

Von Neumann 代数上の統計的実験に対する最小十分性について

中山大学珠海校区物理与天文学院* 倉持 結†

Yui Kuramochi

School of Physics and Astronomy,
Sun Yat-Sen University

キーワード 量子的統計的実験, 量子統計モデル, von Neumann 代数, 最小十分性

1 導入

量子的統計的実験 (quantum statistical experiment), あるいは統計モデル (statistical model) とは, あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$, あるいはより一般的に von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上の密度作用素のパラメーター付けされた族 $(\rho_\theta)_{\theta \in \Theta}$ のことをいう. 具体的には, 系の状態が部分的に知られているような状況に対応している. これは, (古典) 数理統計学における統計的実験の量子論あるいは作用素代数における一般化となっている. 数理統計 [1, 4] および作用素代数 [15, 16] の枠組みにおいて, (最小) 十分性の概念が主に部分 σ 代数および von Neumann 部分代数に対して論じられてきた. すなわち, 部分 (σ) 代数が十分であるとは, アクセスできる情報をその部分代数に制限しても, 状態族のパラメーター $\theta \in \Theta$ に関する情報が失われないことをいう. 十分性の概念は Petz により一般化されて [12, 13], 統計的実験を two-positive map で表される後処理によって情報が失われないこととして定式化されている.

本稿では, 筆者による文献 [9, 10] に基づき, こうした統計的実験の後処理とそれによって導入される同値関係による観点から von Neumann 代数上の統計的実験自体にたいして最小十分性を考察する. 主結果は, 任意の統計的実験が (同型の任意性を除き一意な) 最小十分な統計的実験に同値であるとする定理 (定理 1) である.

* SYSU Zhuhai Campus, Zhuhai 519082, China

† yui.tasuke.kuramochi@gmail.com

2 数学的準備

本論に入る前に、von Neumann 代数およびその間の (量子) チャンネルについてまとめる。詳細については [3, 14] などを参照されたい。

2.1 Von Neumann 代数

本稿では物理の流儀に従い、Hilbert 空間の内積 $\langle x|y \rangle$ ($x, y \in \mathcal{H}$) は x と y についてそれぞれ反線形、線形であるもとの約束する。

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対し、 $\mathcal{H}$ 上の有界な線形作用素全体のなす代数を $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ と記す。 $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素を $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ と記す。 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ がトレースクラスであるとは、任意の正規直交基底 $(x_i)_{i \in I}$ に対して $\sum_{i \in I} \langle x_i | \sqrt{T^* T} x_i \rangle < \infty$ なることをいい、 $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素全体の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ と記す。トレースクラス作用素 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ に対しては、そのトレース $\text{tr}(T) := \sum_{i \in I} \langle x_i | T x_i \rangle$ が (正規直交基底 $(x_i)_{i \in I}$ の取り方によらず一意に) 定まる。 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ 上のトレースノルム $\|\cdot\|_1$ を $\|T\|_1 := \text{tr}(\sqrt{T^* T})$ で定めると、このノルムのもとで $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ は Banach 空間となる。 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ の双対空間 $\mathcal{T}(\mathcal{H})^*$ ($\mathcal{T}(\mathcal{H})$ 上の有界線形汎関数全体のなす Banach 空間) は以下の意味で $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ と等長同型となる: 各 $\Phi \in \mathcal{T}(\mathcal{H})^*$ に対して $\Phi(T) = \text{tr}(AT)$ ($\forall T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$) なる $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が一意に存在し、写像 $\mathcal{T}(\mathcal{H})^* \ni \Phi \mapsto A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は等長同型となる。 $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ が密度作用素であるとは、 $\rho \geq 0$ かつ $\text{tr}(\rho) = 1$ なることをいい、 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素全体の集合を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ と書く。

各 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ に対して、 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の半ノルム $p_T(A) := |\text{tr}(AT)|$ ($A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$) を定め、半ノルムの族 $(p_T)_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})}$ によって生成される $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の局所凸位相を超弱位相という。すなわち、 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上のネット $(A_i)_{i \in I}$ に対して、 A_i が $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に超弱位相で収束するとは $p_T(A_i - A) \rightarrow 0$ がすべての $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ に対して成り立つことである。

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の部分集合 S に対して、 $S' := \{B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid AB = BA (\forall A \in S)\}$ を S の可換子という。また、 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が部分 $*$ -代数であるとは、 $\mathcal{M}$ が $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の線形部分空間であり、単位的 $\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$ であり、かつ積と共役で閉じていること、すなわち $AB, A^* \in \mathcal{M}$ ($\forall A, B \in \mathcal{M}$) なることをいう。 $*$ -部分代数 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が von Neumann 代数であるとは、二重可換子 $\mathcal{M}'' := (\mathcal{M}')'$ が $\mathcal{M}$ に一致することをいう。 $\mathcal{M}$ の単位元 $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ は $\mathbb{1}_{\mathcal{M}}$ とも書かれる。Von Neumann の二重可換子定理によると、 $*$ -部分代数 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が von Neumann 代数であることは、 $\mathcal{M}$ が超弱位相について閉じていることと同値である。

