

セルバーグ型ゼータ関数の特殊値について

東工大・理, 高瀬 幸一 (Koichi Takase)

広く信じられているように, 代数体 K の Dedekind zeta 関数 $\zeta_K(s)$ の $0 < m \in \mathbb{Z}$ での特殊値は, 次のように書けると予想されている; $\zeta_K(m) = R \cdot P \cdot A$. ここで R : regulator, P : period, A : algebraic part と呼ばれて, A は代数的数, $R = \text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{R}^r)$ $r = \text{ord}_{s=1-m} \zeta_K(s)$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^r$: lattice である. 典型的な例は,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=1} \zeta_K(s) &= R \cdot P \cdot A \\ R &= \text{vol}(\mathcal{O}_K \backslash \mathbb{R}^{r_1+r_2-1}), \quad r_1+r_2-1 = \lim_{s \rightarrow 0} \zeta_K(s) \\ P &= 2^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2}, \quad A = \frac{h}{w} \cdot |D|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ここで, $r_1 = \# \{ \text{real place of } K \}$, $r_2 = \# \{ \text{complex place of } K \}$, $\mathcal{O}_K$: K の単数群, h : K の類数, $w = \# \{ 1 \text{ の } n \text{ 乗根 } \in K \}$, D : K の判別式. 本講では, Selberg zeta 関数の特殊値が, 同様に, regulator と period の積に分解される, ということを主張する.

§1. 準備.

Selberg zeta 関数は, $\mathbb{R}$ -rank = 1 の半単純 Lie 群に対して構成されているが (Gangolli [3], Wakayama [7, 8]), ここでは, $SU(1, g+1)$ ($g > 0$) について考える.

$$1) \underline{SU(1, g+1)} \quad J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -I_g & \end{pmatrix} \quad (g > 0) \quad z \in z,$$

$$G = SU(1, g+1) = \{g \in SL(g+2, \mathbb{C}) \mid g^* J g = J\} \quad (g^* = {}^t \bar{g})$$

$$K = \{g \in G \mid g^* g = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & -d \\ c & -b & a \end{pmatrix} \in G \right\} \subset G : \text{極大コンパクト部分群}$$

$$z \in z, \quad G = K \cdot A_g \cdot N : \text{岩澤分解} \quad z \ni z. \quad z = z''$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{1}{2} b \cdot b^* + \sqrt{-1}t \\ 0 & I_g & b^* \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C}^g, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad A_g = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & I_g & \\ & & a^{-1} \end{pmatrix} \mid 0 < a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = \{X \in \mathfrak{sl}(g+2, \mathbb{C}) \mid X^* J + J X = 0\}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad z \in z,$$

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{g+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\} \subset \mathfrak{g} : \text{Cartan subalgebra}$$

$$\lambda_j \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}^* \quad \text{s.t.} \quad \lambda_j \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{g+1} \end{pmatrix} = a_j \quad \text{for } j = 0, 1, \dots, g+1$$

$$\Delta = \{ \lambda_i - \lambda_j \mid i, j = 0, 1, \dots, g+1, i \neq j \} : \text{root system of } (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathcal{R}_{\mathbb{C}})$$

$$\{ \alpha_j = \lambda_j - \lambda_{j+1} \mid j = 0, 1, \dots, g \} : \text{fundamental root system of } \Delta$$

$$\mathcal{R}_g = \text{Lie}(A_g) = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{g}$$

$$P_+ = \{ 0 < \lambda \in \Delta \mid \lambda(\mathcal{R}_g) \neq 0 \}$$

$$= \{ \lambda_0 - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_{g+1}, \lambda_0 - \lambda_{g+1} \mid j = 1, \dots, g \}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{0 < \lambda \in \Delta} \lambda = - \sum_{j=0}^{g+1} j \cdot \lambda_j$$

$z \ni z.$

$$G \ni x = \kappa(x) \cdot \exp H(x) \cdot n \quad \text{for } \kappa(x) \in K, H(x) \in \mathcal{R}_g, n \in N \quad z \ni z.$$

