

# Splitting of Singular Fibers in Good Torus Fibrations

東大理. 上 正明 (Masaoaki Ue)

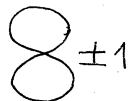
Good Torus Fibration  $f: M \rightarrow B$  は松本[1]により定義された 4次元多様体の class で次の性質をもつものである. ( $B$  は 3次元多様体)

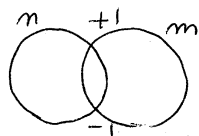
(\*)  $B$  のある孤立点集合  $\sigma$  について,  $f|_{f^{-1}(B-\sigma)}$   
 $\rightarrow B-\sigma$  は  $T^2$ -bundle.  $\forall x \in \sigma$   $f^{-1}(x)$  の各点  
~~で~~ local に  $f \sim z_1^m z_2^n$  or  $z_1^m \bar{z}_2^n: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$   
 とかける. このとき  $f^{-1}(x)$  (good singular fiber)  
 は互いに横断的に交わる (immersed) surface  
 (divisor) の union として書ける:

$$f^{-1}(x) = \sum_{i=1}^m m_i \Theta_i \quad m_i \in \mathbb{Z}^+, \text{ 但各 divisor } \Theta_i$$

には,  $M$  から自然に定まる orientation が入る.  $m_i$   
 は各 divisor の multiplicity.

$g.c.d(m_1, \dots, m_n) = 1$  のとき simple,  $>1$  のとき multiple fiber という. Good singular fiber の type は既に [1] により分類されている. 特に最も簡単な type は次の通り

$I_1^\pm$  丁度 1 点自己交又をもつ immersed  $S^2$   
(self intersection number は  $\pm 1$ ) で  
multiplicity は 1. 

$Tw^{(n,m)}$  (Twin) 2 点で交わる 2 つの embedded  $S^2$   
intersection number は一方  $+1$ , 他方  $-1$ .  
multiplicity は各  $n, m$ . 

Good Torus Fibration の diffeo type を決定すること  
が第 1 の問題であるが. 最初の出発点として次の  
条件をさらに仮定する.

$$(1) B \approx S^2$$

(2) multiple fiber なし.

以下この (1), (2) を常に仮定する.

この時さらに <sup>含まれる</sup> Singular fiber の type が上記の  $I_1^\pm$ ,  $TW$  のみの場合は既に分類されている.

Th0. [2][3]  $\sigma \neq 0$  のとき  $M \cong$

$$\pm (*\text{elliptic surface over } \mathbb{CP}^1) \# a S^2_{(\sim)} \times S^2,$$

$$\sigma = 0 \text{ のとき } L_m^{(\sim)} \# a S^2_{(\sim)} \times S^2.$$

但.  $\sigma$  は  $M$  の signature.  $S^2 \times S^2$  は non-trivial  $S^2$ -bundle over  $S^2$ ,  $L_m^{(\sim)}$  については [3] 参照.

Remark.. \*multiple fiber のない  $\mathbb{CP}^1$  上の elliptic surface の diffeotype は Kas-Moishezon により Euler 数のみで決定されることが知られている. 従って上記の  $M$  の diffeotype は Euler 数, signature, type  $w_2$ ,  $\pi_1$  ( $\sigma \neq 0$  なら  $\pi_1 = 1$ ) で完全に決定される. また上記の class は  $\mathbb{CP}^1$  上の楕円曲面を全て含む.

そこで他の good singular fiber をもつ case の diffeo type の決定が次の問題である。ここで  $\mathbb{CP}^1$  上の楕円曲面の diffeo type の Moishezon による決定方法を思い出してみると、まず、minimal な analytic singular fiber はすべて  $I_1^+$  型 fiber の和に分解可能 (特に deformable) であることを示し、 $I_1^+$  type ~~の~~ singular fiber のみをもつ  $\mathbb{CP}^1$  上の fibration の diffeo type の決定問題に帰着させた。(上記の  $\mathcal{M}$  はこれの拡張になっている)。そこでこの case にならって、一般の singular fiber (non-analytic) が  $I_1^\pm$ ,  $Tw$  型 fiber の和に分解可能かどうかを示すのが自然である。もしすべて分解可能ならすべて上の定理に帰着する。ところが実際には分解しえない fiber が存在する。この点が diffeo type を決定する際の第1障害になっている。