Von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上の線形汎関数 $\varphi \in \mathcal{M}^*$ に対して、 $\varphi(A)$ ($A \in \mathcal{M}$) は $\langle \varphi, A \rangle$ のような二重線形な形にしばしば書かれる。超弱位相について連続な $\mathcal{M}$ 上の線形汎関数の集合を $\mathcal{M}_*$ と書く。 $\varphi \in \mathcal{M}^*$ が正であるとは、 $\varphi(A) \geq 0$ がすべての $0 \leq A \in \mathcal{M}$ に対して成り立つことをいう。 $\mathcal{M}$ 上の状態とは、 $\mathcal{M}$ 上の正の線形汎関数 $\varphi \in \mathcal{M}_*$ であって、規格化条件 $\varphi(\mathbb{1}_{\mathcal{M}}) = 1$ を満たすもののことをいう。超弱位相について連続な状態 $\varphi \in \mathcal{M}_*$ を $\mathcal{M}$ 上の正規状態といい、正規状態全体の集合を $\mathcal{S}_o(\mathcal{M})$ と書く。 $\mathcal{M}_*$ は $\mathcal{M}$ の前双対である: すなわち、各 $A \in \mathcal{M}$ に対して

$\Psi_A \in (\mathcal{M}_*)^*$ を $\Psi_A(\varphi) := \langle \varphi, A \rangle$ ($\varphi \in \mathcal{M}_*$) で定めると, 写像 $\mathcal{M} \ni A \mapsto \Psi_A \in (\mathcal{M}_*)^*$ によって $\mathcal{M}$ と $(\mathcal{M}_*)^*$ は (Banach 空間として) 等長同型となる.

2.2 Von Neumann 代数間の完全正值チャンネル

$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ を von Neumann 代数, $\Lambda: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ を有界線形写像とする.

- Λ が単位的 (unital) : $\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{N}}$.
- Λ が正 (positive) : $\stackrel{\text{def}}{=} 0 \leq A \in \mathcal{M}$ ならば $\Lambda(A) \geq 0$.
- Λ が n -positive : $\stackrel{\text{def}}{=} \text{各 } (A_j)_{j=1}^n \subseteq \mathcal{M}, \text{ および } (B_j)_{j=1}^n \subseteq \mathcal{N} \text{ に対して}$

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^* \Lambda(A_i^* A_j) B_j \geq 0.$$

- Λ が完全正值 (completely positive, CP) : $\stackrel{\text{def}}{=} \text{すべての } n \geq 1 \text{ に対して } \Lambda \text{ が } n\text{-positive.}$
 $\mathcal{M}$ または $\mathcal{N}$ が可換であれば, Λ が正であることから Λ が完全正值であることが従う.
- 正の Λ が正規 : $\stackrel{\text{def}}{=} \text{任意の有界な単調増大ネット } (A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M} \text{ に対して, } \sup_{i \in I} \Lambda(A_i) = \Lambda(\sup_{i \in I} A_i).$

正の Λ が正規であることと Λ が超弱位相について連続であることは同値である.

正規な Λ に対しては, 前双対写像 $\Lambda_*: \mathcal{N}_* \rightarrow \mathcal{M}_*$ が $\langle \varphi, \Lambda(A) \rangle = \langle \Lambda_*(\varphi), A \rangle$ ($\varphi \in \mathcal{N}_*, A \in \mathcal{M}$) によって定まる.

- Λ が (正規) チャンネル : $\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$ が正規かつ単位的かつ完全正值.
 Λ がチャンネルのとき $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ をそれぞれ Λ の出力・入力空間と呼ぶ. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ へのチャンネル全体の集合を $\mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N})$ と記し, $\mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$ を $\mathbf{Ch}(\mathcal{M})$ と記す. チャンネル $\Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N})$ は Heisenberg 描像でのオブザーバブルの変化を表現し, 前双対 $\Lambda_*: \mathcal{N}_* \rightarrow \mathcal{M}_*$ が Schrödinger 描像での正規状態の状態変化を表現する.

チャンネルの例として, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のチャンネル $\Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ を考えてみよう. このとき, Λ および前双対 $\Lambda_*: \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ は以下のような Kraus 和表現 [3, 7] を持つ:

$$\Lambda(A) = \sum_i M_i^* A M_i \quad (A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad (1)$$

$$\Lambda_*(T) = \sum_i M_i T M_i^* \quad (T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})). \quad (2)$$

ここで, $M_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は完全性条件 $\sum_i M_i^* M_i = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ を満たす有界作用素の族であり, 式 (1) および (2) の右辺はそれぞれ (超) 弱位相およびトレースノルム位相の意味で収束している.

