

劣微分作用素の差の項を持つ発展方程式

の解の漸近挙動について

東海大 理数 大谷 光春

§1. 序

H を実ヒルベルト空間とし、その内積ノルムを、夫々 $(\cdot, \cdot)_H$, $|\cdot|_H$ であらわす。 $\Phi(H)$ を H から $(-\infty, +\infty]$ への下半連続凸関数で $+\infty$ なるものの全体とする。定義より $\varphi \in \Phi(H)$ に対して、 φ の有効領域 $D(\varphi) := \{u \in H \mid \varphi(u) < +\infty\}$

は、空にならない。又、 φ の劣微分 $\partial\varphi$ を

$$\begin{cases} \partial\varphi(u) = \{f \in H \mid \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H \text{ for } \forall u \in D(\varphi)\}, \\ D(\partial\varphi) = \{u \in H \mid \partial\varphi(u) \neq \emptyset\} \end{cases}$$

で定義すると $\partial\varphi$ は H から H への、一般には多価の極大単調作用素となる (See Brézis [2])。この小論では、 $\varphi^i \in \Phi(H)$ に対して、簡単のため $\varphi^i \geq 0$ かつ $\partial\varphi^i$ は一価として ($i=1,2$)、次の H に於ける抽象 Cauchy 問題を考える。

$$(C.P) \begin{cases} (1) \quad \frac{du}{dt}(t) + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) = 0, & t > 0, \\ (2) \quad u(0) = a. \end{cases}$$

例えば、 Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし、

$$\varphi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega), (p \geq 2), \\ +\infty & \text{if } u \in L^2(\Omega) \setminus W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

$$\varphi^2(u) = \begin{cases} \frac{1}{2+\alpha} \int_{\Omega} |u(x)|^{2+\alpha} dx & \text{if } u \in L^{2+\alpha}(\Omega), (\alpha \geq 0), \\ +\infty & \text{if } u \in L^2(\Omega) \setminus L^{2+\alpha}(\Omega), \end{cases}$$

と置けば $\varphi^1, \varphi^2 \in \Phi(L^2(\Omega))$ となり、(C.P.) は次の非線型初期値・境界値問題 (P.NH) と同等となる。

$$(P.NH) \begin{cases} (3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta_p u(x,t) + |u|^\alpha u(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ (4) \quad u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ (5) \quad u(x,0) = a(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

ここで、 $\partial \varphi^1(u) = -\Delta_p u := -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ で $p=2$ の場合には Δ_p は通常のうづらシアンに一致する。

以下で問題とするのは、(C.P.) の強解の $t \rightarrow +\infty$ とした時の漸近挙動である。ここでいう強解とは次の意味である。

定義 1 $u(t) \in C([0,T]; H)$ が $[0,T]$ に於ける (C.P.) の強解であるとは、 $du(t)/dt$ かつ $\partial \varphi^i(u(t))$ ($i=1,2$) が $L^2(0,T; H)$ に属し、 $u(t)$ が (1)-(2) を満たす時をいう。

今後の結果: (P.NH) や (C.P.) の漸近挙動を考える上で、まず注意しなければならない事は、初期値がある条件を満たす時には、その解のある種のノルムが有限時間で ∞ になる (爆発)

場合があり、一方、初期値がある意味で充分小さければ、解は爆発せずに大域的に存在する場合がある事である。

これ等の現象について、今迄に多くの研究がなされている。

まず、 (R, NH) について、 $p=2$ の場合には、Ito [5], Kaplan [6], Fujita [3], ..., Matano [9], Alikakos [1] ; $p \geq 2$ の場合には、Tsutsumi [13], Levine-Payne [8] (共に弱解について)、又、 (C, R) については Koi-Watanabe [7], Ishii [4], 拙論 [10] などがある。これ等のうち、爆発現象を扱ったものとその方法論的見地から分類すれば、次の4つになる(堤氏の分類に依る)。

- 1) 比較定理法: 文字通り比較定理を用いるもので、考える方程式の半線型性がフルに活用される。[5], [9] がこれに当る。
- 2) Kaplan-Fujitaの方法: $-\Delta$ の最小固有値に対応する固有関数 ϕ_0 の正值性と Jensen の不等式を巧みに利用する方法で、 $(u(x, t), \phi_0)_{L^2(\Omega)}$ の爆発が示される。[6], [3] がこれである。
- 3) Energy法: [13] に於いて初めて提案された、Energy不等式と Sobolev の不等式を組み合わせて活用する方法で、[4], [1] がこの系統である。
- 4) Concavity法: Levine に依り提案された方法で、Energy不等式が本質的な役割をする点で、3) の方法の variant とも言えるが、テクニカルな部分で 3) のものとは、かなり異なる。[8] がその典型である。

ここで、我々が問題とするのは、次の2つの問題である。

(I) 各爆発現象向の相互関係(同等性など)を調べよ。

一口に爆発といっても、色々な位相での爆発が考えられる訳で(maximum-norm ([5], [9]), L^2 -norm ([13], [1]), $W_0^{1,p} \sim L^{\frac{p}{p-2}}$ -norm ([4], [8]) の爆発など)、これ等の相互関係、同等性について考えよ、という事である。この種の研究は(筆者の知る限りでは)極めて少なく、最近 Alikakos [1] が (P.NH) の $p=2$ の場合について $L^{\frac{p}{p-2}}$ -norm での爆発と L^2 -norm でのそれとの同等性を、初期値に適當な条件を課して調べている。