定義1 good singular fiber に次の性質をもつ divisor  $\Theta$  がいないとき reduced という。

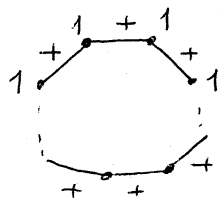
- (i)  $|\Theta \text{ の self-intersection } \#| \leq 1$
- (ii)  $\Theta$  は他の fibers と高々 2 点でのみ交わる。

Remark. 上記の  $\Theta$  があるときはその divisor は  
 blow-down して除えることが可能であり、新たな  
 fiber も good. えて (もとの fiber の regular nhd)  
 $\cong$  (新しい fiber の regular nhd)  $\# \pm \mathbb{CP}^2$  ( $|\Theta|^2 = 1$ )  
 or  $\# S \times S^2$  ( $|\Theta|^2 = 0$ ) とかける. ([1] 参照)

そこで以下 reduced な good singular fiberのみを考  
 へば十分である.

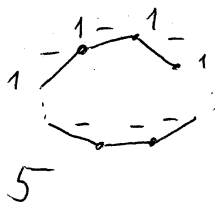
Proposition. reduced good singular <sup>(non-multiple)</sup> fiber は次の  
 type のものに限る. 但し. 下記の diagram は.  
 divisor に点. divisor 同志の交わりに線. 点止の数は  
 multiplicity. edge 上の符号は交わりの intersection  
 number を表す. (通常の dual graph と同じ)

type  $\tilde{A}_k^+$



$R^2$  の divisor

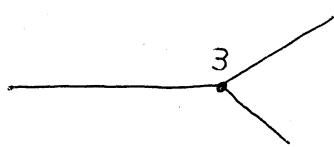
$\tilde{A}_k^-$



5

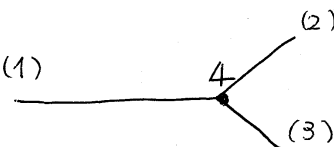
$\text{Twin}^{m,n}$  

(特に  $\tilde{A}_1^\pm = I_1^\pm$ )

type  $\tilde{E}_6^+$   3つのlinearな枝

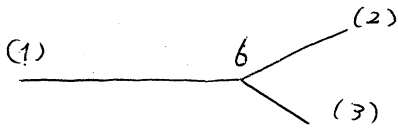
各枝は  $1 \xrightarrow{+} 2 \xrightarrow{+} 3$  or  $1 \xrightarrow{-} 3$  (但右端は上の multiplicity 3 の vertex に相当する).

type  $\tilde{E}_6^-$   $\tilde{E}_6^+$  の edge 上の sign の符号を一律にとりかえたもの.

type  $\tilde{E}_7^+$   3つのlinearな枝

(1)の枝は  $2 \xrightarrow{+} 4$  又は  $2 \xrightarrow{-} 4$  (2), (3)の枝は  $1 \xrightarrow{+} 2 \xrightarrow{+} 3 \xrightarrow{+} 4$  or  $1 \xrightarrow{-} 4$

type  $\tilde{E}_7^-$   $\tilde{E}_7^+$  の符号を一律にとりかえたもの.

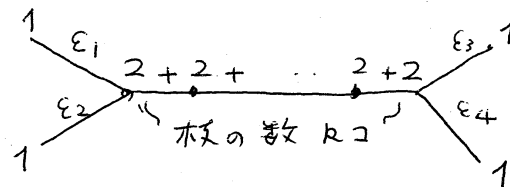
type  $\widehat{E}_8^+$   3つの linear branch

(1) の枝は  $1+2+3+4+5+6$  又は  $1-6$

(2) の枝は  $2+4+6$  又は  $2-6$

(3) の枝は  $3+6$  又は  $3-6$

type  $\widehat{E}_8^-$   $\widehat{E}_8^+$  の符号を  $-\overline{\text{符号}}$  にかえたもの.

type  $\widetilde{D}_R^+$  

$\epsilon_1 \sim \epsilon_4$  は  $\pm$  を任意にとれる.

type  $\widetilde{D}_R^-$   $\widetilde{D}_R^+$  の符号を  $-\overline{\text{符号}}$  にかえたもの.