もう一つの例として, 古典的な場合に対応する可換 von Neumann 代数を考えてみよう. (Ω, Σ, μ) を σ -有限な測度空間とし, 測度 μ に関する L^p 空間を $L^p(\mu)$ と書く ($p \in [1, \infty]$). また, Ω 上の Σ -可測関数 f に対して, f と μ -a.e. で一致する可測関数よりなる同値類を $[f]_\mu$ と記す. 各 $[f]_\mu \in L^\infty(\mu)$

を, Hilbert 空間 $L^2(\mu)$ 上の有界作用素

$$L^2(\mu) \ni [g]_\mu \mapsto [fg]_\mu \in L^2(\mu)$$

と同一視することで, $L^\infty(\mu)$ は Hilbert 空間 $L^2(\mu)$ 上の von Neumann 代数となる. 前双対の元 $\varphi \in L^\infty(\mu)_*$ は, (Ω, Σ) 上の μ について絶対連続な複素測度 ν と対応

$$\langle \varphi, [f]_\mu \rangle = \int_{\Omega} f(\omega) d\nu(\omega)$$

により同一視できる. 特に, 正規状態 $\varphi \in S_\sigma(L^\infty(\mu))$ は μ について絶対連続な確率測度に対応する. また, 対応 $\nu \mapsto \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]_\mu \in L^1(\mu)$ により前双対 $L^\infty(\mu)_*$ は $L^1(\mu)$ とも同一視される.

$(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ ($j = 1, 2$) を σ -有限測度空間とする. 各チャンネル $\Gamma \in \mathbf{Ch}(L^\infty(\mu_1) \rightarrow L^\infty(\mu_2))$ に対して,

$$[\kappa(E|\cdot)]_{\mu_2} = \Gamma(\chi_E) \quad (E \in \Sigma_1) \quad (3)$$

によって, 各 $E \in \Sigma_1$ に対して Σ_2 -可測関数 $\kappa(E|\cdot)$ が μ_2 -a.e. での不定性を除き定義される. このとき $\kappa(\cdot|\cdot): \Sigma_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ は以下を満たす:

- (i) $0 \leq \kappa(E|\omega_2) \leq 1$, $\mu_2(\omega_2)$ -a.e. ($\forall E \in \Sigma_1$);
- (ii) 各 $E \in \Sigma_1$ に対して, $\kappa(E|\cdot)$ は Σ_2 -可測;
- (iii) $\kappa(\emptyset|\omega_2) = 0$, $\kappa(\Omega|\omega_2) = 1$, $\mu_2(\omega_2)$ -a.e.;
- (iv) 非交差可算列 $\{E_n\}_n \subseteq \Sigma_1$ に対して, $\kappa(\cup_n E_n|\omega_2) = \sum_n \kappa(E_n|\omega_2)$, $\mu_2(\omega_2)$ -a.e.

上記の条件 (i)-(iv) を満たす写像 κ を (μ_1, μ_2) 弱 Markov 核 (weak Markov kernel) という. 逆に μ_1 - μ_2 弱 Markov 核 κ が与えられたとき, 式 (3) を満たすチャンネル $\Gamma \in \mathbf{Ch}(L^\infty(\mu_1) \rightarrow L^\infty(\mu_2))$ が一意に存在する. 弱 Markov 核は入出力空間が異なる場合の条件付き確率であり, 古典情報処理に対応する.

2.3 条件付き期待値と (最小) 十分部分代数

$\mathcal{M}$ を von Neumann 代数, $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分代数とする. 正規な線形写像 $\mathbb{E}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1$ が条件

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(A)\| &\leq \|A\| \quad (A \in \mathcal{M}), \\ \mathbb{E}(B) &= B \quad (B \in \mathcal{M}_1) \end{aligned}$$

を満たすとき, $\mathbb{E}$ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}_0$ へのノルム 1 射影, あるいは条件付き期待値と呼ばれる. 富山の定理 (例えば, [2] の定理 1.5.10) により, 条件付き期待値 $\mathbb{E}$ は以下を満たす:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &\in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1), \\ \mathbb{E}(B_1 A B_2) &= B_1 \mathbb{E}(A) B_2 \quad (A \in \mathcal{M}; B_1, B_2 \in \mathcal{M}_1). \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ を von Neumann 代数, $\mathcal{M}_1$ を $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分代数, $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ を $\mathcal{M}$ 上の正規状態の族とする. このとき, 十分部分代数および最小十分部分代数の概念を Łuczak [11] に従って以下のように導入する:

- $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ が忠実 $\stackrel{\text{def}}{:=}$ 正の作用素 $A \in \mathcal{M}$ に対して, $\varphi_\theta(A) = 0$ がすべての $\theta \in \Theta$ に対して成り立つならば $A = 0$.
- $\mathcal{M}_1$ が $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について梅垣の意味で十分 $\stackrel{\text{def}}{:=}$ 条件付き期待値 $\mathbb{E}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1$ が存在して, $\varphi_\theta = \varphi_\theta \circ \mathbb{E} \ (\forall \theta \in \Theta)$.
- $\mathcal{M}_1$ が $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について CP の意味で十分 $\stackrel{\text{def}}{:=}$ CP チャンネル $\Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_1)$ が存在して, $\varphi_\theta = \varphi_\theta \circ \Lambda \ (\forall \theta \in \Theta)$.
- $\mathcal{M}_1$ が $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について梅垣の意味で最小十分 $\stackrel{\text{def}}{:=}$ $\mathcal{M}_1$ は梅垣の意味で十分かつすべての梅垣の意味で十分な部分代数に含まれる.
- $\mathcal{M}_1$ が $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について CP の意味で最小十分 $\stackrel{\text{def}}{:=}$ $\mathcal{M}_1$ は CP の意味で十分かつすべての CP の意味で十分な部分代数に含まれる.