(II) 可能な漸近挙動をすべて決定せよ。

例えば、[4]では「初期値 u_0 が stable set W に入っていれば、解は 0 に decay し、blowing-up set V に入っていれば、ある位相で爆発する。」という様に、 $u_0 \in W \cup V$ に対しての挙動はわかっているが、その他の初期値 ($H^1(W \cup V)$ は充分多くの内点を持つ) に対する、解の漸近挙動については、まだ研究されていない訳で、その場合の可能な挙動をすべて決定せよ、という事である。この種の問題に関しては、Matano [9] の (P.NH) で $p=2$, 空間次元 $n=1$, 非線型項 $|u|^{p-2}u$ がもっと一般的な形である場合についての詳しい研究がある。

これ等の問題に対する我々の方法は、豫想的に言えば、“Energy-Compactness 法 + ϕ, ϕ^2 の凸性の利用” という事になる。

§ 2. Local existence

(C.P.) の強解の(小域的)存在については、既に [7], [4], [19] で研究されているが、ここでは [10, 11] の結果を証明なしで、述べる事にする。まず、次の仮定を導入しよう。

(A.1) 任意の $L < +\infty$ に対して、 $\{u \in H \mid |u|_H + \varphi'(u) \leq L\}$ は H でコンパクト。

(A.2) $D(\partial\varphi') \subset D(\partial\varphi^2)$ から次を満たす $\beta \in (0, 1)$ と $M(\cdot) \in \mathcal{M}$ が存在する。

(6) $|\partial\varphi^2(u)|_H \leq \beta |\partial\varphi'(u)|_H + M(\varphi'(u) + |u|_H)$ for $\forall u \in D(\partial\varphi')$,

ここで、(この小論を通じて) $\mathcal{M}$ は $[0, \infty)$ で定義された、単調増加関数の全体、をあらわすものとする。

定理 1 (A.1), (A.2) の仮定のもとに、任意の初期値 $u \in D(\varphi')$ に対して $|u|_H + \varphi'(u)$ のみに依る (単調減少的に依存) 正数 T が存在して、(C.P.) は $[0, T]$ で強解をもつ。更に、(C.P.) の $[0, T]$ に於ける任意の強解 $u(t)$ に対して、 $\varphi^T(u(t)) \leq M(|u|_H + \varphi'(u) + T)$ となる様な関数 $M(\cdot) \in \mathcal{M}$ が存在する。

注意 1. 先の例 (P, NH) に於いて、(i) $P=2$ の場合: $\alpha < +\infty$ if $n=1, 2$, $\alpha < 4/(n-2)$ if $n \geq 3$; (ii) $P > 2$ の場合: $\alpha < +\infty$ if $n \leq p$, $\alpha \leq \{n(p-2)+2p\}/2(n-p)$ if $n > p$ を仮定すれば (A.2) は満足される。

§3. 漸近挙動

(P.NH) を念頭に置いて、 $\alpha = 2$ では次の (少し制限的な) 場合 (= α は [4] の状況とほぼ同じものである。) を考える。

(A.3) φ^i は d_i (>1) 次の齊次関数, i.e., $\varphi^i(\lambda u) = \lambda^{d_i} \varphi^i(u)$ for $\forall \lambda > 0, \forall u \in D(\varphi^i)$, ($i=1,2$).

(A.4) α を満たす正定数 C_1, C_2 が存在する。

(7) $C_1 |u|_H \leq |\varphi^2(u)|^{1/\alpha_2} \leq C_2 |\varphi^1(u)|^{1/\alpha_1}$ for $\forall u \in D(\varphi^1)$.

注意2. (P.NH) に於いて (A.4) が満足される為には、
 $0 \leq \alpha < +\infty$ if $n \leq p$, $0 \leq \alpha \leq \{n(p-2)+2p\}/(n-p)$ if $n > p$ で十分。

3.1. Energy 等式

$u(t)$ を $[0, T]$ に於ける (C.P.) の強解とすれば、 $du(t)/dt$, $\partial \varphi^i(u(t)) \in L^2(0, T; H)$ であって、 T から $(\partial \varphi^i(u(t)), du(t)/dt)_H = d\varphi^i(u(t))/dt$ for a.e. $t \in [0, T]$ となるから ([2, Lemma 3.3]),

(1) 式と $du(t)/dt$ との H -内積をとって、次を得る。

$$(8) \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right|_H^2 + \frac{d}{dt} J(u(t)) = 0 \quad \text{for a.e. } t \in [0, T],$$

ここで $J(u) = \varphi^1(u) - \varphi^2(u)$ とおいた。これより直ちに、 $J(u(t))$ は t の単調減少関数である事がわかる。

更に、 φ が α (>1) 次の齊次関数であれば $(\partial \varphi(u), u)_H = \alpha \varphi(u)$ for $\forall u \in D(\varphi)$ となる事に注目して、(1) と $u(t)$ との内積をとれば、次式を得る。

$$(9) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|_H^2 = j(u(t)) \quad \text{for a.e. } t \in [0, T],$$

こゝで、 $j(u) = \alpha_2 \varphi^2(u) - \alpha_1 \varphi'(u)$ とおいた。

3.2. 解の爆発と増大

こゝで、(C.P.) の強解の幾つかのタイプの Blowing up (爆発) と Growing up (増大) を導入する。これは、我々の abstract setting ((8), (9) 式参照) から自然に導かれるものである。

定義 2. $u(t)$ を $[0, T)$ (resp. $[0, +\infty)$) 内の任意の区間 $[0, S]$ $S \in [0, T)$ (resp. $[0, +\infty)$) に於ける (C.P.) の強解とした時、 $u(t)$ が $t = T$ (resp. $t = +\infty$) に於いて ① $\varphi' - B.U.$ (resp. ①' $\varphi' - G.U.$) ; ② $\varphi^2 - B.U.$ (resp. ②' $\varphi^2 - G.U.$) ; ③ $j - B.U.$ (resp. ③' $j - G.U.$) ; ④ $J - B.U.$ (resp. ④' $J - G.U.$) ; ⑤ $H - B.U.$ (resp. ⑤' $H - G.U.$) であるとは、夫々 $t \uparrow T-0$ (resp. $t \rightarrow +\infty$) の時 $\varphi'(u(t)) \rightarrow +\infty$; $\varphi^2(u(t)) \rightarrow +\infty$; $j(u(t)) \rightarrow +\infty$; $J(u(t)) \rightarrow -\infty$; $|u(t)|_H \rightarrow +\infty$ となる事という。

