(R) \quad (16a)$$

$$\text{subject to } f_1^{(L)}(R) + f_1^{(X)}(R) + f_1^{(Y)}(R) \leq \bar{S} \quad (16b)$$

$$g_3(R)^{(L)} \leq 0 \quad (16c)$$

$$g_3(R)^{(L+X)} \leq 0 \quad (16d)$$

$$g_3(R)^{(L-X)} \leq 0 \quad (16e)$$

$$g_3(R)^{(L+Y)} \leq 0 \quad (16f)$$

$$g_3(R)^{(L-Y)} \leq 0 \quad (16g)$$

この最適化問題は、設計変数 a を部材の鋼管径を並べたベクトル R とした、式(10)の最適化問題である。ひずみエネルギーは、荷重ケース L, X, Y それぞれのケースでの合計値を制約する。検定比は、

表7 問題(16)最適形状の弾性解析結果と最適断面分布(問題(15)の最適解を初期解とした場合)

荷重 ケース	A [m ²]	f_1 [kNm]	V [m ³]	$d_1^{\max}$ [mm]	$d_2^{\max}$ [mm]	$d_3^{\max}$ [mm]	$N^{\max}$ [kN]	$N^{\min}$ [kN]	$M^{\max}$ [kNm]	$O^{\max}$ [kN]	荷重 ケース	$F_{ij}^{\max}$
L	2500	13.35	5.229	43.00	24.83	84.99	312.1	169.1	46.63	13.39	L	0.90
X		3.779		57.40	26.08	72.78	212.2	212.4	51.26	11.76	$L \pm X$	0.90
Y		2.869		65.25	60.84	90.44	92.43	88.30	49.14	10.57	$L \pm Y$	0.90
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	その他
R [mm]	241.1	210.3	169.4	145.0	139.8	141.4	142.8	154.6	168.9	209.2	240.3	100.0~353.2

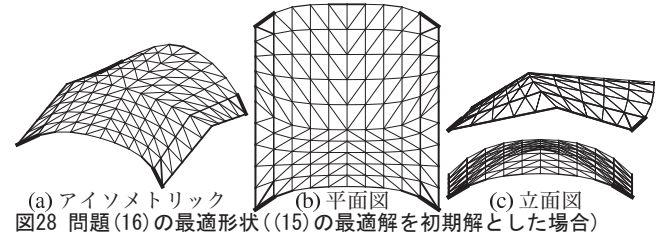


図28 問題(16)の最適形状((15)の最適解を初期解とした場合)

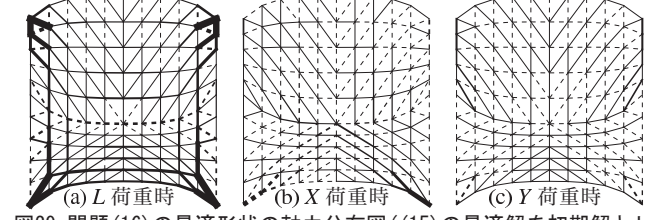


図29 問題(16)の最適形状の軸力分布図((15)の最適解を初期解とした場合)

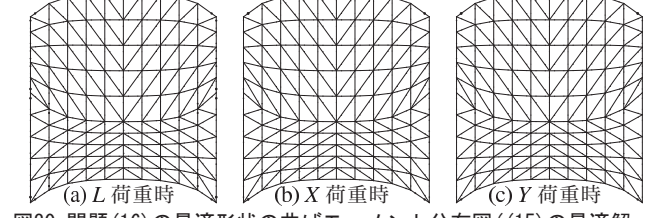


図30 問題(16)の最適形状の曲げモーメント分布図((15)の最適解を初期解とした場合)

L (長期荷重), $L+X$ (短期荷重), $L-X$ (短期荷重), $L+Y$ (短期荷重), $L-Y$ (短期荷重)のそれぞれの組み合わせ応力に対して制約を与える。なお、母線方向の部材については、通し材を想定しているため、変断面となることは線織面であるメリットを失うことになるため、図5で番号を付した合計11の母線上の部材の R は、それぞれの母線上で同じ値を取るものとする。ひずみエネルギーの上限値は、問題(14),(15)それぞれの最適解での値以下となるように、 $\bar{S} = 20.0\text{kNm}$ に設定する。

問題(14)の最適解を初期解とした場合の最適形状ならびにその力学性状を表6、図25~27に、問題(15)の最適解を初期解とした場合の最適形状ならびにその力学性状を表7、図28~30にそれぞれ示す(変位は微小であるため変位分布図は省略)。図25、28における線幅は、各部材の断面積の大きさを表す。表6,7の下段にはグルーピングした部材の鋼管径と、その他の部材の鋼管径の分布を示している。

最適化の結果、高い剛性を維持し、許容応力度設計を満足しつつ、初期解よりも大幅に体積を減少させることが出来た。いずれの最適解も、体積が 16.70m^3 からそれぞれ 7.01m^3 , 5.23m^3 に激減しており、鋼材量が少なくなり経済性が大幅に向上している。断面形状の分布傾向としては、外周部材の断面が大きくなり、特に応力の集中する支持点近傍の部材断面径の上昇が大きく、それぞれ $R=507.5\text{mm}$, 353.2mm となった。応力の小さい部材についてはいずれも下限値の $R=100\text{mm}$ となった。自重の大幅な減少により応力の絶対量は減少しているものの、初期形状と比べて応力の分布傾向に大きな変化はない。断面