Łuczak [11] によると, 正規状態の族 $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ が忠実ならば, $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分代数 $\mathcal{M}_0$ が存在して, $\mathcal{M}_0$ は梅垣および CP の意味で最小十分となる. 次の 3 節では, Łuczak の結果を, 部分代数に限らない, 統計的実験間の十分なチャンネルによって導入される同値関係によって解釈し直す.

3 統計的実験の最小十分性

ここでは, 最小十分な統計的実験の存在と一意性に関する結果を述べる.

定義 1. 統計的実験 (statistical experiment), あるいは統計モデル (statistical model) とは, 三つ組 $\mathcal{E} = (\mathcal{M}, \Theta, (\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta})$ であって, $\mathcal{M}$ が von Neumann 代数, $\Theta \neq \emptyset$ が集合, $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta} \in \mathcal{S}_\sigma(\mathcal{M})^\Theta$ が Θ によってパラメーター付けされた正規状態の族であるものをいう. $\mathcal{M}, \Theta$ はそれぞれ $\mathcal{E}$ の出力空間, $\mathcal{E}$ のパラメーター集合と呼ばれる.

統計的実験は出力空間上の状態が部分的にわかっている状況に対応している. パラメーター集合を同じくする統計的実験 $\mathcal{E} = (\mathcal{M}, \Theta, (\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta})$ と $\mathcal{F} = (\mathcal{N}, \Theta, (\psi_\theta)_{\theta \in \Theta})$ に対して, その間の coarse-graining relations を以下のように定義する:

- $\mathcal{E} \preceq_{\text{CP}} \mathcal{F}$ ($\mathcal{E}$ は $\mathcal{F}$ の CP coarse-graining) $\stackrel{\text{def}}{:=} \exists \Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N})$ s.t. $[\varphi_\theta = \psi_\theta \circ \Lambda \ (\forall \theta \in \Theta)]$.
- $\mathcal{E} \sim_{\text{CP}} \mathcal{F}$ ($\mathcal{E}$ と $\mathcal{F}$ は CP 同値) $\stackrel{\text{def}}{:=} \mathcal{E} \preceq_{\text{CP}} \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{F} \preceq_{\text{CP}} \mathcal{E}$.
- $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ ($\mathcal{E}$ と $\mathcal{F}$ は正規同型) $\stackrel{\text{def}}{:=}$ 正規な *-同型 $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ が存在して, $\varphi_\theta = \psi_\theta \circ \pi \ (\forall \theta \in \Theta)$.

関係 $\mathcal{E} \preceq_{\text{CP}} \mathcal{F}$ は, パラメーター $\theta \in \Theta$ について $\mathcal{F}$ の方が $\mathcal{E}$ より多くの情報を持っていることを意味する. 二項関係 $\preceq_{\text{CP}}$ および $\sim_{\text{CP}}$ はそれぞれ同じパラメーター集合を持つ統計的実験の間の前

順序および同値関係である。

統計的実験の最小十分性を以下のように定義する。

定義 2 (統計的実験の最小十分性). 統計的実験 $\mathcal{E}_0 = (\mathcal{M}_0, \Theta, (\varphi_\theta^{(0)})_{\theta \in \Theta})$ が最小十分 (minimal sufficient) であるとは, $\alpha \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M}_0)$ に対して, $\varphi_\theta^{(0)} = \varphi_\theta^{(0)} \circ \alpha$ ($\forall \theta \in \Theta$) ならば $\alpha = \text{id}_{\mathcal{M}_0}$ なることをいう。

このとき以下に示す同値な最小十分な統計的実験の存在と一意性に関する以下の定理が成立する:

定理 1. 任意の統計的実験 $\mathcal{E} = (\mathcal{M}, \Theta, (\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta})$ に対して, 最小十分な統計的実験 $\mathcal{E}_0 = (\mathcal{M}_0, \Theta, (\varphi_\theta^{(0)})_{\theta \in \Theta})$ が存在して, $\mathcal{E} \sim_{\text{CP}} \mathcal{E}_0$. また, このような最小十分な統計的実験 $\mathcal{E}_0$ は正規同型の任意性を除き一意である。

最小十分な $\mathcal{E}_0$ の構成には, まず, $\mathcal{E}$ は忠実であることを仮定して良いことを示し, Łuczak [11] による平均エルゴード定理 [8] を用いた方法により, 部分代数 $\mathcal{M}_0$ および $\mathcal{M}_0$ への条件付き期待値 $\mathbb{E}$ を構成すると, φ_θ の $\mathcal{M}_0$ への制限 $\varphi_\theta^{(0)}$ によって, 所望の最小十分な統計的実験が得られる。

次に, 統計的実験の最小十分性と部分代数の最小十分性の関係を述べよう。この関係は以下の 2 つの定理によって与えられる。

定理 2. $\mathcal{E} = (\mathcal{M}, \Theta, (\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta})$ を統計的実験とする。このとき, 以下の条件は同値である:

- (i) $\mathcal{E}$ は最小十分;
- (ii) $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ は忠実で, $\mathcal{M}$ は $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について梅垣の意味で最小十分部分代数;
- (iii) $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ は忠実で, $\mathcal{M}$ は $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について CP の意味で最小十分部分代数。

定理 3. $\mathcal{E} = (\mathcal{M}, \Theta, (\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta})$ を $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ が忠実な統計的実験, $\mathcal{M}_0$ を $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分代数とする。各 $\theta \in \Theta$ に対して $\varphi_\theta^{(0)}$ を φ_θ の $\mathcal{M}_0$ への制限とし, 統計的実験 $\mathcal{E}_0 = (\mathcal{M}_0, \Theta, (\varphi_\theta^{(0)})_{\theta \in \Theta})$ を定義する。このとき, 以下の条件は同値:

- (i) $\mathcal{M}_0$ は $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について梅垣の意味で最小十分;
- (ii) $\mathcal{M}_0$ は $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について CP の意味で最小十分;
- (iii) $\mathcal{M}_0$ は $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について梅垣の意味で十分かつ $\mathcal{E}_0$ は最小十分;
- (iv) $\mathcal{M}_0$ は $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について CP の意味で十分かつ $\mathcal{E}_0$ は最小十分。

以上に見た最小十分性に関する結果は CP チャンネルをより弱い条件である Schwarz チャンネルに一般化しても成立する。例えば, 統計的実験の間の同値関係 $\sim_{\text{Sch}}$ や最小十分性の条件を Schwarz チャンネルを用いて定義することができる。このとき, $\sim_{\text{Sch}}$ は $\sim_{\text{CP}}$ に一致し, 最小十分性の条件も CP チャンネルで定義したものが Schwarz チャンネルで定義したものに一致することが示せる。詳細は論文 [10] を参照されたい。

4 具体例

本節では、最小十分な統計的実験の具体例として、最小十分チャンネル (4.1 節)、有限次元量子系 (4.2 節)、および古典数理統計学に対応する可換代数 (4.3 節) を取り上げる。

4.1 最小十分チャンネル

$\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M}_{\text{in}}$ を von Neumann 代数, $\Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{in}})$ および $\Gamma \in \mathbf{Ch}(\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{in}})$ を入力空間を同じくする正規チャンネルとする。統計的実験の場合と同様に、チャンネルに関しても前順序関係 $\preceq_{\text{CP}}$, 同値関係 $\sim_{\text{CP}}$, $\cong$ および最小十分性を以下のように定義する:

- $\Lambda \preceq_{\text{CP}} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \exists \alpha \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}) \text{ s.t. } \Lambda = \Gamma \circ \alpha.$
- $\Lambda \sim_{\text{CP}} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda \preceq_{\text{CP}} \Gamma \text{ かつ } \Gamma \preceq_{\text{CP}} \Lambda.$
- $\Lambda \cong \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{正規同型 } \pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \text{ が存在して } \Lambda = \Gamma \circ \pi.$
- $\Lambda \text{ が最小十分} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M}) \text{ に対して, } \Lambda \circ \alpha = \Lambda \text{ ならば } \alpha = \text{id}_{\mathcal{M}}.$

各チャンネル $\Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{in}})$ に対して、対応する統計的実験を

$$\mathcal{E}_{\Lambda} = (\mathcal{M}, \mathcal{S}_{\sigma}(\mathcal{M}_{\text{in}}), (\Lambda_{*}(\varphi))_{\varphi \in \mathcal{S}_{\sigma}(\mathcal{M}_{\text{in}})})$$

によって定義すると、上で導入したチャンネル間の関係は統計的実験の言葉で以下のように言い換えることができる:

- $\Lambda \preceq_{\text{CP}} \Gamma \iff \mathcal{E}_{\Lambda} \preceq_{\text{CP}} \mathcal{E}_{\Gamma}.$
- $\Lambda \sim_{\text{CP}} \Gamma \iff \mathcal{E}_{\Lambda} \sim_{\text{CP}} \mathcal{E}_{\Gamma}.$
- $\Lambda \cong \Gamma \iff \mathcal{E}_{\Lambda} \cong \mathcal{E}_{\Gamma}.$
- $\Lambda \text{ は最小十分チャンネル} \iff \mathcal{E}_{\Lambda} \text{ は最小十分な統計的実験}.$

これと定理 1 を合わせると、任意の正規チャンネル $\Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{in}})$ は最小十分チャンネル $\Lambda_0 \in \mathbf{Ch}(\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_{\text{in}})$ に CP 同値となり、このような Λ_0 は正規同型 $\cong$ の任意性を除き一意であることがただちに従う。