これ等の相互関係について、まず次の結果が成立する。

定理 2. $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_2 > 2$ かつ (A.3), (A.4) が満たされている時 ①' ~ ⑤' の現象は起り得ない。更に ① ~ ⑤ の相互関係は (爆発時刻はすべて同じとして) $① \leftrightarrow ② \leftrightarrow ③ \leftarrow ④ \leftarrow ⑤$ となる。更に、次の (A.2)' を仮定すれば ① から ⑤ は同値になる。

(A.2)' $D(\partial\varphi) \subset D(\partial\varphi^2)$ かつ次を満たす $M(u) \in \mathcal{M}$ が存在する。

$$(10) \quad |\partial\varphi^2(u)|_H^2 \leq |\partial\varphi'(u)|_H^2 + M(|u|_H) \{ |\varphi'(u)| + 1 \}^2 \quad \text{for } \forall u \in D(\partial\varphi').$$

(証明) まず (A.4) より、 $⑤ \rightarrow ② \rightarrow ①$ か $⑤' \rightarrow ②' \rightarrow ①'$ は明らか。又、 $J(u(t))$ は単調減少であるから

$$(11) \quad \varphi'(u(t)) \leq \varphi^2(u(t)) + J(a) \quad \text{for } \forall t \in [0, T].$$

よって、 $① \leftrightarrow ②$ か $①' \leftrightarrow ②'$ 。そこで、もし $②'$ が成立したとすると、(9), (11) より、適当な $T_0 < +\infty$ が存在して

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 &\geq (d_2 - d_1) \varphi^2(u(t)) - d_1 J(a) \\ &\geq \frac{1}{2} (d_2 - d_1) \varphi^2(u(t)) \geq \frac{1}{2} (d_2 - d_1) \cdot C_1^{d_2} \|u(t)\|_H^{d_2} \quad \text{for } \forall t \in [T_0, +\infty) \end{aligned}$$

となるから、これより直ちに $⑤$ が導かれ ($②$ が起る事切明) 矛盾。よって、 $①', ②', ⑤'$ は起り得ない。

次に (8) を $[0, t]$ で積分すると

$$\begin{aligned} (13) \quad -J(u(t)) + J(a) &= \int_0^t \left| \frac{du}{ds}(s) \right|_H^2 ds \geq \frac{1}{t} \cdot \left(\int_0^t \left| \frac{du}{ds}(s) \right|_H ds \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{t} (\|u(t)\|_H - \|a\|_H)^2 \end{aligned}$$

よって $⑤ \rightarrow ④$ 。更に、(7) の $\varphi' - \varphi^2$ 間の不等式により (図1参照)、直ちに $③ \text{ or } ④ \rightarrow ① \text{ and } ②$; $③' \text{ or } ④' \rightarrow ①' \text{ and } ②'$ が従う。

よって、 $③', ④'$ も起り得ない事がわかる。 $② \rightarrow ③$ を見るには

$$j(u(t)) \geq (d_2 - d_1) \varphi^2(u(t)) - d_1 J(a) \quad \text{なる関係に注意すれば良い。}$$

(A.2)' のもとに $①$ から $⑤$ が同等である事を示すには、上の事実より $① \rightarrow ⑤$ を示せば十分である。 $\|u(t)\|_H$ が $[0, T)$

で有界であるとすれば、(12) を $[0, T]$ で積分する事により、

$$\int_0^T \varphi^2(u(t)) dt < +\infty, \text{ 更に (11) より } \int_0^T \varphi'(u(t)) dt < +\infty \text{ を得る。}$$

次に、(1) と $\partial \varphi'(u(t))$ との内積をとれば、(10) より

$$\begin{aligned} \|\partial \varphi'(u(t))\|_H^2 + \frac{d}{dt} \varphi'(u(t)) &\leq \|\partial \varphi'(u(t))\|_H \|\partial \varphi^2(u(t))\|_H \\ &\leq \|\partial \varphi'(u(t))\|_H^2 + M(\|u(t)\|_H) \{\varphi'(u(t)) + 1\}^2 \end{aligned}$$

これより、 $\|u(t)\|_H$ と $\int_0^T \varphi'(u(t)) dt$ の有界性に注意して、Gronwall の不等式を適用すれば $\sup_{0 \leq t \leq T} \varphi'(u(t)) < +\infty$ が得られ、① $\rightarrow$ ⑤

が示せる事となる。

[Q.E.D.]

3.3. 有界解について

(C.P.) の解の有界性を探る為には、まず次の補題を準備する。

補題 1. (A.1), (A.2), (A.3), (A.4) の仮定のもとに $u(t) \in [0, +\infty)$

に於ける (C.P.) の大域的強解とし、 $\limsup_{t_n \rightarrow +\infty} \varphi'(u(t_n)) < +\infty$ と
なる点列 $\{t_n\}$ が存在するとすれば、次の (i)-(iii) が成立する。

(i) $J(u(t)) \downarrow C_0 > -\infty$ as $t \rightarrow +\infty$,

(ii) $\dot{J}(u(t_n)) \rightarrow 0$ as $t_n \rightarrow +\infty$,

(iii) $\{t_n\}$ のある部分列 $\{t_{n'}\}$ が存在して、 $u(t_{n'}) \rightarrow u_\infty \in S := \{u \in D(\partial \varphi') \mid \partial \varphi'(u) = \partial \varphi^2(u)\}$ in H as $t_{n'} \rightarrow +\infty$.