Haar measure δ 次のように定める;

$$d_K: \text{Haar measure on } K \text{ s.t. } \int_K d_K(k) = 1$$

$$d_{A_f}: \text{ " " on } A_f \text{ s.t. } d_{A_f} \left(\begin{pmatrix} a & & \\ & I_2 & \\ & & a^{-1} \end{pmatrix} \right) = \frac{da}{a}$$

$$d_N: \text{ " " on } N \text{ s.t. } \int_N e^{-2PH(n^*)} d_N(n) = 1$$

$$d_G: \text{ " " on } G \text{ s.t. } d_G(x) = e^{2PH(x)} d_N(n) d_{A_f}(a) d_K(k)$$

$$\text{for } x = kan \in G = K \cdot A_f \cdot N$$

2) 既約ユニタリ表現 $K \cong U(2+1)$ で, K の 1 次元表現は,

$$\delta_r: K \ni \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & -d \\ c & -b & a \end{pmatrix} \mapsto (a+c)^{-r} \in \mathbb{C}^* \quad \text{for } r \in \mathbb{Z}$$

により尽くされる (同型 $K \cong U(2+1)$ により, δ_r は $\det^r$ になる)。

G の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類全体を $\hat{G}$ とし,

$$\hat{G}(\delta_r) = \{ \pi \in \hat{G} \mid m(\delta_r, \pi|_K) > 0 \text{ (実は } m(\delta_r, \pi|_K) = 1) \}$$
 とおく

($m(\alpha, \beta) = \beta$ における α の重複度)。 $\hat{G}(\delta_r)$ は, 次のように

して, $\mathbb{C}$ の部分集合と同一視される (c.f. Kraljević [5]);

また, $\lambda \in \mathcal{O}_f^* \setminus \mathbb{C}$ に対して,

$$\varphi_{\lambda, r}(x) = \int_K e^{-(\lambda+P)H(x^{-1}k)} \cdot \delta_r(k) \cdot \bar{\delta}_r(\kappa(x^{-1}k)) d_K(k) \quad (x \in G)$$

とおく, $\varphi_{\lambda, r}$ は G 上の spherical function of type δ_r であり,

G 上の spherical function of type δ_r は, $\varphi_{\lambda, r}$ で尽くされる (c.f.

Warner [8] vol II P42)。 δ, τ ,

$$(\pi, H) \in \hat{G}(\delta_r) \Rightarrow \exists u \in H \text{ s.t. } |u|=1, \pi(k)u = \delta_r(k) \cdot u \text{ for } \forall k \in K$$

$\Rightarrow \varphi_{\pi, \delta_r}(x) = (\pi(x)u, u)$: spherical function of type δ_r

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathcal{O}_{\delta, \mathbb{C}}^* \text{ s.t. } \varphi_{\pi, \delta_r} = \varphi_{\lambda, r}$

$\Sigma = \Sigma'$, $\pi \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ により, $\hat{G}(\delta_r)$ は $\mathbb{C}$ の部分集合と同一視する。このとき

$$\hat{G}(\delta_r) = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subset \mathbb{C}$$

$$U_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} 1) \ 0 > \lambda^2 - \lambda_r^2 \in \mathbb{R} \\ 2) \ \operatorname{Re} \lambda > 0 \text{ or } \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \end{array} \right. \right\}, \quad \lambda_r = \begin{cases} \delta+1-|r| & \text{if } |r| < \delta+1 \\ 0 & \text{if } |r| \geq \delta+1, r \equiv \delta+1 \pmod{2} \\ 1 & \text{if } |r| \geq \delta+1, r \not\equiv \delta+1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$U_2 = \begin{cases} \emptyset & \text{if } r=0 \\ \{m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv r+\delta+1 \pmod{2}, r-(\delta+1) \leq m \leq \operatorname{Min}\{r-(\delta+1), 0\}\} & \text{if } r > 0 \\ \{m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv r+\delta+1 \pmod{2}, r+\delta+1 \leq m \leq \operatorname{Max}\{r+\delta+1, 0\}\} & \text{if } r < 0 \end{cases}$$

$$U_3 = \begin{cases} \{\delta+1\} & \text{if } r=0 \\ \emptyset & \text{if } r \neq 0 \end{cases}$$

となる。 G の自明な 1 次元表現は, $\delta+1 \in U_3$ に対応する。

$\pi \in \hat{G}$ の infinitesimal character は χ_π である, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の

Casimir operator Ω に対応し,

$$\chi_\pi(\Omega) = \frac{1}{4(\delta+2)} \cdot \left\{ \pi^2 + \frac{\delta}{\delta+2} r^2 - (\delta+1)^2 \right\} \text{ for } \pi \in \hat{G}(\delta_r) \subset \mathbb{C}$$