4.2 有限次元量子系

$\mathcal{H}$ を有限次元 Hilbert 空間とし、 $\mathcal{E} = (\mathcal{L}(\mathcal{H}), \Theta, (\rho_{\theta})_{\theta \in \Theta})$ を統計的実験とする。ここで、2 節で言及したように、 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の正規状態を $\mathcal{H}$ 上の密度作用素と同一視する。また、簡単のため $(\rho_{\theta})_{\theta \in \Theta}$ は忠実であると仮定する。このとき、 $\mathcal{E}$ に CP 同値な最小十分な統計的実験 $\mathcal{E}_0$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の $(\rho_{\theta})_{\theta \in \Theta}$ についての最小十分部分代数 $\mathcal{M}_0$ および $\mathcal{M}_0$ への条件付き期待値 $\mathbb{E}$ を求めることで得ら

れる。文献 [5] で示されたように, $\mathcal{H}, \mathcal{M}_0, \mathbb{E}$, および ρ_θ は具体的に以下のような形に求められる:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \bigoplus_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha} \otimes \mathcal{K}_{\alpha}, \\ \mathcal{M}_0 &= \bigoplus_{\alpha} \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\alpha}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_{\alpha}}, \\ \mathbb{E}(A) &= \bigoplus_{\alpha} \text{tr}_{\mathcal{K}_{\alpha}} [P_{\alpha} A P_{\alpha} (\mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\alpha}} \otimes \omega_{\alpha})] \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_{\alpha}} \quad (A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})), \\ \rho_{\theta} &= \bigoplus_{\alpha} q_{\alpha, \theta} \rho_{\alpha, \theta} \otimes \omega_{\alpha}.\end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{H}_{\alpha}$ および $\mathcal{K}_{\alpha}$ は Hilbert 空間, P_{α} は $\mathcal{H}_{\alpha} \otimes \mathcal{K}_{\alpha}$ への射影, ω_{α} は $(\theta \in \Theta$ によらない) $\mathcal{K}_{\alpha}$ 上の密度作用素, $\text{tr}_{\mathcal{K}_{\alpha}}[\cdot]$ は $\mathcal{K}_{\alpha}$ についての部分トレース, $(q_{\alpha, \theta})_{\alpha}$ は $\sum_{\alpha} q_{\alpha, \theta} = 1, q_{\alpha, \theta} \geq 0$ なる確率分布, $\rho_{\alpha, \theta}$ は $\mathcal{H}_{\alpha}$ 上の密度作用素である. このような分解は以下の条件で特徴づけられる: 任意のチャンネル $\Lambda \in \mathbf{Ch}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ が $\Lambda_*(\rho_{\theta}) = \rho_{\theta}$ をすべての $\theta \in \Theta$ に対して満たすならば, Λ は

$$\Lambda|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\alpha} \otimes \mathcal{K}_{\alpha})} = \text{id}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\alpha})} \otimes \Lambda_{\alpha}$$

なる形に書ける. ここで, $\Lambda_{\alpha} \in \mathbf{Ch}(\mathcal{L}(\mathcal{K}_{\alpha}))$ かつ $\Lambda_{\alpha*}(\omega_{\alpha}) = \omega_{\alpha}$ である. このような分解の存在と一意性は, 最初に小芦と井元によって示された [6].

4.3 可換代数 (古典数理統計学)

ここでは, (古典) 数理統計学における (最小) 十分部分 σ -代数の理論 [1, 4] を本稿で考察した作用素代数的なアプローチから見直してみる.*1

以下本小節では (Ω, Σ) を可測空間, とし, その上の確率分布の族 $(P_{\theta})_{\theta \in \Theta}$ を考え, $\mathcal{P} := \{P_{\theta} \mid \theta \in \Theta\}$ と書く. さらに, 本節では, ほとんどの実際的な例が満たす条件として, ある (Ω, Σ) 上の σ -有限測度 μ が存在して, すべての $P_{\theta} \in \mathcal{P}$ は μ について絶対連続であると仮定する. このとき, 可算部分集合 $\{P_{\theta_k}\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{P}$ が存在して $P_* := \sum_{k \geq 1} 2^{-k} P_{\theta_k}$ とおくと, すべての $P_{\theta} \in \mathcal{P}$ は P_* について絶対連続となる.

Σ_1 を Σ の部分 σ -代数とする. 確率測度 $P_{\theta} \in \mathcal{P}$ に対して, 条件付き期待値 $E_{\theta}(\cdot | \Sigma_1): L^{\infty}(\Omega, \Sigma, P_{\theta}) \rightarrow L^{\infty}(\Omega, \Sigma_1, P_{\theta})$ を

$$\int_{\Omega} E_{\theta}([f]_{P_{\theta}} | \Sigma_1) \chi_E dP_{\theta} = \int_{\Omega} f \chi_E dP_{\theta} \quad ([f]_{P_{\theta}} \in L^{\infty}(\Omega, \Sigma, P_{\theta}); E \in \Sigma_1)$$

で定め, P_{θ} -a.e. での不定性を除き一意な条件付き確率 $P_{\theta}(E | \Sigma_2, \omega)$ ($E \in \Sigma, \omega \in \Omega$) を $P_{\theta}(E | \Sigma_2, \cdot) = E_{\theta}(\chi_E)$ P_{θ} -a.e. で定める.