よって、 $d_1 \neq d_2$ であれば、 C_0 のみに依る定数 k_i ($i=1,2$) が存在

して、 $\varphi'(u(t_n)) \rightarrow k_i$ as $t_n \rightarrow +\infty$ かつ $d_1 k_1 = d_2 k_2$ となる。

(証明) $\varphi'(u(t_n))$ は有界であるから、(A.4) より $\varphi^2(u(t))$ も有界。

よって $J(u(t_n))$ は下から有界。 $J(u(t))$ は単調減少である、た

から、明らかなに $J(u(t)) \downarrow C_0 > -\infty$ as $t \rightarrow +\infty$ となる。

よって、 $u_t(s) := \{u(t+s) \mid 0 \leq s \leq 1\} \in C([0,1]; H)$ とおけば、

(8) より $\|du_t(s)/ds\|_{L^2(0,1;H)} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$, また (A.2) より $\partial \varphi^i(u_{t_n}(s))$ は $L^2(0,1;H)$ で有界となる ($i=1,2$)。以上より $\{u_{t_n}(s)\}_n$ は $[0,1]$ 上で同等連続かつ H でのコンパクト集合を成す ((A.1)より) から Ascoli の定理により 適当な点列 $\{t_{n'}\} \subset \{t_n\}$ が存在して、

$$\begin{cases} u_{t_{n'}}(s) \rightarrow u(s) \equiv u_\infty \in S \text{ strongly in } C([0,1];H) \text{ as } t_{n'} \rightarrow +\infty, \\ \partial \varphi^i(u_{t_{n'}}(s)) \rightarrow g(s) \equiv g \text{ weakly in } L^2(0,1;H) \text{ as } t_{n'} \rightarrow +\infty \text{ (} i=1,2 \text{)} \end{cases}$$

となる事が容易にわかる。この時、 φ^i の斉次性より

$$\frac{1}{\tau} (u_{t_{n'}}(s), \partial \varphi^i(u_{t_{n'}}(s)))_{L^2(0,\tau;H)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau d_i \varphi^i(u_{t_{n'}}(s)) ds \rightarrow (u_\infty, g)_H$$

for $\forall \tau > 0, i=1,2$ as $t_{n'} \rightarrow +\infty$, 即ち $j(u(t_{n'})) \rightarrow 0$ as $t_{n'} \rightarrow +\infty$ となり、以上の議論は部分列 $\{t_{n'}\}$ の選い方に依らないから、(ii) が示される。 [Q.E.D.]

ここで、 $u(t)$ を $[0,T)$ に於ける (C.P.) の強解とした時、

$$\lim_{t \uparrow T-0} \inf \varphi^1(u(t)) < +\infty \text{ かつ } \lim_{t \uparrow T-0} \sup \varphi^1(u(t)) = +\infty \text{ となる事}$$

があり得るかどうかを考えよう。まず、 $T < +\infty$ の場合には、起り得ない事は、定理 1 より明らかであろう。 $T = +\infty, d_2 > d_1$ の場合にも起り得ない事が、次の定理で保証される。

定理 3. $d_2 > d_1, d_2 > 2$ かつ (A.1), (A.2), (A.3), (A.4) が満たされているとし、 $u(t)$ を $[0, +\infty)$ に於ける (C.P.) の大域的強解とすれば、 $\varphi^1(u(t))$ は有界、即ち $\sup_{0 \leq t < +\infty} \varphi^1(u(t)) < +\infty$ となる。
(従って $\varphi^2(u(t)), J(u(t)), j(u(t)), |u(t)|_H$ も有界となる。)

(証明) まず $u(t)$ が大域解である事より、定理 2 によつて、

$$J(u(t)) \downarrow C_0 > -\infty \text{ as } t \rightarrow +\infty. \text{ 故て (8) より } du(s)/ds \in L^2(t_0, +\infty; H)$$

となるから $\varepsilon(t) = \|du(s)/ds\|_{L^2(t, +\infty; H)}$ とおけば $t \rightarrow +\infty$ の時

$\varepsilon(t) \rightarrow 0$ であり、次を満す。

$$(14) \int_t^{t+\Delta} \left| \frac{du}{ds}(s) \right|_H ds \leq \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon(t).$$

そこで、 $\varphi'(u(t))$ が有界でないとする。定理 2 より

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(u(t)) < +\infty \quad \text{かつ} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(u(t)) = +\infty \quad \text{と仮定する。}$$

$J(u(t))$ が有界である事、補題 1 の (ii) 及び (7) 式より (図 1 参照)、次の (15)-(18) を満す点列 $\{t_n\}, \{^*t_n\}, \{t_n^*\}$ が存在する:

$$(15) \quad \varphi'(u(t_n)) \rightarrow +\infty \quad \text{as } t_n \rightarrow +\infty,$$

$$(16) \quad \varphi'(u(^*t_n)) \leq C, \quad \varphi'(u(t_n^*)) \leq C \quad \text{for all } ^*t_n \text{ and } t_n^*,$$

$$(17) \quad d_1 \varphi'(u(t)) - \frac{d_1 d_2}{2} \varphi^2(u(t)) \leq 0 \quad \text{for } \forall t \in [^*t_n, t_n^*],$$

$$(18) \quad 0 < \delta \leq \varphi^2(u(t)) \quad \text{for } \forall t \in [^*t_n, t_n^*], \quad ^*t_n \leq t_n \leq t_n^*,$$

まず (17) と (9) より $|u(t)|_H$ は $[^*t_n, t_n^*]$ で単調増加となる

から、(7) と (16) から

$$(19) \quad |u(t)|_H \leq C \quad \text{for } \forall t \in [^*t_n, t_n^*].$$

次に

$$|d_2 \varphi^2(u(t)) - d_1 \varphi'(u(t))| = |(\partial \varphi^2(u(t)) - \partial \varphi'(u(t)), u(t))| \leq \left| \frac{du}{ds}(t) \right|_H \cdot |u(t)|_H$$