となる。

3) 離散系列表現 $\hat{G}_d = \{ \pi \in \hat{G} : 2\text{-重可積分} \}$ の Harish-Chandra parametrization を書き下すと, 次のようになる;

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mid e = \begin{pmatrix} e_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_\delta \end{pmatrix} \right\}$$

は, $\mathfrak{g}$ の compact Cartan subalgebra $\mathfrak{z}$

$$v_j \in b_c^* \text{ for } j=0, 1, \dots, g$$

$$\text{s.t. } v_0 \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} = a - c, \quad v_j \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} = e_j \quad (e = \begin{pmatrix} e_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_g \end{pmatrix}, j > 0)$$

2. $b < z$,

$$\Lambda^+ = \left\{ \sum_{j=0}^g m_j v_j \in b_c^* \mid 0 \neq m_j \in \mathbb{Z}, m_0 > m_1 > \dots > m_g \right\}$$

$$\Lambda^+ \ni \lambda \mapsto \pi_\lambda \in \hat{G}_d : \text{bijective (Harish-Chandra parametrization)}$$

2. $b < z$. G の Haar measure ε 1) z 定め t_2 ように取れば

$$\begin{aligned} & \text{formal degree of } \pi_\lambda \in \hat{G}_d \text{ for } \lambda = \sum_{j=0}^g m_j v_j \in \Lambda^+ \\ &= \frac{\pi^{g+1}}{2^g \cdot g!} \times (2\pi)^{-(g+1)} \cdot \prod_{0 \leq i < j \leq g} \frac{m_i - m_j}{j - i} \cdot \prod_{j=0}^g |m_j| \end{aligned}$$

2, Hecht-Schmid [4] 12 8 y, $\lambda = \sum_{j=0}^g m_j v_j \in \Lambda^+$ 12 $z \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_\lambda \in \hat{G}_d : \text{integrable} \Leftrightarrow |m_j| > g+1 \text{ for } j=0, 1, \dots, g$$

2. $b < z$.

$r \in \mathbb{Z}$ 12 $z \in \mathbb{Z}$,

$$\{\lambda \in \Lambda^+ \mid \pi_\lambda \in \hat{G}(S_r)\}_{\text{p.u.}} = \Lambda^+(S_r)$$

$$= \begin{cases} \left\{ \sum_{j=0}^g m_j v_j \in \Lambda^+ \mid \begin{array}{l} 0 < m_g \leq r - (g+1) \\ m_{g-j} = \frac{1}{2}(m_g + r - (g+1)) + j \text{ for } j=1, \dots, g \end{array} \right\} & \text{if } r > g+1 \\ \left\{ \sum_{j=0}^g m_j v_j \in \Lambda^+ \mid \begin{array}{l} 0 > m_0 \geq r + g+1 \\ m_j = \frac{1}{2}(m_0 + r + g+1) - j \text{ for } j=1, \dots, g \end{array} \right\} & \text{if } r < -(g+1) \end{cases}$$

2, $\lambda = \sum_{j=0}^g m_j v_j \in \Lambda^+(S_r)$ 12 $z \in \mathbb{Z}$, $\pi_\lambda \in \hat{G}(S_r) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\pi_\lambda = \begin{cases} m_\delta & \text{if } r > \delta+1 \\ m_0 & \text{if } r < -(\delta+1) \end{cases}$$

とある。

4) Paley-Wiener Theorem $\mathfrak{g}$ の Killing form は $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 2(\delta+2)\text{tr}(XY)$

で, $\theta \cdot X = -X^*$ とし, $\mathfrak{g}$ 上の norm は $|X|_{\theta}^2 = -B_{\mathfrak{g}}(X, \theta \cdot X)$ として

定め, $\mathfrak{g}$ は Euclidean space とする. $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta \cdot X = -X\}$ とお

く,

$$K \times \mathfrak{p} \ni (k, X) \mapsto k \cdot \exp X \in G : \text{bijective}$$