証明は [1] の結果と初等計算による.

Remark. 上記の fiber 中  $\forall$  edge の符号が  $+$  ( $-$ ) のとき analytic fiber (即ち Kodaira の fiber [1] の適当な blow up である). ( $-$  のときは orientation をかえたもの — これを anti-analytic fiber と呼ぶ) ことにする.

定義2. singular fiber  $F$  ( $1 \times$  下の regular model と同じ記号で書く) が別の fiber  $F'$  (good でなくてもよい) に関して  $F \subseteq F' \# aS^2 \times S^2 \# b\mathbb{CP}^2 \# c\overline{\mathbb{CP}^2}$  とおけるとき、 $F'$  を (広義の) blow down により  $F$  から得られた fiber と呼ぶことにする。

定義3. singular fiber  $F$  が (広義の) blow down により  $I_1^\pm$ , Tw 型 singular fiber のみをもつ  $D^2$  上の torus fibering に diffeo になるとき、 $F$  を  $I_1^\pm$ , Tw の和に split すると呼ぶことにする。

我々は reduced good singular fiber が高々 2 個の  $\pm\mathbb{CP}^2$  との連結和をとしか" (即ち blow-up する)  $I_1^\pm$  の和に split すること、及び" blow-up をしなけ" split し得ない例があることを示す。(但 Twin は除く)

Remark analytic fiber の場合とちがひ、non-analytic fiber の場合、単に  $|\text{self-intersection}| \leq 1$  の divisor を blow down するだけで stable にも split させら

れない。(即ち直接表にあらわれない embedded  $S^2$  に関する blow-down (上の意味で) をも必要とする。また, analytic fiber については上記の意味で,  $I_1^+$  の和に split するだけでなく deformation で移ることが知られている [ ]. しかし non-analytic case で deformation を定義し, その様相を追跡することは難しい. しかし都合のよい事に, 問題となる fiber の monodromy の関係から, それらの fiber の regular whol の  $S^1$  上の  $T^2$ -bundle の構造は unique であり, splitting を通じて torus fibration の一部の fiber 構造もとりかえても fibering は compatible に貼りが合うので問題は生じない. 唯一問題となるのは  $\widetilde{A}_n$  型だけだがこの case は analytic case に帰着させ deformation で分解するのでやはり問題ない.

Theorem 1. good singular fiber は次の様に (stable に) split する. (以下  $\widetilde{E}^+$ ,  $\widetilde{D}^+$  case のみ示す. (-) case は単に  $\widetilde{A}_n$  の符号をとり換えたばかり).



II)  $\widehat{D}_k^+$   $\overline{\mathbb{CP}^2}$  の copy による blow up のこと.