であるから、これを $[t_n, t_n^*]$ で積分すれば、(14), (17), (18), (19)

によつて、 $\Delta_n = t_n^* - t_n$ とおいて、次式を得る。

$$\frac{d_2 - d_1}{2} \delta \Delta_n \leq \int_{t_n}^{t_n^*} \{d_2 \varphi^2(u(s)) - d_1 \varphi'(u(s))\} ds \leq C \cdot \sqrt{\Delta_n} \cdot \varepsilon(t_n).$$

ここで、 $t_n \rightarrow +\infty$ とすれば、 $\varepsilon(t_n) \rightarrow 0$ であつたから、 $\Delta_n \rightarrow 0$ が従ふ。しかし、これは (15), (16) から定理 1 の事実と矛盾する。 [Q.E.D.]

一般的には (C.P.) の強解の一意性は期待できないから、その漸近挙動も、初期値 a によつて一意に定まる事は、期待できないが、 a が $D(\varphi')$ のある部分集合に属する場合は、その漸近挙動が一意に決定される場合がある。即ち、定理 2, 3 より [13], [4] と類似の次の命題を得る事ができる。

命題 1. 定理 3 と同じ仮定のもとに、 $d = \frac{d_2 - d_1}{\alpha_2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{\alpha_1/(\alpha_2 - d_1)}$,
 $W = \{u \in D(\varphi') \mid J(u) \leq d, j(u) < 0\}$, $V = \{u \in D(\varphi') \mid J(u) \leq d, j(u) > 0\}$
 とおけば、次の (i), (ii) が成立する。

(i) $a \in W$ の時、(C.P.) の強解 $u(t)$ はいつも大域的に延長する事ができ、 $t \rightarrow +\infty$ の時 $\varphi^1(u(t)) \rightarrow 0$, $\varphi^2(u(t)) \rightarrow 0$, $\|u(t)\|_h \rightarrow 0$ となる。

(ii) $a \in V$ の時、(C.P.) の強解は、爆発現象 ①, ②, ③ を起す。

(証明) $\mathcal{W} = \{(\varphi^2(u), \varphi^1(u)) \mid u \in W\}$, $\mathcal{V} = \{(\varphi^2(u), \varphi^1(u)) \mid u \in V\}$,

$\mathcal{S} = \{(\varphi^2(u), \varphi^1(u)) \mid u \in S\} = \{(\varphi^2(u), \varphi^1(u)) \mid j(u) = d_2 \varphi^2(u) - d_1 \varphi^1(u) = 0\}$

とおけば $\mathcal{W}$ と $\mathcal{V}$ は $(\varphi^2(u), \varphi^1(u))$ -平面での連結集合となり、

(A.4) から $\mathcal{W} \cap \mathcal{S} = \{(0, 0)\}$ かつ $\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ となる (図 1 参照)。

ここで、 $J(u(t))$ が単調減少である事より $a \in W$ (resp. $a \in V$)

ならば、いつも $u(t) \in W$ (resp. $u(t) \in V$) となる。よつて、まず $a \in W$

の時、 $\mathcal{W}$ は有界であるから補題 1 より、 $(\varphi^2(u(t)), \varphi^1(u(t)))$ は

$\{(0,0)\}$ に収束しなければならない。又 $\lambda \in V$ の時には、補題1
及び定理2,3より、爆発現象①~③が起る事がわかる。(Q.E.D.)

注意3. 上の(i)の場合、 $\|u(t)\|_H$, $\varphi^i(u(t))$ の decay の order を
評価する事もできる。([4] 参照)

3.4. 漸近挙動の分類

以上の準備のもとに、(C.P.)の強解の可能なすべての漸近挙
動を分類する事ができる。以下、仮定 (A.1) から (A.4) はいつも
満たされているものとして話を進める。

[I] $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_2 > 2$ の場合: 定理2,3 と 補題1 より、可
能な漸近挙動は、次の2つに限る事がわかる。

(T₁) $\varphi^1(u(t))$, $\varphi^2(u(t))$, $\|u(t)\|_H$ は (一様に) 有界であり、 $u(t)$ の
 ω -limiting set $\Omega(u(t)) := \bigcap_{t>0} \overline{\{u(t) \mid s \geq t\}}^H$ は S (定常解集合)
に含まれ、 $t \rightarrow +\infty$ の時、 $J(u(t)) \downarrow K \geq 0$, $\varphi^1(u(t)) \rightarrow \frac{d_2 K}{d_2 - d_1}$,
 $\varphi^2(u(t)) \rightarrow \frac{d_1 K}{d_2 - d_1}$ 。

(T₂) $u(t)$ は爆発する; 即ち ある有限時刻 T があって $t \uparrow T-0$
の時 $\varphi^1(u(t)) \rightarrow +\infty$, $\varphi^2(u(t)) \rightarrow +\infty$, $j(u(t)) \rightarrow +\infty$ となる。

注意4. (i) (T₂) の場合において、更に (A.2)' が満たされている時
には、H-B.U., J-B.U. も起きている (定理2 後半)。よって、
 $\alpha \notin V$ に対する解 $u(t)$ が爆発する場合には、 $u(t)$ が (有限時間
内に) V に属した後爆発する事がわかる。

(ii) Alkaios [1] は (P.NH) で $p=2$ の場合について、

$0 < \alpha < \frac{4}{n}$ if $n \leq 4$, $0 < \alpha \leq \frac{2}{n-2}$ if $n \geq 5$ かつ $a \neq 0$, $J(a) \leq 0$ (a : 初期値) なる仮定のもとに、その解が $L^{2+\alpha}(\Omega)$ -norm で爆発するか、 $L^2(\Omega)$ -norm でも爆発する事を示しているが、拙イの結果では、 α に関して " $0 < \alpha \leq \frac{4}{n}$ " (定理2の (A.2)') に相当) ばかりを仮定すれば良い。よって、命題1より、 $0 < \alpha \leq \frac{4}{n}$ かつ $a \in V$ (" $J(a) \leq 0$, $a \neq 0$ " の条件よりゆるい) ならば $u(t)$ の $L^2(\Omega)$ -norm は爆発する事がわかる。

