

A new family in the stable homotopy groups of spheres

広 大 理 岡 七 郎

球面の k 次元安定ホモトピー群を G_k であらわす。 p は素数 ≥ 5 とし、 $q = 2(p-1)$ とする。

G_* の p -成分には、戸田[8] - Adams[1] の α -列 $\{\alpha_r \in G_{rq-1}\}$, Smith[6] - 戸田[9] の β -列 $\{\beta_r \in G_{(rp+r-1)q-2}\}$ という二つの無限列の存在が知られており、 $(p^2+1)q-4$ 次元以下ではこれらの元の結合(合成)しかあらわれない([7], [2])。次元が $(p^2+p)q-2$ から $(2p^2+1)q-6$ までの間も殆んど同様に新たに $\beta_i^r \varepsilon'$, $\beta_i^r \pi_i$ ($1 \leq i \leq p-3$) という元が加わる (cf. [2])。ここに ε' , π_i の次元は $(p^2+1)q-3$, $(p^2+(i+2)p+i+1)q-5$ であり、位数はともに p 。 Toda bracket によって、 $\varepsilon' = \{\beta_i^p, \alpha_i, \alpha_i\}$, $\pi_i = \{\beta_i \beta_{p+i}, \alpha_i, \alpha_i\}$ と書かれる。 π_i の定義されるための条件 $\alpha_i \beta_i \beta_{p+i} = 0$ は最近の[5]において証明された。

上記の中間の $(p^2+1)q-3$ から $(p^2+p)q-3$ までの次元には、 ε' , $\varepsilon_i \in G_{(p^2+i)q-2}$ ($1 \leq i \leq p-1$), $\varphi \in G_{(p^2+p)q-3}$ という元がある

われる。 ε_i は整数 p で $\varepsilon_i = \{\varepsilon_{i-1}, p, \alpha_i\}$ で定義され、
 $\alpha_i \varepsilon_{p-2} = 0$ なる関係が知られる。 φ は整数 p^2 で、 $\varphi \in \{\varepsilon_{p-2}, \alpha_i, \alpha_1\}$ 、
 $p\varphi = \alpha_i \varepsilon_{p-1}$ を満たす [2]。また、 ε_{p-1} は Smith の β_p と (整数
 $(\neq 0 \bmod p)$ 倍元の意味で) 一致する。本論の目的はこの族
 $\{\varepsilon_i\}$ の孤立元を数えることである。

定理 A 次の条件を満たす $p_{t,r} \in G_*$, $t \geq 1$, $1 \leq r \leq p-1$, が存
 在する : $\deg p_{t,r} = (tp^2 + (t-1)p + r)q - 2$, order of $p_{t,r} = p$,
 $p_{1,r} = \varepsilon_r$, $p_{t,p-1} = \beta_{tp}$, $p_{t,r} \in \{p_{t,r-1}, p, \alpha_1\}$.

定理 A' さらに $t = sp$ のとき、次の条件を満たす $p'_{sp,r} \in$
 G_* , $s \geq 1$, $1 \leq r \leq 2p-2$, が存在する : $\deg p'_{sp,r} = (sp^3 + sp^2 - 2p + r + 1)q - 2$,
 order of $p'_{sp,r} = p$, $p'_{sp,r} = p_{sp,r-p+1}$ for $r \geq p$, $p'_{sp,r} \in$
 $\{p'_{sp,r-1}, p, \alpha_1\}$.

定理 A は以下に述べるのと殆んど同じ方法で最近 Smith が
 得ている。彼の場合、 $p_{t,r}$ の構成が少し弱い形なので、定理
 A の最後の条件及び定理 A' に対応する結果は出ていないよう
 である。また、これらに関連した $\text{Ext}_{BP^*(BP)}^{2,*}(BP^*, BP^*)$ について
 の Zuhler の最近の研究がある。

§1 元の構成. 有限CW複体 (spectrum) X, Y について $\{X, Y\}_t = \text{Dir. lim}_N [S^{N+t}X, S^N Y]$, 特に $A_t(X) = \{X, X\}_t$ と記す. 直和 $A_*(X) = (\sum_t A_t(X))$ は写像の結合から導かれる積により graded ring になる. 特に X が Z_p -space (or -spectrum) [9], すなわち $i_X \in A_0(X)$ の位数が p , の時 $A_*(X)$ は体 Z_p 上の vector 空間になる.