形状を設計変数とした最適化は、力の流れそのものに与える影響はそれほど大きくはなく、主として与えられた力の流れに対して適切な断面性能を付与するものであり、力の流れを決める要素はシェルの形状が多くを占めていると言える。したがって、シェル形状と断面形状を同時に設計変数としなくても、シェル形状を最適化したのちに断面形状を最適化することで十分優良な解が得られると考えられる。いずれの最適解も、図4のグループ内の部材断面は同一であるので、母線方向の部材は通し材として施工することが可能である。

9 結

本研究により得られた知見を以下にまとめる。

1. 線織面を定める曲線をベジエ曲線で定義することで、制御点の位置を定める少ない変数で、さまざまな形状の線織面を表現することができる。
2. 線織面を繋ぎ合わせた形状を最適化することで、単一の線織面を最適化する場合と比べて実行可能領域を拡大し、様々な形状を創生することが出来る。
3. 水平力に対しても最適化を行う場合、鉛直方向だけでなく、水平方向にも形状修正を行うことで優良解が得られるが、内部空間を確保するために水平投影面積の制約が必要である。
4. ひずみエネルギーを最小化することで曲げ、せん断が消失し、圧縮抵抗型の力学形態に移行する。応力も減少傾向にあるが、鋼材は圧縮に弱いため、必ずしも応力度は許容応力度以下とならない。そのような場合、断面形状を設計変数として最適化を行うことで、許容応力度設計を満足することができる。
5. 本手法により得られた最適解はすべて線織面であるので、母線方向の部材はすべて同一直線上に存在し、これを通し材とすることで、通常の自由曲面と比較した場合に比べて高い施工性を有する。

1により、本論文で対象としたような規模の構造物であれば、短時間で最適解を得ることができる。設計変数が少ないので、鉛直方向のみならず、平面方向の節点座標を修正するパラメータを設計変数とした場合においても計算負荷は小さい。2は、文献5)における可展面の繋ぎ合わせで形成されるシェルの最適化手法の考え方を応用したものである。1本物の通し材として製作できる部材の長さは、一般に現場への搬入トレーラーのサイズで決まり、高々12m程度であるので、12mスパンよりも大きい領域で線織面を繋ぎ合わせれば、継手の数はあまり変わらない。線織面を複数繋ぎ合わせた形状は、単一の線織面よりも高い形状表現の自由度を有し、様々な形状を表現することが可能となる。3について、本論文では取り扱わなかったが、 y, z 方向に加えて x 方向にも形状修正を行う場合には、節点が近接してしまい極端に短い部材を有する非現実的な形状が得られることが知られており、本論文で採用した水平投影面積制約以外に、部材長に関する制約の導入が必要である⁷⁾。また、本論文では、立式の簡便さから目的関数を $f_1^{(L)} + f_1^{(X)} + f_1^{(Y)}$ という鉛直荷重時と水平荷重時のひずみエネルギーの線形結合としたが、各荷重時に対するひずみエネルギー値をバランス良く最小化したい場合には、各荷重時のひずみエネルギー値に $f_1^{(L)} \leq S, f_1^{(X)} \leq S, f_1^{(Y)} \leq S$ のように上限値を設け、 S を目的関数とする方法も考えられるであろう。4について、許容応力度設計を満足した解を得るためには、断面形状の最適

化に対する応力制約の導入が必要となる。本論文では最適化手法として逐次2次計画法を採用しているため、断面形状は連続変数として扱った。部材断面形状を離散的に取り扱いたい場合には、発見的手法や、混合整数計画法などを用いた定式化に基づいて最適化を行えば良い(例えば^{20,21)})。なお、今回の解析例では、シェル形状を最適化した解に対して断面形状を最適化しており、これは、シェル形状と断面形状を同時に最適化した場合の最適解とは必ずしも一致しない。5について、本論文ではラチスシェルを解析対象としたが、本手法は連続体シェルに対しても容易に適用できると考えられる。