[II] $\alpha_2 < \alpha_1$ の場合: 図2より明らかな様に、 $u(t)$ の trajectory は、いつも有界であるから、前出の (T_1) の場合しか起り得ない。但し、この場合には、 $J(u(t)) \downarrow K \in [d, 0]$ ($-\infty < d < 0$) となる。

[III] $\alpha_2 = \alpha_1$ の場合: 条件 (A.4) に現われる定数 C_2 の値によって、次の2つの場合を考える。

(i) $0 < C_2 < 1$ の場合: 図3から明らかな様に、 $u(t)$ の trajectory は、いつも有界となり、 (T_1) の場合しか起り得ないが、この場合には、 S は自明定常解0のみからなるから、 $t \rightarrow +\infty$ の時、 $\varphi^1(u(t)) \rightarrow 0$, $\varphi^2(u(t)) \rightarrow 0$, $|u(t)|_H \rightarrow 0$ となる。

(ii) $1 \leq C_2$ の場合: 有界性条件として (A.2) だけでは、一般的な事はあまり言えない (H-B.U. が起り得ない事は示せる。) が、有界性の条件を強めれば (注意5の (i) 参照)、次の結果が成立する。(証明は紙面の都合で割愛する。)

定理 4. $\alpha_2 = \alpha_1$ とし、(A.1), (A.3), (A.4) 及び次の (A.2)'' を仮定す。

(A.2)'' $D(\partial\varphi^1) \subset D(\partial\varphi^2)$ が次を満たす $\gamma \in (0, 1)$ と $M(\cdot) \in \mathcal{M}$ が存在する。

$$|\partial\varphi^2(u)|_H \leq M(|u|_H) \{ |\partial\varphi^1(u)|_H^{1-\gamma} + |\varphi^1(u)|^{1-\gamma} + 1 \} \text{ for } \forall u \in D(\partial\varphi^1).$$

この時、任意の $a \in D(\varphi^1)$ に対して (C.P.) は、大域的強解を持ち、

更に (C.P.) の強解の可能な漸近挙動は、次の 2 つに限られ、

そのどれの各性質は、同値となる。

(T₃) $J(u(t)) \downarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty \iff |u(t)|_H$ は有界 $\iff \varphi^1(u(t))$ は有界 $\iff \varphi^2(u(t))$ は有界。 (この時、当然 $\Omega(u(t)) < \delta$ が成立)

(T₄) $J(u(t)) \downarrow k \in [-\infty, 0)$ as $t \rightarrow +\infty \iff \varphi^1 - G.U. \iff \varphi^2 - G.U. \iff H - G.U.$

注意 5. (i) (P.NH) に於いて $\alpha_1 = \alpha_2$ に相当する場合は $p = 2 + \alpha$ の場合であるから、(A.2)'' が満足されるには、注意 1 で (A.2) を保証する為に必要な条件があまり十分である。即ち、(P.NH) に関する限り) $\alpha_1 = \alpha_2$ の場合には (A.2)'' は (A.2) とほぼ同じ程度の条件となっている。

(ii) 定理 4 の場合に於いて、初期値 a が $J(a) < 0$ を満たす (図 4 の集合 $\mathcal{G}$ に属せば)、 $J(u(t))$ の単調性より、その解 $u(t)$ は、必ず grow up する事がわかる。

§ 4. 定常解について

4.1. 非自明定常解の存在について

$u = 0$ は明らかに $S = \{u \in D(\partial\varphi^1) \mid \partial\varphi^1(u) = \partial\varphi^2(u)\}$ の元であるが、自明解以外の定常解の存在に關して、次の結果が成立する。

定理 5. $\alpha_2 \neq \alpha_1$ とし、(A.3), (A.4) の仮定のもとに

$$C_b = \inf_{u \neq 0} \frac{\{\varphi^2(u)\}^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\{\varphi^1(u)\}^{\frac{1}{\alpha_1}}} \quad \text{とし、} u_0 \text{ が}$$

$$(i) \quad u_0 \in D(\partial\varphi^1) \cap D(\varphi^1),$$

$$(ii) \quad \{\varphi^2(u_0)\}^{\frac{1}{\alpha_2}} = C_b \{\varphi^1(u_0)\}^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$(iii) \quad \alpha_1 \varphi^1(u_0) = \alpha_2 \varphi^2(u_0),$$

を満足すれば、 u_0 は $\partial\varphi^1(u) = \partial\varphi^2(u)$ の非自明(定常)解である。

(証明) $u_0 \in S$ を示すには

$$(20) \quad (\partial\varphi^2(u_0), v - u_0)_H \leq \varphi^1(v) - \varphi^1(u_0) \quad \text{for } \forall v \in D(\varphi^1)$$

を示せば良い。まず、 $R_1 = (\alpha_1/\alpha_2 C_b)^{\alpha_1/(\alpha_2 - \alpha_1)} > 0$ とおけば、

$$(21) \quad \varphi^2(u_0) = \max_{\varphi^1(u) = R_1} \varphi^2(u)$$

と注意する。($\alpha_2 > \alpha_1$ の時は図を参照、 $\alpha_2 < \alpha_1$ の時も同様)

(1) $v = 0$ の時 (A.4) より $\varphi^1(v) = 0$ と同値) : 条件 (iii) より

$$(\partial\varphi^2(u_0), 0 - u_0)_H = -\alpha_2 \varphi^2(u_0) = -\alpha_1 \varphi^1(u_0) < -\varphi^1(u_0) + \varphi^1(v)$$