$M = S^0 \cup_p e^1$ (stable complex) とし, $S^0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} S^1$ を cofiber ing とする. $A_1(M) = Z_p$ であり, この生成元 α は β^1 で detect される [10]. この時, α -列 $\{\alpha_r\}$ は $\alpha_r = \pi \alpha^r i$ で定義される. α^r の mapping cone を $X(r) = M \cup_{\alpha^r} CS^{r+1}M$ とする. $M \xrightarrow{j_r} X(r) \xrightarrow{k_r} S^{r+1}M$ を cofiber ing とし, $j_r = j_r i : S^0 \rightarrow X(r)$, $k_r = \pi k_r : X(r) \rightarrow S^{r+1}$ とする. 特に, $X(1)$ は Smith 予想の $V(1)$ に一致し, $\beta \in A_{(p+1)/2}(X(1))$ をその mapping cone が $V(2)$ であるものとする [9] (Smith [6] は β の代りに $\tilde{\psi}$ という記号を使っている). この時 β -列 $\{\beta_r\}$ は $\beta_r = k_1 \beta^r i_1$ で定義される. 又, $\beta(r) = k_1 \beta^r j_1 \in A_*(M)$ とする. $\beta_r = \pi \beta(r) i$ である.

$A_*(M)$ についての [3] の結果からただちに次を得る.

命題 1 次の条件を満たす $\varepsilon \in A_*(M)$ が存在する: (i) ε は indecomposable, (ii) $\deg \varepsilon = (p^2+1)/2 - 1$, (iii) $\beta_{(p)} = \varepsilon \alpha^{p-2} = \alpha^{p-2} \varepsilon$, (iv) $\varepsilon \alpha^{p-1} = \alpha^{p-1} \varepsilon = 0$, $\{\alpha^{p-1}, \varepsilon, \alpha^{p-1}\} \neq 0$, (v) $\varepsilon_r = \pi \varepsilon \alpha^{r-1} i$.

さて, $A: S^q X(r) \rightarrow X(r+1)$ と $Aj_r = j_{r+1}\alpha$, $k_r = k_{r+1}A$ とする自然に定義された map とする。次の結果は命題 1 と $(\alpha_*(X(r)))$ で解釈したものである。証明は [4] を参照されたい。

定理 2 次の条件を満たす $R(r) \in \mathcal{A}_{(p^2+p)q}(X(r))$, $1 \leq r \leq p-1$, が存在する: $R(1) = \beta^p$, $AR(r-1) = R(r)A$, $k_r R(r) j_r = \varepsilon \alpha^{p-1-r}$.

なお, 命題 1 の (i) から, かかる $R(p)$ は存在しないことがわかる。

定義 3 $p_{t,r} = l_{p-r} R(p-r)^t i_{p-r}$.

あるいは, この元 $p_{t,r}$ は定理 A の条件を, order of $p_{t,r} = p$ のところを $p_{t,r} = 0$ におきかえて, すべて満たす。従って, 残るは $p_{t,r} \neq 0$ の証明である。

戸田 [9] は, $(\alpha_*(X(1)))$ において, β と $\beta\delta_i - \delta_i\beta$ ($\delta_i = j_i k_i \in \mathcal{A}_{-q-1}(X(1))$) が commute する, ことを証明したが, その analogy で, $\mathcal{A}_*(X(p-1))$ において $R(p-1)$ と $R(p-1)\Delta - \Delta R(p-1)$ ($\Delta = j_{p-1} k_{p-1} \in \mathcal{A}_{-(p-1)q-1}(X(p-1))$) が commute する, ことが証明できる。このことから $R(p-1)^p \Delta = \Delta R(p-1)^p$ なる関係式を得る。さらに, $S^{-1}X(s) \xrightarrow{j_r k_s} S^{sq} X(r) \xrightarrow{A^s} X(r+s)$ なる cofiberings の存在に注意すれば, 次の結果を得る。

定理 4 次の条件を満たす $R'(r) \in \mathcal{A}_{(p^3+p^2)q}(X(r))$, $1 \leq r \leq 2p-2$, が存在する: $R'(r) = R(r)^p$ for $1 \leq r \leq p-1$, $AR'(r-1) = R'(r)A$.

定義 5 $p'_{sp,r} = l_{2p-r-1} R'(2p-r-1)^s i_{2p-r-1}$.

これより、定理 A' は、 $f'_{sp,r} \neq 0$ のもとで、たゞちに証明される。

命題 1 の元 ε は unique ではない。戸田 [9] の operation θ を用いて、さらに条件 $\theta(\varepsilon) = 0$ を追加して ε は Z_p だけの自由度がある。このような ε を 1 つ固定して、定理 2 の $R(r)$ に条件 $\theta(R(r)) = 0$ を追加すれば $R(r)$ は unique である。さらに ε を上記の自由度 Z_p 内で動かせば、 $R(r)$ ($r \leq p-2$) は動かず、 $R(p-1)$ は Z_p だけ動く。しかし、定義 3 の元 $p_{t,r}$ は ε (従って $R(p-1)$) のとり方によらず一定であることがわかる。