とあり, $G \ni x = k \cdot \exp X(x)$ for $k \in K, X(x) \in \mathfrak{p}$ となる,

$\sigma(x) = |X(x)|_{\theta}$ とする. $f \in C^{\infty}(G), 0 < p \in \mathbb{R}$ となる,

$$V_{0,r}^p(f) = \sup_{x \in G} (1 + \sigma(x))^r \cdot \omega_0(x)^{-\frac{2}{p}} \cdot |(Df)(x)| \quad \text{for } \begin{matrix} 0 \leq r \in \mathbb{R} \\ D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \end{matrix}$$

$$(\omega_0(x) = \int_K e^{-PH(x)} d_K(k)) \quad \text{とあり,}$$

$$C^p(G) = \{f \in C^{\infty}(G) \mid V_{0,r}^p(f) < \infty \text{ for } 0 \leq r \in \mathbb{R}, \forall D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

とおく, $C^p(G) \subset L^p(G), C^p(G) \subset C^{\delta}(G)$ かつ $p \leq \delta$ とある.

$r \in \mathbb{Z}$ となる,

$$C^p(G, \delta_r) = \{f \in C^p(G) \mid f(kx) = f(xk) = \delta_r(k)f(x) \text{ for } \forall k \in K\}$$

とおく.

$$V_{\delta+1} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\text{Re } \lambda| \leq \delta+1\} \quad \text{とおく.}$$

$$V_{\delta+1} \cap \hat{G}_a(\delta_r) = \{\pi \in \hat{G}_a(\delta_r) : \text{not integrable}\}$$

$\tilde{z} = z,$

$$J(r) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi: V_{g+1} \cup \hat{G}_d(S_r) \rightarrow \mathbb{C} : \text{well} \\ \text{s.t. 1) } \varphi: \text{holomorphic on } |\operatorname{Re} \lambda| < r+1 \\ \quad 2) \sup_{|\operatorname{Re} \lambda| < g+1} (1+|\lambda|)^{\alpha} \cdot |\varphi^{(n)}(\lambda)| < \infty \text{ for } 0 \leq \alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq n \in \mathbb{Z} \\ \quad 3) \varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda) \text{ for } \forall \lambda \in V_{g+1} \end{array} \right\}$$

とある。

$\mathcal{C}'(G, S_r) \ni f \xrightarrow{\sim} \hat{f} \in J(r)$: bijective (Paley-Wiener Theorem)

である。 $\sim = \mathcal{C}' \ni \lambda \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 12 F 7 $\mathcal{M}_{g, \mathbb{C}}^* = \mathbb{C} \ni$ 同 - 視 $\mathbb{C}$,

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(x) \cdot \varphi_{\lambda, r}(x) d_G(x) \quad \text{for } f \in \mathcal{C}'(G, S_r)$$

とある (c.f. Trombi [6], Wakayama [7] p603)。

§2. Selberg zeta 関数

以下, $r \in \mathbb{Z}$ を固定して,

$\Gamma \subset G$: torsion-free discrete subgroup s.t. $\Gamma \backslash G$: compact

(χ, Γ) : Γ の有限次元 $\mathbb{C}$ -表現

とする。

$J_h = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{g+1} \end{pmatrix} \in G \right\}$ は, G の non-compact Cartan subgroup と,

Γ の条件から, $1 \neq \forall \gamma \in \Gamma$ は hyperbolic (i.e. J_h の $\bar{\alpha}$ と G -共役) であ

り, $\Gamma_\gamma = \{x \in \Gamma \mid x\gamma = \gamma x\}$ は cyclic group となる。 $\gamma \sim \gamma^n$

$$P_\Gamma = \{ \{\gamma\}_\Gamma \in \operatorname{Conj}(\Gamma) \mid \Gamma_\gamma = \langle \gamma \rangle \}$$

: the set of the primitive hyperbolic conjugacy classes of Γ

$$1 \neq \gamma \in \Gamma \Rightarrow h(\gamma) = \begin{pmatrix} a(\gamma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a(\gamma) \end{pmatrix} \in J_h \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} 1) \gamma \sim_{\Gamma} h(\gamma) : G\text{-変換} \\ 2) |a(\gamma)| > 1 \quad (a(\gamma) \in \mathbb{C}) \end{array}$$

とおく。 $\alpha \in P_+$ の root vector $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とし、

$$Ad(h) \cdot X_\alpha = \xi_\alpha(h) \cdot X_\alpha \quad \text{for } \forall h \in J_h \quad (\xi_\alpha(h) \in \mathbb{C})$$

$$\text{(i.e. } \xi_\alpha(h) = a_i \cdot a_j^{-1} \text{ for } \alpha = \lambda_i - \lambda_j \in P_+, h = \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{l+1} \end{pmatrix} \in J_h)$$