Σ_1, Σ_2 を Σ の部分 σ -代数とする. このとき, (最小) 十分部分 σ -代数の概念を以下のように定義する:

*1 本小節の内容は論文 [10] には含まれていない.

- Σ_1 が $\mathcal{P}$ について十分 $\stackrel{\text{def}}{:=}$ 条件付き確率 $P_\theta(\cdot|\Sigma_1, \cdot)$ (または条件付き期待値 $E_\theta(\cdot|\Sigma_1)$) が $\theta \in \Theta$ によらずに取れる.
- $\Sigma_1 \subseteq_{\mathcal{P}} \Sigma_2$ (Σ_1 が Σ_2 に本質的に含まれる) $\stackrel{\text{def}}{:=}$ 各 $E_1 \in \Sigma_1$ に対して $E_2 \in \Sigma_2$ が存在して $P_\theta(E_1 \triangle E_2) = 0$ がすべての $\theta \in \Theta$ に対して成立する. ここで, $E \triangle F := E \setminus F \cup F \setminus E$ は集合の対称差である.
- Σ_1 が ($\mathcal{P}$ についての) 最小十分部分 σ -代数 $\stackrel{\text{def}}{:=}$ Σ_1 が $\mathcal{P}$ について十分でかつすべての十分部分 σ -代数に本質的に含まれる.

これを作用素代数的に書き直してみよう. 各確率測度 $P_\theta \in \mathcal{P}$ は可換 von Neumann 代数 $\mathcal{M} := L^\infty(P_*)$ 上の正規状態

$$\varphi_\theta([f]_{P_*}) = \int_{\Omega} f dP_\theta \quad ([f]_{P_*} \in L^\infty(P_*))$$

に対応する. このとき, $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ は $\mathcal{M}$ 上で忠実である. 部分 σ -代数 Σ_1 に対して,

$$\mathcal{M}_{\Sigma_1} := \{[f]_{P_*} \in \mathcal{M} \mid f \text{ は } \Sigma_1\text{-可測}\}$$

とおくと, $\mathcal{M}_{\Sigma_1}$ は $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分代数となる. また, $\mathcal{M}$ の von Neumann 部分代数 $\mathcal{M}_1$ に対して, 部分 σ -代数

$$\Sigma_{\mathcal{M}_1} := \{E_1 \in \Sigma \mid [\chi_{E_1}]_{P_*} \in \mathcal{M}_1\}$$

を定めると, $\mathcal{M}_{\Sigma_{\mathcal{M}_1}} = \mathcal{M}_1$ が成立する. Σ_1, Σ_2 を部分 σ -代数とすると, 同値関係

$$\Sigma_1 \subseteq_{\mathcal{P}} \Sigma_2 \iff \mathcal{M}_{\Sigma_1} \subseteq \mathcal{M}_{\Sigma_2} \quad (4)$$

が成り立つ. こうした対応は部分 σ -代数の (最小) 十分性についても以下の命題のように成立する:

命題 1. Σ_0 を Σ の部分 σ -代数とする. このとき以下が成立する.

1. Σ_0 が $\mathcal{P}$ について十分部分 σ -代数 $\iff \mathcal{M}_{\Sigma_0}$ が $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について梅垣の意味で十分部分代数.
2. Σ_0 が $\mathcal{P}$ について最小十分部分 σ -代数 $\iff \mathcal{M}_{\Sigma_0}$ が $(\varphi_\theta)_{\theta \in \Theta}$ について梅垣の意味で最小十分部分代数.

証明. 1. Σ_0 が十分部分 σ -代数であるとする. このとき, $\theta \in \Theta$ によらない P_θ の条件付き期待値を $\mathbb{E} = E_*(\cdot|\Sigma_0)$ とおくと, $\mathbb{E}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\Sigma_0}$ は $\mathcal{M}_{\Sigma_0}$ への条件付き期待値であり, $\varphi_\theta = \varphi_\theta \circ \mathbb{E} (\forall \theta \in \Theta)$ が成立する. よって, $\mathcal{M}_{\Sigma_0}$ は十分部分代数である. 逆に, $\mathcal{M}_{\Sigma_0}$ が十分部分代数であると仮定すると, 条件付き期待値 $\mathbb{E}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\Sigma_0}$ が存在して, $\varphi_\theta = \varphi_\theta \circ \mathbb{E} (\forall \theta \in \Theta)$. 各 $[f]_{P_*} \in L^\infty(P_*)$ に対して, Σ_0 -可測関数 $E_*([f]_{P_*}|\Sigma_0, \cdot)$ を

$$[E_*([f]_{P_*}|\Sigma_0, \cdot)]_{P_*} = \mathbb{E}([f]_{P_*})$$

で定めると, すべての $\theta \in \Theta, E_0 \in \Sigma_0$ に対して,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} E_*([f]_{P_*} | \Sigma_0, \omega) \chi_{E_0}(\omega) dP_{\theta}(\omega) &= \langle \varphi_{\theta}, \mathbb{E}([f]_{P_*}) [\chi_{E_0}]_{P_*} \rangle \\
 &= \langle \varphi_{\theta}, \mathbb{E}([f \chi_{E_0}]_{P_*}) \rangle \\
 &= \varphi_{\theta} \circ \mathbb{E}([f \chi_{E_0}]_{P_*}) \\
 &= \varphi_{\theta}([f \chi_{E_0}]_{P_*}) \\
 &= \int_{\Omega} f(\omega) \chi_{E_0}(\omega) dP_{\theta}(\omega).
 \end{aligned}$$

よって, $E_*(\cdot | \Sigma_0, \cdot)$ は P_{θ} の $\theta \in \Theta$ によらない常勤付き期待値になっている. 故に Σ_0 は十分部分 σ -代数である.