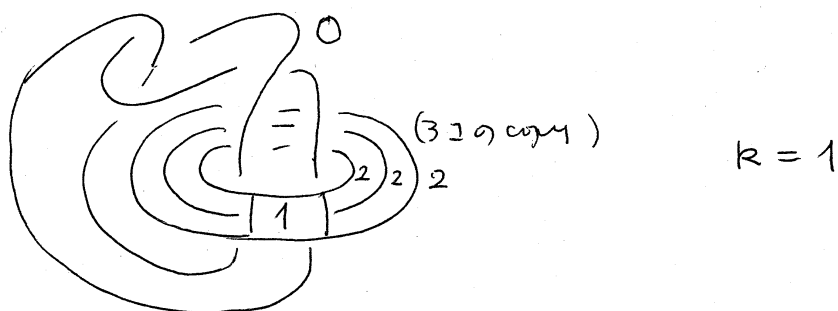
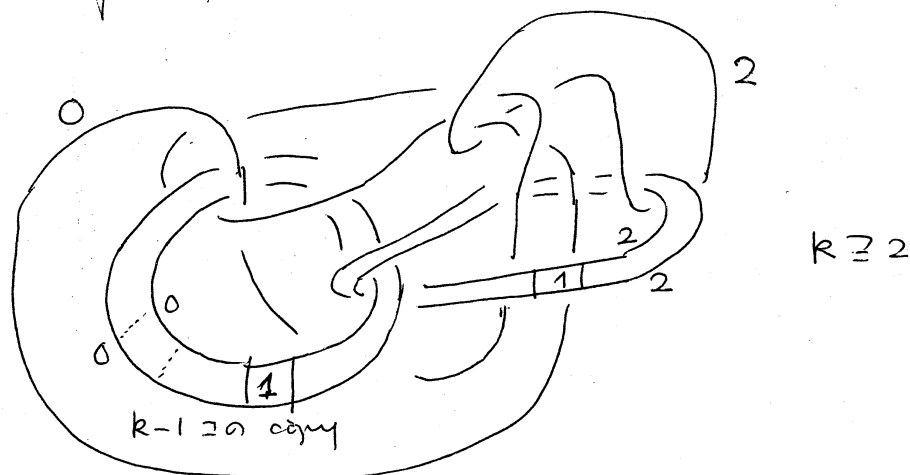
Kodaira の  $I_k^*$  型に split.

2.  $\mathbb{CP}^2$  の copy による blow up のこと.

この本質的に nonanalytic な fibering  $\bigvee_{i=1}^{N_k}$  がある.

$N_k \cong (k-1)I_1^+ + 5I_1^-$  と分解し, regular nbhd は

次の framed links で与えられる



但.  $N_0 \simeq 6 I_1^-$  は  $I_0^*$  型と同じである.

Remark.  $\widehat{A}_R^+$  型は Moishezon の定理 はび [1] の結果に帰着する.  $Twin$  は  $Twin^{1,2}$  (分解しない) のみが本質的である [1][2]. 全ての case につきより explicit な表示は当然可能だがここでは省略する.

また. Theorem 1 で与えた情報は  $\widehat{E}$ ,  $\widehat{D}_k$  for small  $k$  については best possible である. ( $k$  が大きいときもおそらく正しい) 即ち.

Theorem 1'. Theorem 1 における例外

$$\widehat{E}_6^+ \left( \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{+} \quad \text{+} \quad \text{+} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right) \# \mathbb{C}P^2, \quad \widehat{E}_7^+ \left( \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{+} \quad \text{+} \quad \text{+} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right)$$

はどのように blow-down しても決して  $I_1^\pm$ ,  $Twin$  の形に split しない. (証明は Matsumoto の signature function と  $Th 0$  を使った簡単な trick で行なう).  $\square$

Theorem 1 の情報から diffeo type の決定可能な good torus fibration over  $S^2$  は決然存在する.

しかし Theorem 1 からは stable な情報 (即ち  $\mathbb{CP}^2$  又は  $-\mathbb{CP}^2$  をいくつか connected sum すると diffeo type が決定できるか) しか得られない例もまた多い。少なくとも次のことはいえる。

Theorem 2.  $M$  を good torus fibration over  $S^2$  で multiple fiber なし  $\widehat{D}$  型 singularity なしとする。このとき 高々 1 個の  $\mathbb{CP}^2$  又は  $-\mathbb{CP}^2$  を connected-sum すると  $\mathbb{CP}^2$  と  $-\mathbb{CP}^2$  のいくつかの連結和と diffeo.