§ 2. Smith's method. M の (reduced) complex bordism module $\tilde{U}_*(M)$ は U_* -module として $(U_*/pU_*)\mu$, $\mu \in \tilde{U}_*(M)$, に等しい。 $[P] \in U_{2p-2}$ は Milnor manifold で代表される元とすると $\alpha_*: \tilde{U}_*(S^i M) \rightarrow \tilde{U}_*(M)$ は $\alpha_*(S^i \mu) = [P]\mu$ で決まる [6]。したがって、 $\tilde{U}_*(X(r)) = (U_*/(p, [P]^r)) \cdot \xi(r)$, $\deg \xi(r) = 0$, を得る。但し、 $(p, [P]^r)$ は p と $[P]^r$ で生成される U_* の ideal をあらわす。 $Y(r)$ は $X(r)$ の $rq+1$ skeleton とすると、 $U_*(Y(r)) = (U_*/(p, [P]^r)) \cdot \eta(r) + U_* \cdot \tau(r)$ (直和), $\deg \eta(r) = 0$, $\deg \tau(r) = rq+1$, を得る。 $Y(1)$ は [6] の $V(1/2)$ のことであり、これに関する MU-Hurewicz 準同型についての Smith [6] の研究の analogy として次の結果を得る。

命題 6 MU -Hurwitz 準同型 $h: \pi_*(Y(r)) \rightarrow U_*(Y(r))$ の像は次の元に限る: $x[P]^j \gamma(r)$ ($x \in \mathbb{Z}_p$, $0 \leq j < r$), $\gamma \tau(r)$ ($\gamma \in \mathbb{Z}$).

considering $Y(r) \rightarrow X(r) \xrightarrow{f_r} S^{rq+2}$ の $\pi_*()$ と $U_*()$ に関する exact sequences と h について, 命題 6 から次の結果を得る.

命題 7 $\varphi \in A_{2k}(X(r))$ が $\varphi_* \xi(r) \in (p, [P]) \xi(r)$ を満たせば $\varphi_t = f_r \varphi^t i_r \in G_{2kt-rq-2}$ は non zero で次数は p .

次の結果は Smith による.

命題 8 $\beta \in A_{(p+1)q}(X(1))$ は $\beta_*(S^{q+1} \xi(1)) = [V] \xi(1)$ で決まられる. ここに $[V]$ は $2p^2-2$ 次元の Milnor manifold で代表される U_* の生成元.

命題 7 と 8 からただちに, β -列 $\{\beta_r\}$ について $\beta_r \neq 0$ が従う. 定理 2 の元 A が $A_*(S^q \xi(r)) = [P] \xi(r+1)$ を満たすことと命題 8 から

$$\begin{aligned} \text{命題 9} \quad R(r)_*(S^{(r+p)q} \xi(r)) &\equiv [V]^p \xi(r) \pmod{U_*[P] \xi(r)}, \\ R'(r)_*(S^{(p^3+p^2)q} \xi(r)) &\equiv [V]^{p^2} \xi(r) \pmod{U_*[P] \xi(r)}. \end{aligned}$$

命題 7 と 9 より, $\beta_{t,r} \neq 0$, $\beta'_{sp,r} \neq 0$ が従い, 以上述べた定理 A, A' の証明が完了する.

以上の結果についてのくわしい証明, 及びこれに関連した $A_*(M)$ での結果については [4] を参照されたい.

References

- [1] J. F. Adams, On the groups $J(X)$ - IV, *Topology* 5 (1966), 21-71.
- [2] S. Oka, On the stable homotopy groups of spheres I, II, *Hiroshima Math. J.* 1(1971), 305-337; 2(1972), 97-161.
- [3] S. Oka, On the stable homotopy ring of Moore spaces, to appear in *Hiroshima Math. J.* 4 (1974).
- [4] S. Oka, A new family in the stable homotopy groups of spheres, to appear in *Hiroshima Math. J.* 5 (1975).
- [5] S. Oka and H. Toda, Non-triviality of an element in the stable homotopy groups of spheres, to appear in *Hiroshima Math. J.* 5 (1975).
- [6] L. Smith, On realizing complex bordism modules. Applications to the stable homotopy of spheres, *Amer. J. Math.* 92(1970), 793-856.
- [7] H. Toda, p -Primary components of homotopy groups IV. Compositions and toric constructions, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A* 32(1959), 288-332.
- [8] H. Toda, On unstable homotopy of spheres and classical

groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 46(1960), 1102-1105.

[9] H. Toda, Algebra of stable homotopy of Z_p -spaces and applications, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 197-251.

[10] N. Yamamoto, Algebra of stable homotopy of Moore space, J. Math. Osaka City Univ. 14(1963), 45-67.