となるから、(20) は満たされる。

(2) $v \neq 0$ ($\varphi^1(v) \neq 0$) の時 : $\lambda = \{R_1/\varphi^1(v)\}^{\frac{1}{\alpha_1}} > 0$ とおけば

$$\varphi^1(\lambda v) = R_1 \quad \text{であるから (21) より} \quad \varphi^2(\lambda v) \leq \varphi^2(u_0). \quad \text{よって}$$

$$(\partial\varphi^2(u_0), \lambda v - u_0)_H \leq \varphi^2(\lambda v) - \varphi^2(u_0) \leq 0 \quad \text{となる。これより、}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(v) - \varphi'(u_0) &= (\partial \varphi^2(u_0), v - u_0)_H \\
&= R_1 \lambda^{-\alpha_1} - R_1 - \frac{1}{\lambda} (\partial \varphi^2(u_0), \lambda v - u_0)_H - \frac{1-\lambda}{\lambda} (\partial \varphi^2(u_0), u_0)_H \\
&\geq R_1 \lambda^{-\alpha_1} - R_1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} R_1 \alpha_1 = R_1 (\lambda^{-\alpha_1} - 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \alpha_1)
\end{aligned}$$

となる。 $\alpha_1 = 3$ かつ、 $\alpha_1 > 1$ であるから、簡単な計算によ、

$$(\lambda^{-\alpha_1} - 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \alpha_1) \geq 0 \quad \text{for } \forall \lambda > 0 \quad (\text{等号は } \lambda = 1 \text{ のときのみ})$$

がわかるから、(20) が示せた事になる。 [Q. E. D.]

注意 6. (i) (P.NH) に対する定常問題: $\Delta_p u + |u|^\alpha u = 0$,

$u|_{\partial\Omega} = 0$ の解は、 $p > 2$ の場合、 $u(x)$ が最下となる点で、

この方程式を考えれば、容易にわかる様に $C^2(\Omega)$ -級になり得ない。この事実と定理 5 から、Sobolev 型不等式

$$|u|_{L^q(\Omega)} \leq C_b \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (p \neq b, p > 2, q > 1),$$

の等号を成立させる関数は $C^2(\Omega)$ -級となり得ない事がわかる。

(ii) 蛇足ながら、(P.NH) 自身に対しても上と類似の Shock 現象

が起る、即ち、 $p > 2$ の場合 (P.NH) の解 $u(x, t)$ は、初期値

$a(x)$ が $C_0^\infty(\Omega)$ に属しても、 $|u(x, t)|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ ならば

(これは、命題 1 より $a(x)$ が充分小さければ良い)、ある時刻

$T > 0$ が存在して $u(x, T) \notin C^2(\Omega)$ となる。

4.2. 定常解の安定性に関する注意

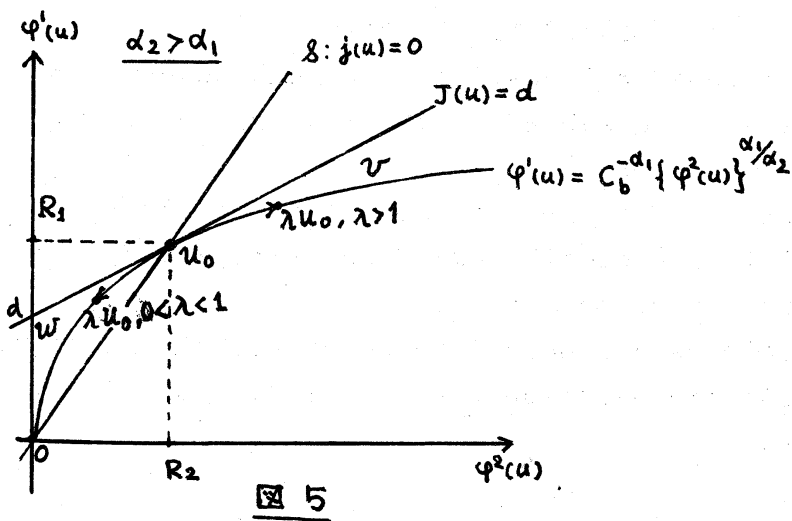
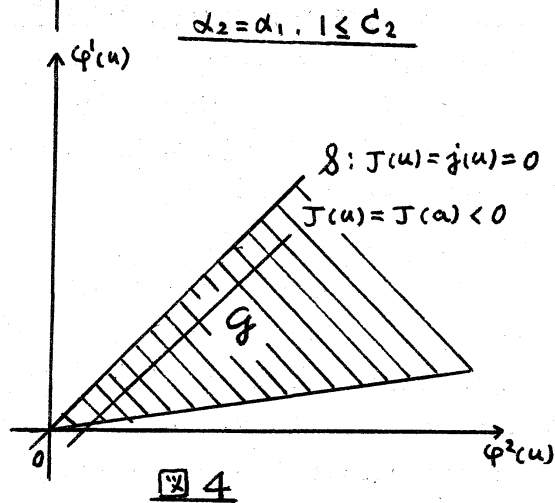
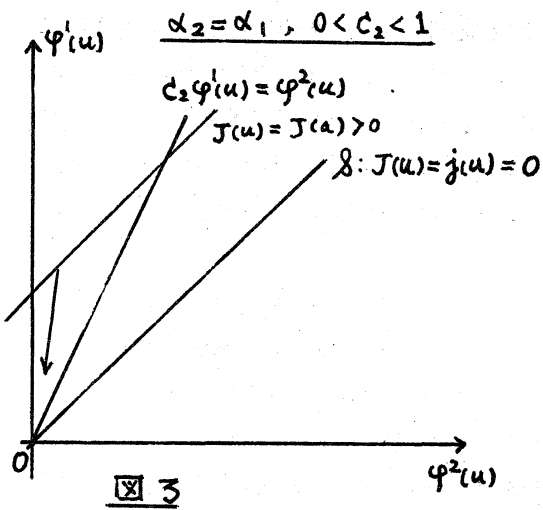
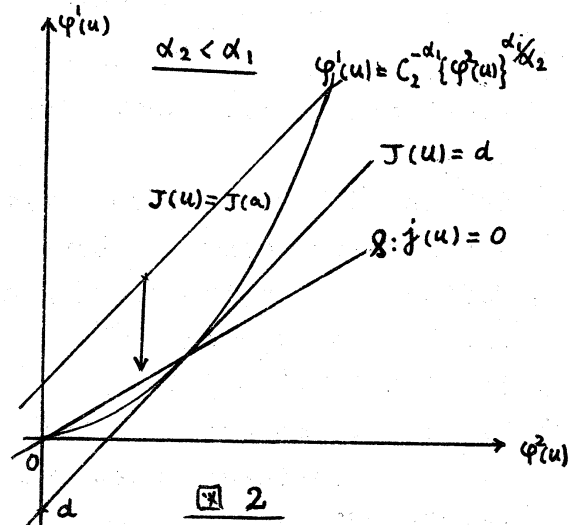
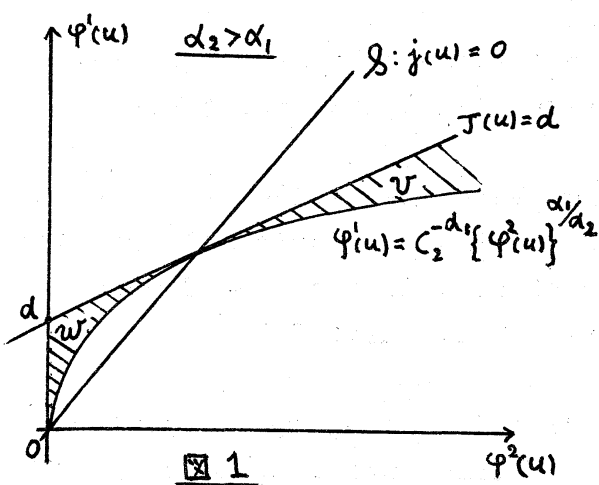
(i) $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_2 > 2$ の場合、まず自明定常解は、命題 1 で述べた意味で (局所的に) 安定であるが、他の定常解は、次の意味ですべて不安定である。即ち、 $u \in S \setminus \{0\}$ に対し