とみる。

$$\langle P_+ \rangle = \left\{ \sum_{\alpha \in P_+} m_\alpha \cdot \alpha \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^* \mid 0 \leq m_\alpha \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\xi_\lambda = \prod_{\alpha \in P_+} \xi_\alpha^{m_\alpha} \quad \text{for } \lambda = \sum_{\alpha \in P_+} m_\alpha \cdot \alpha \in \langle P_+ \rangle$$

$$n(\lambda) = \# \left\{ (m_\alpha)_{\alpha \in P_+} \mid 0 \leq m_\alpha \in \mathbb{Z}, \lambda = \sum_{\alpha \in P_+} m_\alpha \cdot \alpha \right\} \quad \text{for } \lambda \in \langle P_+ \rangle$$

とおく。

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Gamma, r, \chi)$ に基く Selberg zeta 関数は、

$$Z_{\Gamma, r}(\chi, s)$$

$$= \prod_{\{\gamma\}_{\Gamma} \in P_r} \prod_{\lambda \in \langle P_+ \rangle} \det(1 - \chi(\gamma) \cdot \xi_\lambda(h(\gamma)^{-1}) \cdot \left(\frac{a(\gamma)}{|a(\gamma)|} \right)^r \cdot |a(\gamma)|^{-(s+\delta+1)})^{n(\lambda)} \\ \text{for } \operatorname{Re} s > \max\{\delta+1, |r|-(\delta+1)\}$$

により定義される (Gangolli [3], Wakayama [7])。

trace formula により、 $\Xi_{\Gamma, r}(\chi, s) = \frac{d}{ds} \log Z_{\Gamma, r}(\chi, s)$ は全 s -平面

に有理型の解析接続され、その pole は全て simple pole であり、その

位置と residue は次の通り。ここに $\mathcal{F}(1, 2)$ で定めた同一視

$$\hat{G}(S_r) \hookrightarrow \mathbb{C} \text{ を用いる。}$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } n \geq |r| + \delta + 1, n \equiv r + \delta + 1 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow m(n) = \dim \chi \cdot \text{vol}(\Gamma \backslash G) \cdot d\pi_\lambda \text{ for } \pi_\lambda \in \hat{G}_a \text{ s.t. } \lambda = n\nu_0 + \sum_{j=1}^g \left(\frac{n+|r|+g+1}{2} - j \right) \nu_j \in \Lambda^+$$

$d\pi_\lambda$: formal degree of π_λ

このとき, $m(n) = m(\pi_\lambda, \text{Ind}_\Gamma^G \chi)$ if $n > g+1-|r|$ 又, 常に $m(n) \in \mathbb{Z}$.

$|r| > g+1$ のとき

	pole	residue
(A)	$\lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\lambda^2 - \lambda_r^2 < 0, \lambda \neq 0$	$m(\lambda, \text{Ind}_\Gamma^G \chi)$
(B)	0	$2 \cdot m(0, \text{Ind}_\Gamma^G \chi)$
	$-n \in \mathbb{Z}$ s.t. $1 < n \leq r - (g+1)$ $n \equiv r + g + 1 \pmod{2}$	$2 \cdot m(\pi, \text{Ind}_\Gamma^G \chi)$ for $\pi \in \hat{G}_a(S_r) \subset \mathbb{C}$ s.t. $ \pi = n$
(C)	$-n \in \mathbb{Z}$ s.t. $n \geq r + g + 1$ $n \equiv r + g + 1 \pmod{2}$	$(-1)^g \cdot 2 \cdot m(n)$
	± 1 (only if $r \equiv g \pmod{2}$)	$m(\pi, \text{Ind}_\Gamma^G \chi) \pm \dim \chi \cdot \text{vol}(\Gamma \backslash G) \cdot d\pi \in \mathbb{Z}$ for $\pi \in \hat{G}_a(S_r) \subset \mathbb{C}$ s.t. $ \pi = 1$ $d\pi$: formal degree of π

