

2 次元動的破壊の安定性

中西 秀 (Keio Univ.)¹

J.S. Langer (ITP, UCSB)

E.S.C. Ching (CUHK)

2次元モードⅠ亀裂の動的安定性を調べるために、亀裂線上のストレス分布を計算した。用いたのは、亀裂先端部に凝集力を入れた連続体モデルである。その結果、亀裂線上 ($y=0$) での $\sigma_{xx}(x, y=0)/\sigma_{yy}(x, y=0)$ の値は x によらず進展速度 v のみの関数で、いつも 1 よりも大きいことが示された。

1 背景

最近、直線亀裂の進行が動的に不安定になるのではないかという証拠が、実験 [1, 2] やシミュレーション [3, 4] によって見つかっている。理論的な解析としては、Yoffe[5] が速度 v で進行している亀裂先端のストレスの発散部分を計算し、ストレスの周方向の成分の最大角が、 $v \approx v_R$ (v_R : Rayleigh 速度) 以上で進行方向に対して 60° にシフトすることを指摘した。また、Cotterell と Rice[6] は準静的直線亀裂の安定性を、亀裂先端での σ_{xx} の正則部分 T :

$$\sigma_{xx}(x, y=0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi|x|}} + T + O(|x|^{1/2})$$

を用いて議論した。亀裂はモードⅡの応力拡大係数 K_{II} がゼロになる方向に進行すると仮定して、 $T > 0$ のときに直線亀裂の進行が不安定になるという結果を得た。

しかしながら、これらの研究は亀裂のダイナミクスを扱っておらず、また、ストレスが亀裂先端で発散するモデルを用いているので、実際の亀裂の進展との関係は不明確である。そこで我々は、実際の亀裂のダイナミクスを直接調べる第一歩として、凝集力を入れたストレスの発散の無いようなモデルで、亀裂面でのストレスを計算した。

2 2次元弾性体

用いたモデルは、2次元弾性体の変位ベクトル $\vec{u}(x, y)$ は、変位ポテンシャル $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ を用いて

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

のように表される。ストレスは、同様にポテンシャルの2階微分を用いて

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx} \equiv \frac{\sigma_{xx}}{2\mu} &= \left(\frac{\kappa}{2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}; \\ \Sigma_{yy} \equiv \frac{\sigma_{yy}}{2\mu} &= \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\kappa}{2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}; \\ \Sigma_{xy} \equiv \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

¹present address: Department of Physics, Kyushu University

と表される。ここで、 μ はずれ弾性係数で、 κ は縦音波と横音波の音速の比の2乗。

ここで、亀裂を生じさせるための外部ストレスを加えると、変位ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, t) &= \frac{1}{2} (\epsilon_{\infty}^{(1)} x^2 + \epsilon_{\infty}^{(2)} y^2) + \phi(x, y, t), \\ \Psi(x, y, t) &= \psi(x, y, t).\end{aligned}$$

ここで、 $\epsilon_{\infty}^{(1)}$ と $\epsilon_{\infty}^{(2)}$ を含む項は外部ストレス

$$\Sigma_{\infty}^{xx} \equiv \left(\frac{\kappa}{2}\right) \epsilon_{\infty}^{(1)} + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) \epsilon_{\infty}^{(2)}, \quad \Sigma_{\infty}^{yy} \equiv \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) \epsilon_{\infty}^{(1)} + \left(\frac{\kappa}{2}\right) \epsilon_{\infty}^{(2)}$$

を表す。すると、関数 ϕ と ψ は、波動方程式

$$\ddot{\phi} = \kappa \nabla^2 \phi; \quad \ddot{\psi} = \nabla^2 \psi.$$

を満たす。ここで、横波の音速を1とスケールした。

亀裂は、 x 軸に沿って $-x$ 方向に速さ v で進行していると仮定し、亀裂先端を原点に固定した亀裂と共に動く座標系で考える。すると、定常解は

$$\beta_l^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \quad \beta_t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad \text{ただし} \quad \beta_l^2 \equiv 1 - \frac{v^2}{\kappa}; \quad \beta_t^2 \equiv 1 - v^2$$

を満たし、その一般解は

$$\phi^{[\pm]}(x, y) = \int \frac{dk}{2\pi} \hat{\phi}^{[\pm]}(k) e^{\mp \beta_l |k| y + i k x}, \quad \psi^{[\pm]}(x, y) = \int \frac{dk}{2\pi} \hat{\psi}^{[\pm]}(k) e^{\mp \beta_t |k| y + i k x}$$