2. 上記の主張 1. および部分代数についての同値関係 (4) より明らか. □

これより, 最小十分部分 σ -代数 Σ_0 の存在が定理 1 より従う. 最小十分部分 σ -代数の存在は, 始め Bahadur [1] によって, Radon-Nikodym 微分

$$\left(\frac{dP_{\theta}}{dP_*} \right)_{\theta \in \Theta}$$

によって生成される σ -代数として構成された.

また, 統計的実験の最小十分性の定義とチャンネルと弱 Markov 核との対応により, 最小十分部分 σ -代数を以下のように特徴づけることができる:

系 1. 部分 σ -代数 Σ_0 について以下の条件は同値.

1. Σ_0 は最小十分.
2. (Ω, Σ_0, P_*) - (Ω, Σ_0, P_*) 弱 Markov 核 $\kappa(\cdot | \cdot): \Omega \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ が条件

$$P_{\theta}(E_0) = \int_{\Omega} \kappa(E_0 | \omega) dP_{\theta}(\omega) \quad (\forall E_0 \in \Sigma_0)$$

を満たすならば, $\kappa(E_0 | \omega) = \chi_{E_0}(\omega)$, $P_*(\omega)$ -a.e. がすべての $E_0 \in \Sigma_0$ に対して成立する.

最後に, 本節の内容と正值測度 (positive operator valued measure, POVM) の関係について言及しておこう. 入力 von Neumann 代数 $\mathcal{M}_{\text{in}}$ 上の POVM M が定義されると, 量子-古典チャンネル (QC チャンネル) と呼ばれる, 可換 von Neumann 代数を出力空間とする正規チャンネル Γ^M が定義される. これより, POVM の最小十分性の議論は 4.1 節の意味での, Γ^M の最小十分性の議論に帰着する. 一方, POVM M に対して, $\mathcal{M}_{\text{in}}$ 上の正規状態 φ を用意したとき得られる出力確率分布を P_{φ}^M と書くと, $\mathcal{P}^M := \{P_{\varphi}^M\}_{\varphi \in \mathcal{S}_{\sigma}(\mathcal{M}_{\text{in}})}$ に対して本節の議論を適用することで, 最小十分部分代数 Σ_0 が得られる. この Σ_0 は Γ^M と同値な最小十分チャンネルと対応していることが容易に確かめられる. POVM や QC チャンネル, およびその最小十分性についての詳細については論文 [10] を参照されたい.

参考文献

- [1] Bahadur RR (1954) Sufficiency and Statistical Decision Functions. *Ann Math Stat* 25(3):423–462
- [2] Brown NP, Ozawa N (2008) C^* -algebras and finite-dimensional approximations, vol 88. American Mathematical Soc.
- [3] Davies EB (1976) Quantum theory of open systems. IMA
- [4] Halmos PR, Savage LJ (1949) Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics. *Ann Math Stat* 20(2):225–241
- [5] Hayden P, Jozsa R, Petz D, Winter A (2004) Structure of States Which Satisfy Strong Subadditivity of Quantum Entropy with Equality. *Commun Math Phys* 246(2):359–374
- [6] Koashi M, Imoto N (2002) Operations that do not disturb partially known quantum states. *Phys Rev A* 66:022,318
- [7] Kraus K (1971) General state changes in quantum theory. *Ann Phys (NY)* 64(2):311 – 335
- [8] Kümmerer B, Nagel R (1979) Mean ergodic semigroups on W^* -algebras. *Acta Sci Math* 41(1-2):151–159
- [9] Kuramochi Y (2015) Minimal sufficient positive-operator valued measure on a separable Hilbert space. *J Math Phys* 56(10):102205
- [10] Kuramochi Y (2017) Minimal sufficient statistical experiments on von neumann algebras. *J Math Phys* 58(6):062203
- [11] Łuczak A (2014) Quantum sufficiency in the operator algebra framework. *Int J Theor Phys* 53(10):3423–3433
- [12] Petz D (1986) Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra. *Commun Math Phys* 105(1):123–131
- [13] Petz D (1988) Sufficiency of channels over von Neumann algebras. *Q J Math* 39(1):97–108
- [14] Takesaki M (1979) *Theory of Operator Algebras I*. Springer
- [15] Umegaki H (1959) Conditional expectation in an operator algebra, III. *Kodai Math Sem Rep* 11(2):51–64
- [16] Umegaki H (1962) Conditional expectation in an operator algebra. IV. Entropy and information. *Kodai Math Sem Rep* 14(2):59–85