$0 < |r| \leq g+1$ のとき 上の (A), (B), (C) に加えて, $|r| < g+1$ のときは,

pole	residue
$\pm(g+1- r)$	$m(\pi, \text{Ind}_\Gamma^G \chi)$ for $\pi \in \hat{G}_a(S_r) \subset \mathbb{C}$ s.t. $ \pi = g+1- r $

$r=0$ のとき 上の (A), (B), (C) に加えて,

pole	residue
$-(g+1)$	$(-1)^g \cdot 2 \cdot m(g+1) + m(\mathbb{1}_\Gamma, \chi)$
$g+1$	$m(\mathbb{1}_\Gamma, \chi)$

よって, $Z_{r,v}(\chi, s)$ は全 s -平面に有理型に解析接続され, その zero, pole の位置と order は上の表から与えられる。更に, 次の関数等式が成り立つ;

$$Z_{r,v}(\chi, -s) = Z_{r,v}(\chi, s) \cdot \exp\left\{\dim X \cdot \text{vol}(rG) \cdot \int_0^s M_r(\sqrt{s}) ds\right\}$$

ここに

$$M_r(t) = \frac{\pi}{(2^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{r}{2}!)^2} \cdot \frac{t}{2} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{r}{2}} \left\{ \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{r+\frac{r}{2}+1}{2} - j\right)^2 \right\} \times \begin{cases} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) : r \equiv 2 \\ \coth\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) : r \not\equiv 2 \end{cases}$$

は, Planchrel measure の weight function である。

$\hat{G}_\alpha(\delta_r)$ から生ずる $Z_{r,v}(\chi, s)$ の zero は, critical strip 内の trivial zero である。

§3. Selberg zeta 関数の特殊値.

§2 の記号を用いる。 $n \in \mathbb{Z}$ に對して,

$$J_n(s) = (2\pi)^{-1} \cdot \{4(\frac{r}{2}+2)\}^s \cdot \int_0^\infty (x^2 + n^2)^{-s} \cdot M_r(x) dx$$

は, $\text{Re } s > \frac{r}{2}+1$ で絶対収束し, 全 s -平面に有理型に解析接続され, $s = 1, 2, \dots, \frac{r}{2}+1$ で正則, $s = 1, 2, \dots, \frac{r}{2}+1$ に高々 simple pole を持つ。

$n_0 = \max\{\frac{r}{2}+1, |r| - (\frac{r}{2}+1)\}$, $u_0 = \frac{1}{4(\frac{r}{2}+2)} \cdot \{n_0^2 + \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}+2} r^2 - (\frac{r}{2}+1)^2\}$ とする。

$\mathcal{H}_\mathbb{C}$ の Casimir operator Ω と $u \geq u_0$ に對して, $\Omega - u$ は δ_r -isotypic component $(\text{Ind}_F^G \chi)(\delta_r)$ に作用させたもの $\in \Delta_{r,u}$ とし, $\Delta_{r,u}$ の functional determinant を $\det \Delta_{r,u}$ と書く。即ち, $\chi_\pi(\Omega - u) \leq 0$

for $\forall \pi \in \hat{G}(S_r)$ z^n (χ_π = infinitesimal character of π),

$$T(s, \Delta_{r,u}) = \sum_{\substack{\pi \in \hat{G}(S_r) \\ \text{s.t. } \chi_\pi(\Omega - u) \neq 0}} m(\pi, \text{Ind}_r^G \chi) \cdot |\chi_\pi(\Omega - u)|^{-s}$$

if, $\text{Re } s \gg 0$ z^n 絶対収束し, 全 s -平面へ有理型に解析接続し,

$s=0$ で正則になる z^n , $\det \Delta_{r,u} = \exp(-T'(0, \Delta_{r,u}))$ とする。

このとき, 次の定理が成り立つ;

定理 1 $n_0 < n \in \mathbb{Z}$ に對して, $u = \frac{1}{4(\delta+2)} \cdot \{n^2 + \frac{\delta}{\delta+2} \cdot r^2 - (\delta+1)^2\}$ と

おくと, $Z_{r,r}(\chi, n) = R \cdot P$ となる。ここで

$$P = \exp\{J'_n(0) \cdot \dim \chi \cdot \text{vol}(r \backslash G)\}$$

$$R = (\det \Delta_{r,u}) \cdot \prod_{\pi \in \hat{G}_u(S_r)} |\chi_\pi(\Omega) - u|^{-\dim \chi \cdot \text{vol}(r \backslash G) \cdot d_\pi}$$