と表される。ここで $[\pm]$ の添字は、解がそれぞれ上半面及び下半面に対応することを示す。

3 ストレス場

問題の対称性より、

$$\begin{aligned}U_S(x) &\equiv \frac{1}{2} (u_x^{[+]}(x, 0) - u_x^{[-]}(x, 0)) = 0; \\ \delta \Sigma_{yy}(x) &\equiv \frac{1}{2} (\Sigma_{yy}^{[+]}(x, 0) - \Sigma_{yy}^{[-]}(x, 0)) = 0; \\ \Sigma_{xy}(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

となることがわかるが、これより

$$\hat{\phi}_S(k) \equiv \frac{1}{2} [\hat{\phi}^{[+]}(k) - \hat{\phi}^{[-]}(k)] = 0; \quad \hat{\psi}_S(k) \equiv \frac{1}{2} [\hat{\psi}^{[+]}(k) + \hat{\psi}^{[-]}(k)] = 0$$

を示すことが出来る。

一方、

$$\hat{\phi}_N(k) \equiv \frac{1}{2} [\hat{\phi}^{[+]}(k) + \hat{\phi}^{[-]}(k)]; \quad \hat{\psi}_N(k) \equiv \frac{1}{2} [\hat{\psi}^{[+]}(k) - \hat{\psi}^{[-]}(k)]$$

によって定義される量は、亀裂の開口変位

$$U_N(x) \equiv \frac{1}{2} [u_y^{[+]}(x, 0) - u_y^{[-]}(x, 0)]$$

の Fourier 変換によって

$$\hat{\phi}_N(k) = \frac{\beta_0^2}{\beta_l} \frac{2}{v^2} \frac{1}{|k|} \hat{U}_N(k); \quad \hat{\psi}_N(k) = \frac{2i}{v^2} \frac{1}{k} \hat{U}_N(k)$$

のように表される。

これらの結果を用いると、亀裂面でのストレスの Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{xx}(k, y=0) &= \Sigma_{\infty}^{xx} 2\pi\delta(k) + \left\{ \left[-\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) \beta_l^2 \right] \frac{\beta_0^2}{\beta_l} + \beta_t \right\} \frac{2}{v^2} |k| \hat{U}_N(k) \\ \hat{\Sigma}_{yy}(k, y=0) &= \Sigma_{\infty}^{yy} 2\pi\delta(k) + \left\{ \left[-\left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) + \left(\frac{\kappa}{2}\right) \beta_l^2 \right] \frac{\beta_0^2}{\beta_l} - \beta_t \right\} \frac{2}{v^2} |k| \hat{U}_N(k) \end{aligned}$$

のように求めることが出来る。これより直ちに、亀裂線上 ($x=0$) でのこれらのストレスの比は

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_{xx}(x, y=0) - \Sigma_{\infty}^{xx}}{\Sigma_{yy}(x, y=0) - \Sigma_{\infty}^{yy}} &= \frac{\left[-\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) \beta_l^2 \right] \frac{\beta_0^2}{\beta_l} + \beta_t}{\left[-\left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) + \left(\frac{\kappa}{2}\right) \beta_l^2 \right] \frac{\beta_0^2}{\beta_l} - \beta_t} \\ &\approx 1 + \frac{\kappa^2 + 1}{2\kappa(\kappa - 1)} v^2 \quad (v \ll 1) \end{aligned}$$

のように求められる。

これは、 $v=0$ で 1 となる単調増大関数で、Rayleigh 速度で発散する。亀裂先端付近では、 Σ_{yy} は限界ストレス程度の大きさになっているので Σ_{∞} は無視できるから、これは $\Sigma_{xx} > \Sigma_{yy}$ となっていることを示している。

この結果は $v > 0$ で直線亀裂がいつも不安定であることを強く示唆する。

参考文献

- [1] J. Fineberg, S.P. Gross, M. Marder, and H.L. Swinney, Phys. Rev. Lett. **67**, 457, (1991); Phys. Rev. B **45**, 5146 (1992).
- [2] S.P. Gross, J. Fineberg, M. Marder, W.D. McCormick, and H. Swinney, Phys. Rev. Lett. **71**, 3162 (1993).
- [3] F. Abraham, D. Brodbeck, R.A. Rafey, and W.E. Rudge, Phys. Rev. Lett. **74** 272 (1994). See also B.L. Holian and R. Ravelo, Phys. Rev. B **51**, 275 (1995).
- [4] M. Marder and X. Liu, Phys. Rev. Lett. **71**, 2417 (1993).
- [5] E. Yoffe, Phil. Mag. **42**, 739 (1951).
- [6] B. Cotterell and J.R. Rice, Int. J. Fracture **16**, 155 (1980).