これは それ自体 split しない singular fiber (Theorem 1') について Theorem 1 の例外として挙げた 2通り以上の stable splitting の情報をつかうことにより Theorem 及び Mandelbaum の定理 [ ]

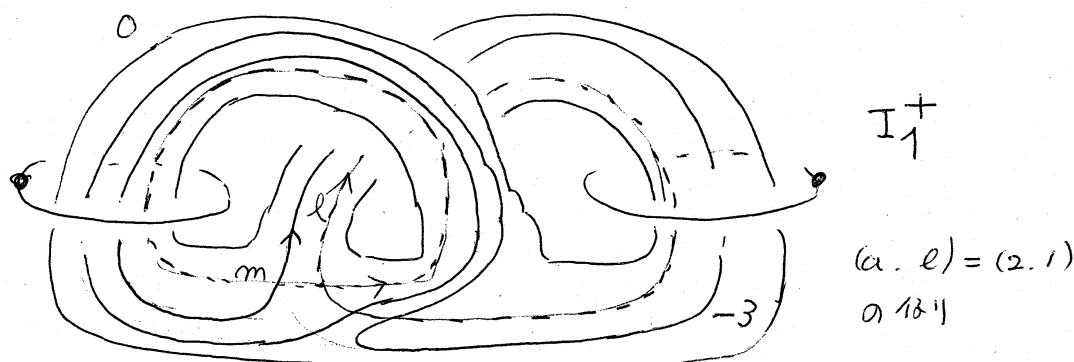
$M = \text{elliptic surface over } \mathbb{CP}^1 \text{ without multiple fibers}$   
 $\Rightarrow M \# P$  は completely decomposable

に帰着させる。ことにより、で証明される。 $\widehat{D}$  型 singular fiber をもつ場合にも結果は知られるが今のところあまりきれいな情報は得られない。

Theorem 1 の証明のためには  $I_1^\pm$  の和を framed link picture で表わすことが必要である。実際より

$I_1^\pm$  を  $T^2 \times D^2$  に 1 個の 2-handle を attach させた形に表わす (Lefschetz vanishing cycle).  $H_1 T^2$  の標準的 basis  $(m, l)$  を fix したとき,  $am + bl$

( $\gcd(a, b) = 1$ ) なる curve on  $T^2 \times \text{point} \subset T^2 \times D^2$  によって framing  $-ab - \varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ) で attach すると  $I_1^\pm$  が得られる。(即ち 次の picture の通り)



$I_1^\pm$  の和を表わすときは それぞれの vanishing cycle の circle の homological type とつける順番を与えれば一意に定まる。即ち 図の手前から奥に向かって順に  $a_1 m + b_1 l, a_2 m + b_2 l, \dots, a_k m + b_k l$  によって  $I_1^{\varepsilon_i}$  に対応する cycle を attach するとき 全体を  $((a_1, b_1)_{\varepsilon_1}, (a_2, b_2)_{\varepsilon_2}, \dots, (a_k, b_k)_{\varepsilon_k})$  と表わすと。

多様体の type は一意に定まる。(表示は一意でない。) 実際

これを framed link calculus で変形すると

$$II = ((1, 0)_+, (0, 1)_+, \text{---}), \quad III = ((1, 0)_+, (0, 1)_+, (1, 0)_+)$$

$$I_0^* = ((1, 0)_+, (0, 1)_+, (1, 0)_+, (0, 1)_+, (1, 0)_+, (0, 1)_+), \quad IV = ((1, 0)_+, (0, 1)_+,$$

$$(0, 1)_+, \underbrace{((1, 0)_+, \dots, (1, 0)_+)}_{K-1 \text{ 回}}, (0, 1)_-, (1, 0)_-, (0, 1)_-, (1, 0)_-, (0, 1)_-)$$

が直接証明され、各簡単な framed link で表わす。これらの情報

を、各 singular fiber の変形で与えられる link picture と比較

することにより定理は示される。

★ diffeo type の決定でより前進するためには次の様な問題: non-spin elliptic surface over  $\mathbb{CP}^1$  は  $\mathbb{CP}^2$  と  $-\mathbb{CP}^2$  のいくつかの connected-sum に diffeo か? に attack するための新しい方法論が必要である様に思える。

Reference [1] Y. Matsumoto: Good Torus fibrations preprint (1982)

[2] " Torus fibrations over the 2-sphere with  $I_1^\#$  singular fibers. " (1984)

[3] Z. Iwase. Good torus fibrations with twin singular fibers. " (1983)

[4] M. Ue Splitting singular fibers in ... (1984)