参考文献

- 1) M. Ohsaki, T. Nakamura and M. Kohiyama: Shape optimization of a double-layer space truss described by a parametric surface, *Int. J. Space Struct.*, Vol. 12, pp. 109-119, 1997.1
- 2) 浜田 英明, 大森 博司: 設計者の選好と力学的合理性を勘案した自由曲面シェルの構造形態創生法の提案 その2 最適性条件による理論的解法, *日本建築学会構造系論文集*, No.618, pp.143-150, 2007.8.
- 3) 木村 俊明, 大森 博司: 形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用-自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案その1, *日本建築学会構造系論文集*, No.640, pp.1091-1098, 2009.6.
- 4) 小河 利行, 大崎 純, 立石 理恵: 線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化, *日本建築学会構造系論文集*, No.570, pp.129-136, 2003.8.
- 5) 藤田 慎之輔, 大崎 純: ひずみエネルギーとパラメトリック曲面の代数不変量を考慮したシェルの形状最適化, *日本建築学会構造系論文集*, No.639, pp.857-863, 2009.5
- 6) P. Basso, A. E. del Grosso, A. Pugnale and M. Sassone: Computational morphogenesis in architecture: Cost optimization of free-form grid shells, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structure*, Vol.50, No.3, pp. 143-150, 2009.
- 7) 藤田 慎之輔, 大崎 純: パラメトリック曲面で定義されたラチスシェルの部材長一様化と剛性最大化を目的とした形状最適化, *日本建築学会構造系論文集*, No.685, pp.495-502, 2013.3.
- 8) 西森 裕人, 本間 俊雄, 横須賀 洋平: 自由曲面グリッドシェル構造の部材長一様化と接合角を考慮した形態創生, *日本建築学会構造系論文集*, No.721, pp.565-562, 2016.3.
- 9) 小林 昭七: 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, 1995.9.
- 10) M. Beckh : *Hyperboloid Structures*, Wiley-Blackwell, 2015.2
- 11) S. Fujita and M. Ohsaki: Shape optimization of free-form shells using invariants of parametric surface, *Int. J. Space Struct.*, Vol. 25, pp. 143-157, 2010.9
- 12) B. S. Jiang, J. Hu : A shape optimization based on strain energy for framed structures, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 578, pp. 532-535, 2014.7
- 13) 山本 憲司, 皆川 洋一, 大森 博司: 座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究, *日本建築学会構造系論文集*, No.564, pp.95-102, 2003.2
- 14) 大森 博司, 山本 憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究 その1 シェル構造への適用, *日本建築学会構造系論文集*, No.496, pp.67-73, 1997.6
- 15) 大森 博司, 山本 憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究 その2 スペースフレームへの適用, *日本建築学会構造系論文集*, No.503, pp.77-83, 1998.1
- 16) H. Pottmann and J. Wallner : *Computational Line Geometry*, Springer, 2001.2
- 17) T. E. Oliphant : *Guide to NumPy*, Createspace Independent Publishing Platform, 2015.9
- 18) R. E. Perez, P. W. Jansen, and J. R. R. A. Martins (2012) pyOpt: A Python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 45, pp.101-118, 2012.1
- 19) 寒野 善博, 土谷 隆: 最適化と変分法, 丸善出版, 2014.10.
- 20) 大崎 純: 局所探索法による鋼構造骨組の多目的最適化, *日本建築学会構造系論文集*, No.634, pp.2135-2141, 2009.10
- 21) Y. Kanno: Mixed-integer second-order cone programming for global optimization of compliance of frame structure with discrete design variables, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 53, pp. 1-16, 2015.12

SHAPE OPTIMIZATION OF LATTICED SHELLS CONSISTING OF RULED SURFACE

*Shinnosuke FUJITA^{*1}, Makoto OHSAKI^{*2} and Kazuya SEKI^{*3}*^{*1} Assist. Prof., Laboratory for Future Interdisciplinary Research of Science and Technology, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.^{*2} Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.^{*3} Azusa Sekkei, M.Eng. (Former Grad. Stud., Hiroshima Univ.)

Recently, research and practical application of free-form shells are very active owing to development of computer software tools as well as progress of technology of construction and material. Design problem of free-form shells can be naturally formulated as an optimization problem considering mechanical performances. Parametric surfaces such as Bézier surfaces are effectively used for generating smooth and complex surfaces of continuum and latticed shells. However, to design a practically acceptable design, non-structural performances such as cost of construction should be taken into account. In this study, a shape optimization approach is presented for free-form shells using ruled surface. Latticed shells consisting of ruled surface have high constructability, because members on generating lines require no torsion.

Boundary shape of the latticed shell is defined using a pair of Bézier curves to reduce the number of variables. The points with the same parameter value of the two curves are connected by a line to model a ruled surface. The locations of control points of Bézier curves are chosen as design variables.

A latticed shell modeled by ruled surface consisting of two parabolic boundary curves is selected as the initial shape for optimization. Since a simple ruled surface does not have high degree of freedom for shape representation, two ruled surfaces are connected to model a roof with a ridge line. The members of latticed shell is modeled using beam elements, and the four corners are fixed. The vertical self-weight and live loads as well as horizontal loads representing seismic loads are considered in the process of optimization.

First, we minimize the strain energy under volume constraint to obtain a stiff structure. It is confirmed that the strain energy due to vertical and horizontal loads is drastically reduced through shape optimization. Constructability is maintained, because the stiff beams along the generating lines can be manufactured without torsion.

Although a stiff structure is obtained through strain energy minimization, the local stress may not be reduced.

Therefore, we solve the additional optimization problem, which minimizes the material volume under stiffness and stress constraint. The parameter defining the cross-sectional property of each member is considered as design variables of this optimization problem, which is carried out after shape optimization. By solving this problem, the member stresses are reduced through the process of minimizing the material volume, while maintaining the stiffness.

(2016年5月6日原稿受理, 2016年8月23日採用決定)