$J(\lambda u) < J(u)$ for all $\lambda > 0, \lambda \neq 1$, (図5参照) であるから、
 λu を初期値とする (C.P.) の強解 $u(t)$ は、 $J(u(t))$ の単調性より
 $J(u(t)) < J(u)$ を満たすから、有限時間で爆発するか、他の定常
 解に近づくかのどちらかである ($\Omega(u(t)) \neq \emptyset$)。特に、図5
 の $(\varphi(u), \varphi'(u)) = (R_2, P_1)$ の位置にある定常解 u_0 (例2は、定理
 5で与えたもの) に対し $\lambda u_0 \in W$ for $0 < \lambda < 1$,
 $\lambda u_0 \in V$ for $1 < \lambda$ となるから、命題1より、 $\lambda u_0, 1 < \lambda$,
 から出発する解は有限時間で爆発し、 $\lambda u_0, 0 < \lambda < 1$, からの
 それは、0 に収束する。よって、具体的な方程式 (P.NH) に対して、
 比較定理が成立する場合には、初期値が 0 と u_0 との間にある時
 は 0 に収束し、 u_0 より上にある時には爆発する事がわかる。

(ii) $\alpha_2 < \alpha_1$ の場合、自明定常解は不安定となる。即ち、0
 のどんな H -近傍内にも $J(u) < 0$ となる元 u が存在するから、
 (図2参照) u から出発する解 $u(t)$ は $J(u(t)) \leq J(u) < 0$ を満たす
 から、他の非自明定常解に近づくことなく 0 にはならない。(この事実
 から、非自明定常解の存在が言える。)

(iii) $\alpha_2 = \alpha_1$ の場合、 $0 < c_2 < 1$ の時、定常解は自明解
 のみで、それは (大域的に) 安定である。(図3参照)

$1 < c_2$ の時、(ii) の場合と同様にして、自明解は不安定となる。
 (この事情は、(P.NH) において $p=2, \alpha=0$ の場合を考へれば、
 良く理解できる。)



REFERENCES

- [1] Alikakos, N.D., L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations, Comm. Partial Differential Equations, 4 (1979), 827-868.
- [2] Brézis, H., Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland, 1973.
- [3] Fujita, H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 13 (1966), 109-124.
- [4] Ishii, H., Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations, J. Differential Equations, 26 (1977), 291-319.
- [5] Ito, S., 半線型放物型偏微分方程式の解の爆発について, 数学, 18巻(1966), 44-47.
- [6] Kaplan, S., On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 305-330.
- [7] Koi, Y. and J. Watanabe, On nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, Proc. Japan Acad. 52 (1976), 413-416.
- [8] Levine, H.A. and L.E. Payne, Nonexistence of global weak solutions for classes of nonlinear wave and parabolic equations, J. Math. Anal. Appl., 55 (1976), 329-334.
- [9] Matano, H., Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations, J. Math. Kyoto Univ. 18(1978), 221-227.
- [10] Ôtani, M., On existence of strong solutions for $du(t)/dt + \alpha\phi(u(t)) - \alpha\psi(u(t)) = f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 24(1977), 575-605.
- [11] Ôtani, M., Non-monotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, I: Cauchy problems, to appear.
- [12] Ôtani, M., Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials, to appear.
- [13] Tsutsumi, M., Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8 (1972), 211-229.