定理 2 $r=0$ のとき, $s=\delta+1$ は $Z_{r,r}(\chi, s)$ の $m(\Pi_r, \chi)$ 位の zero である。

$$Z_{r,r}(\chi, s) = a \cdot (s - (\delta+1))^{m(\Pi_r, \chi)} + \dots$$

とおくと,

$$\begin{aligned} R &= \det \Delta_{0,0} \\ a &= R \cdot P \\ P &= (2\delta+2)^{m(\Pi_r, \chi)} \cdot \exp\{J'_{\delta+1}(0) \cdot \dim \chi \cdot \text{vol}(r \backslash G)\} \end{aligned}$$

証明 Fried [2] と同様の議論とする。それは, 次のような議論を含む。 $f \in C^1(G, S_r)$ に對して, trace formula は

$$\sum_{\pi \in \hat{G}(S_r)} m(\pi, \text{Ind}_F^G \chi) \cdot \hat{f}(\pi) = \sum_{\{x \mid x \in \text{Conj}(F)\}} \text{tr} \chi(x) \cdot \text{vol}(F_y \backslash G_y) \cdot \int_{G_y \backslash G} f(x^{-1} g x) dx$$

と書けるが, f とし, 熱方程式 $\Omega f = \frac{\partial f}{\partial t}$ ($t > 0$) の解を取る.

$\pi \in \hat{G}(S_r)$ で Fourier 変換すれば, $\frac{\partial \hat{f}(\pi)}{\partial t} = \chi_\pi(\Omega) \cdot \hat{f}(\pi)$ なるから,

$\hat{f}(\pi) = \alpha(\pi) \cdot \exp(\chi_\pi(\Omega) \cdot t)$ となるが, Paley-Wiener Theorem より,

$\exists f_t \in C^1(G, S_r)$ s.t. $\hat{f}_t(\pi) = \exp(\chi_\pi(\Omega) \cdot t)$ for $\forall \pi \in \hat{G}(S_r), \forall t > 0$.

このとき,

$$\begin{aligned} \text{trace formula の左辺} \times e^{-ut} &= \sum_{\pi \in \hat{G}(S_r)} m(\pi, \text{Ind}_F^G \chi) \cdot \exp\{\chi_\pi(\Omega - u) \cdot t\} \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{\chi_\pi(\Omega - u) > 0 \\ \text{finite sum}}} + \sum_{\chi_\pi(\Omega - u) < 0} m(\pi, \text{Ind}_F^G \chi) \cdot \exp\{\chi_\pi(\Omega - u) \cdot t\}}_{\text{put } H(t)} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

とし, $H(t)$ を $t > 0$ として Mellin 変換すると

$$\int_0^\infty H(t) \cdot t^{s-1} dt = \Gamma(s) \cdot T(s, \Delta_{r,u})$$

となる. $T'(0, \Delta_{r,u})$ を trace formula の右辺から計算して, 上の定理を得る.

§4. Dedekind zeta 関数の場合.

K を有限次代数体, $\zeta_K(s)$ を K の Dedekind zeta 関数, $D = D(K/\mathbb{Q})$

を K の絶対判別式としてみたとき, explicit formula と呼ばれる,

次のような等式が成り立つ (Weil [10]);

$$\sum'_{\zeta_K(w)=0} \bar{\Phi}(w) = F(0) \cdot \log |D| + 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \cosh\left(\frac{x}{2}\right) dx \\ - \sum_f \sum_{n>0} N(f)^{-\frac{n}{2}} \cdot \log N(f) \cdot \{F(\log N(f^n)) + F(-\log N(f^n))\} \\ + \sum_{v \mid \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}x\right) \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma'_v}{\Gamma_v} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}x \right) \right) dx$$

□ □ □

$$\bar{\Phi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{(s-\frac{1}{2})x} dx, \quad \Gamma_v(s) = \begin{cases} \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) & \text{if } v = \text{real place} \\ (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s) & \text{if } v = \text{complex place} \end{cases}$$

であり, $\sum'$ は $\zeta_K(s)$ の critical zero w 上の重複度を込めた和.

F とし, 熱方程式 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial t}$ の基本解

$$F(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{t}\right\} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

と取れば, $\bar{\Phi}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}u\right) = e^{-u^2 t}$. よ, $\sum$,

$$\text{explicit formula の左辺} \times e^{-\frac{t}{4}} = \sum_{\substack{\zeta_K(w)=0 \\ 0 < \operatorname{Re} w < 1, w = \frac{1}{2} + \sqrt{-1}u}} e^{-(\frac{1}{4} + u^2) \cdot t} \stackrel{\text{put}}{=} H(t)$$

$$\int_0^{\infty} H(t) \cdot t^{s-1} dt = 2 \cdot \Gamma(s) \cdot T(s, \Delta_K), \quad T(s, \Delta_K) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{\zeta_K(w)=1 \\ 0 < \operatorname{Re} w < 1, w = \frac{1}{2} + \sqrt{-1}u}} \left(\frac{1}{4} + u^2\right)^{-s}$$

$T(s, \Delta_K)$ は $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ で絶対収束し, 全 s -平面へ有理型に解析接続され, $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ に高々 simple pole をとく以外は正則である (証明は Delsarte [1] と同様). $T'(0, \Delta_K)$ を explicit formula の右辺から計算して, 次の等式を得る;

$$T'(0, \Delta_K) = -\log \operatorname{Res}_{s=1} \zeta_K(s) - \frac{1}{4} \log |D| + J'(0)$$

□ □ □

$$J(s) = \sum_{v=1}^{\infty} J_v(s) \quad J_v(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{4} + x^2\right)^{-s} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma'_v}{\Gamma_v} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}x \right) \right) dx$$

$\zeta = \zeta^v$, $\det \Delta_K \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-T'(0, \Delta_K))$ とおくとき, 冒頭に示した

$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta_K(s)$ の公式から, 次の定理を得る;

定理 3 $2^r \cdot (2\pi)^{r_2} \cdot R(K) \cdot \frac{h}{w} \cdot |D|^{-\frac{1}{4}} = (e^{J_1'(0)})^{r_1} \cdot (e^{J_2'(0)})^{r_2} \cdot \det \Delta_K$

ここで, $J_1 = J_{\text{real}}$, $J_2 = J_{\text{complex}}$, $R(K) = K$ の regulator.

§5. 結論.

定理 3 の両辺を, $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の構造^{のみ}で決まる部分とそうでない部分とに分ければ, 次のような対応関係が成り立つ;

$$2^r \cdot (2\pi)^{r_2} \longleftrightarrow (e^{J_1'(0)})^{r_1} \cdot (e^{J_2'(0)})^{r_2}, \quad R(K) \cdot \frac{h}{w} \cdot |D|^{-\frac{1}{4}} \longleftrightarrow \det \Delta_K \quad (*)$$

一方, 比例式

Dedekind zeta 関数: explicit formula

= Selberg zeta 関数: trace formula

が成り立つから, 定理 1, 2, 3 とその証明を比較して, 対応関係 (*) から, 定理 1, 2 において, Selberg zeta 関数の特殊値が, regulator R と period P の積に分解されたことを解釈するのが, 自然である。

References.

- [1] Delsarte, J.: Formules de Poisson avec reste.
J.Anal.Math. 18 (1960) 419-431
- [2] Fried, D.: Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds. Inv.Math. 84 (1986) 523-540
- [3] Gangolli, R.: Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one.
Illinois J.Math. 21 (1977) 1-42
- [4] Hecht, H.-Schmid, W.: On integrable representations of a semi-simple Lie groups. Math.Ann. 220 (1976) 147-149.
- [5] Kraljević, H.: Representations of the universal covering group of the group $SU(n,1)$.
Glasnik Matematički 8 (1973) 22-72
- [6] Trombi, P.C.: Harmonic analysis of $C^p(G, F)$ ($1 \leq p < 2$).
J.Funct.Anal. 40 (1981) 84-125
- [7] Wakayama, M.: Zeta function of Selberg's type for compact quotient of $SU(n,1)$ ($n \geq 2$).
Hiroshima Math.J. 14 (1984) 597-618
- [8] Wakayama, M.: Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles.
Hiroshima Math.J. 15 (1985) 235-295
- [9] Warner, G.: Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I, II
Springer-Verlag (1972)
- [10] Weil, A. : Sur les "formules explicites" de la theorie des nombres premiers.
Comm.Sem.Math.Univ. de Lund, Medd. Lunds Univ.
Math.Sem. Tome supplementaire (1952) 252-265